$$\boxed{\hat{H}_0 = \int d^3x \left(\partial_t \hat{\varphi}^\dagger \partial_t \hat{\varphi} + \vec{\nabla}\hat{\varphi}^\dagger \cdot \vec{\nabla}\hat{\varphi} + m^2 \hat{\varphi}^\dagger \hat{\varphi} \right) \equiv \int d^3x \, \hat{\mathcal{H}}_0(\vec{x}, t)}$$

(resultado que verificaremos más adelante).

Pero a cambio de preservar la causalidad, hemos tenido que pagar un precio: dado que tanto $\hat{\varphi}$ como $\hat{\varphi}^\dagger$ incluyen un operador de creación $\hat{\phi}^\dagger$ y uno de aniquilación $\hat{\phi}$, ¡¡ genéricamente habrá en $\hat{\mathcal{H}}(x)$ términos que NO conservan el número de partículas !! P.ej.,

$$\hat{\varphi}^\dagger_n(x)\hat{\varphi}^\dagger_n(x)\hat{\varphi}_n(x)\hat{\varphi}_n(x) \supset \hat{\phi}^\dagger_n\hat{\phi}^\dagger_n\hat{\phi}_n\hat{\phi}_n, \; \hat{\phi}^\dagger_n\hat{\phi}^\dagger_n\hat{\phi}^\dagger_{\breve{n}}\hat{\phi}^\dagger_{\breve{n}}, \; \hat{\phi}^\dagger_n\hat{\phi}_n\hat{\phi}^\dagger_{\breve{n}}\hat{\phi}^\dagger_n, \text{ etc.}$$

$$\Delta N = \quad -2+2=0 \qquad +2+2=4 \qquad -1+3=2$$

$\hat{\phi}^\dagger_n + \hat{\phi}_{\breve{n}}$ $\quad \hat{\phi}_n + \hat{\phi}^\dagger_{\breve{n}}$

L13: 05/09/22 (~65 min)

En este ejemplo notamos un patrón general: si usamos por ahora solo un n y $\breve{n}$ dados (2 tipos específicos), entonces solo se crean o aniquilan pares n-$\breve{n}$. Esto implica en particular que si las partículas tipo n portan carga q de algún tipo, y queremos que esta carga se conserve aun en presencia de interacciones, entonces $\breve{n}$ necesariamente debe portar carga $-q$. (En el ejemplo de arriba tendríamos así $\Delta Q = -2q+2q=0$, $+2(-q)+2q=0$, $-q+(-q)+2q=0$. ✓)

misma masa

miércoles, 19 de septiembre de 2007 02:52 p.m.

Podemos decir esto de manera más formal: la carga, siendo una observable, estará asociada a un operador hermitiano $\hat{Q}$ cuya acción sobre estados de una partícula es $\hat{Q}|\bar{p}n\rangle = q_n |\bar{p}n\rangle$, y en el espacio de Fock completo está definida como (cf. p. 119)   ← para $\hat{P}_{\mu}$

$$\boxed{\hat{Q} = \sum_n q_n \hat{N}_n = \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, q_n\, \hat{a}^{\dagger}_{\bar{p}n} \hat{a}_{\bar{p}n}\,.}$$

La carga se conserva (es decir, $\hat{Q}(t) \equiv e^{i\hat{H}t}\hat{Q}(0)e^{-i\hat{H}t} = \hat{Q}(0)$) si $[\hat{Q}, \hat{H}] = 0$.

Usando $\hat{Q}$, podemos definir una familia de operadores unitarios $\hat{U}_Q(\theta) \equiv \exp(i\theta\hat{Q})$, que actúan de acuerdo con

$$\hat{U}_Q(\theta)|\bar{p}_1 n_1; \cdots; \bar{p}_N n_N\rangle = \exp[i\theta(q_{n_1} + \cdots + q_{n_N})]|\bar{p}_1 n_1; \cdots; \bar{p}_N n_N\rangle$$

y forman una rep del grupo de Lie (abeliano) $U(1)$.

Estas transformaciones (análogas a rotaciones en un plano) son entonces una simetría interna de nuestro sistema, cuya conexión con p.ej. la interacción electromagnética quedará clara más adelante.

A partir de la regla de transformación del estado $|\bar{p}n\rangle \equiv \sqrt{2E_{\bar{p}n}}\,\hat{a}^{\dagger}_{\bar{p}n}|0\rangle$, podemos deducir que

$$\hat{U}_Q(\theta)\,\hat{a}^{\dagger}_{\bar{p}n}\,\hat{U}^{-1}_Q(\theta) = e^{i\theta q_n}\,\hat{a}^{\dagger}_{\bar{p}n} \quad \overset{\text{BCH}}{\longleftrightarrow} \quad \overbrace{[\hat{Q}, \hat{a}^{\dagger}_{\bar{p}n}]}^{\text{cambio } \delta(\hat{a}^{\dagger}_{\bar{p}n})/i\epsilon} = q_n\,\hat{a}^{\dagger}_{\bar{p}n},$$

$$\hat{U}_Q(\theta)\,\hat{a}_{\bar{p}n}\,\hat{U}^{-1}_Q(\theta) = e^{-i\theta q_n}\,\hat{a}_{\bar{p}n} \quad \overset{\text{BCH}}{\longleftrightarrow} \quad [\hat{Q}, \hat{a}_{\bar{p}n}] = \underbrace{-q_n\,\hat{a}_{\bar{p}n}}_{\delta(\hat{a}_{\bar{p}n})/i\epsilon},$$

y por tanto también

$$\hat{U}_Q(\theta)\,\hat{\phi}^{\dagger}_n(x)\,\hat{U}^{-1}_Q(\theta) = e^{i\theta q_n}\,\hat{\phi}^{\dagger}_n(x) \quad \overset{\text{BCH}}{\longleftrightarrow} \quad [\hat{Q}, \hat{\phi}^{\dagger}(x)] = q_n\,\hat{\phi}^{\dagger}(x),$$

$$\hat{U}_Q(\theta)\,\hat{\phi}_n(x)\,\hat{U}^{-1}_Q(\theta) = e^{-i\theta q_n}\,\hat{\phi}_n(x) \quad \overset{\text{BCH}}{\longleftrightarrow} \quad [\hat{Q}, \hat{\phi}(x)] = -q_n\,\hat{\phi}(x).$$

Pero entonces $\hat{\varphi}^{\dagger}_n(x) \equiv \hat{\phi}^{\dagger}_n(x) + \hat{\phi}_{\breve{n}}(x)$ transforma de manera definida bajo $\hat{U}_Q(\theta)$ (es decir, tiene una carga definida) sólo si $\boxed{q_{\breve{n}} = -q_n}$, en cuyo caso

$$\hat{U}_Q(\theta)\,\hat{\varphi}^{\dagger}_n(x)\,\hat{U}^{-1}_Q(\theta) = e^{i\theta q_n}\,\hat{\varphi}^{\dagger}_n(x) \quad \overset{\text{BCH}}{\longleftrightarrow} \quad [\hat{Q}, \hat{\varphi}^{\dagger}_n(x)] = +q_n\,\hat{\varphi}^{\dagger}_n(x),$$

$$\hat{U}_Q(\theta)\,\hat{\varphi}_n(x)\,\hat{U}^{-1}_Q(\theta) = e^{-i\theta q_n}\,\hat{\varphi}_n(x) \quad \overset{\text{BCH}}{\longleftrightarrow} \quad [\hat{Q}, \hat{\varphi}_n(x)] = -q_n\,\varphi_n(x)$$

y cualquier combinación hermitiana de $\hat{\varphi}_n(x)$ y $\hat{\varphi}^{\dagger}_n(x)$

será automáticamente invariante. P.ej., $\hat{\varphi}_n^\dagger \hat{\varphi}_n$ es invariante:

$$\hat{U}_Q(\theta)\hat{\varphi}_n^\dagger\hat{\varphi}_n\hat{U}_Q^{-1}(\theta) = \underbrace{\hat{U}_Q(\theta)\hat{\varphi}_n^\dagger\hat{U}_Q^{-1}(\theta)}\,\underbrace{\hat{U}_Q(\theta)\hat{\varphi}_n\hat{U}_Q^{-1}(\theta)}$$

$$= \cancel{e^{i\theta q_n}}\hat{\varphi}_n^\dagger \cdot \cancel{e^{-i\theta q_n}}\hat{\varphi}_n$$

$$\xleftrightarrow{BCH} [\hat{Q},\hat{\varphi}_n^\dagger\hat{\varphi}_n] = [\hat{Q},\hat{\varphi}_n^\dagger]\hat{\varphi}_n + \hat{\varphi}_n^\dagger[\hat{Q},\hat{\varphi}_n]$$

$$= q_n\hat{\varphi}_n^\dagger\hat{\varphi}_n + \hat{\varphi}_n^\dagger(-q_n\hat{\varphi}_n)$$

$$= 0.$$

Esto es cierto en particular para la densidad Hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}(x)$, así que efectivamente tenemos

$$[\hat{Q},\hat{H}]=0 \longleftrightarrow \hat{H} \text{ invariante bajo transformación } \hat{U}_Q(\theta)$$

$$\longleftrightarrow \hat{Q} \text{ se conserva}$$

Hemos visto entonces que $\breve{n}$ debe tener la misma masa que n pero la carga (de cualquier tipo conservada) opuesta, es decir, ¡$\breve{n}$ es la antipartícula de n (y viceversa), $\breve{n}\equiv\bar{n}$!

El operador de campo $\hat{\varphi}_n(x)$ está asociado a la vez a una partícula y a su antipartícula correspondiente.

Notemos que un caso particular sería $n=\bar{n}$ (una partícula que es su propia antipartícula), donde necesariamente se tiene $q_n = 0$, y el operador de campo $\hat{\varphi}_n(x) = \hat{\phi}_n(x) + \hat{\phi}_n^\dagger(x)$ es hermitiano (como correspondería a una observable).

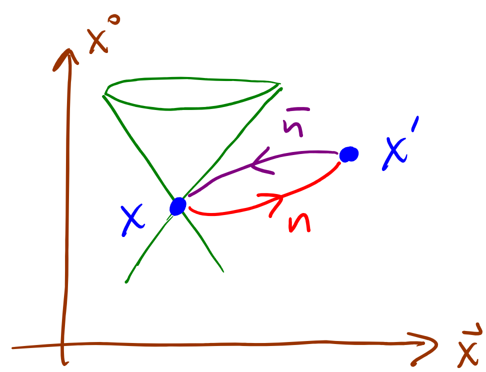
Es interesante notar que la microcausalidad se preserva porque

números

$(x'-x)^2<0$

$$[\underbrace{\hat{\varphi}_n(x')}_{\hat{\phi}_n(x')+\hat{\phi}^\dagger_{\bar{n}}(x')}, \hat{\varphi}_n^\dagger(x)] = \underbrace{[\hat{\phi}_n(x'), \hat{\phi}_n^\dagger(x)]}_{\substack{\langle 0|\hat{\phi}_n(x')\hat{\phi}_n^\dagger(x)|0\rangle \\ =\langle x'n|xn\rangle}} - \underbrace{[\hat{\phi}_{\bar{n}}(x), \hat{\phi}_{\bar{n}}^\dagger(x')]}_{\substack{\langle 0|\hat{\phi}_{\bar{n}}(x)\hat{\phi}_{\bar{n}}^\dagger(x')|0\rangle \\ =\langle x\bar{n}|x'\bar{n}\rangle}} = 0 \,,$$

es decir, gracias a una cancelación entre la amplitud de propagación de una partícula de x a x' y la de una antipartícula de x' a x.



Así que la existencia de antipartículas, que al principio del curso parecía poner en peligro la causalidad, ¡es precisamente la que hace posible preservarla!

pp. 20-23

Notemos por cierto que el propagador de Feynman, que incluye las amplitudes de propagación de la partícula y la antipartícula (eligiendo entre ambas según el orden temporal) se puede expresar en la forma

$$G(x'-x) \equiv \Theta(x'^0-x^0)\underbrace{\langle x'n|xn\rangle}_{\substack{\langle 0|\hat{\phi}_n(x')\hat{\phi}_n^\dagger(x)|0\rangle \\ =\langle 0|\hat{\varphi}_n(x')\hat{\varphi}_n^\dagger(x)|0\rangle}} + \Theta(x^0-x'^0)\underbrace{\langle x\bar{n}|x'\bar{n}\rangle}_{\substack{\langle 0|\hat{\phi}_{\bar{n}}(x)\hat{\phi}_{\bar{n}}^\dagger(x')|0\rangle \\ =\langle 0|\hat{\varphi}_n^\dagger(x)\hat{\varphi}_n(x')|0\rangle}} \qquad (p.\ 20)$$

$$\hat{\varphi}_n = \hat{\phi}_n + \hat{\phi}_{\bar{n}}^\dagger$$

$$\hat{\varphi}_n^\dagger = \hat{\phi}_n^\dagger + \hat{\phi}_{\bar{n}}$$

$$\boxed{G(x'-x) \equiv \langle 0|T\{\hat{\varphi}_n(x')\hat{\varphi}_n^\dagger(x)\}|0\rangle}$$

orden temporal: tiempos aumentan hacia la izquierda

Igualmente podemos calcular el conmutador

$$[\hat{\varphi}_n(x'),\hat{\varphi}_n^\dagger(x)] = [\hat{\phi}_n(x'),\hat{\phi}_n^\dagger(x)] + [\hat{\phi}_{\bar{n}}^\dagger(x'),\hat{\phi}_{\bar{n}}(x)]$$

$$= \langle x'n|xn\rangle - \langle x\bar{n}|x'\bar{n}\rangle$$

por construcción

$$\overset{p.12}{=} \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}}{2E_{\vec{p}}}\left(e^{iE_{\vec{p}}(t'-t)} - e^{-iE_{\vec{p}}(t'-t)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x-x')^2<0 \\ \text{finito} & \text{si } (x-x')^2 \geq 0 \end{cases}.$$

En resumen, utilizando el lenguaje de operadores de campo, hemos visto que la condición de causalidad (9) en presencia de interacciones implica:

← p. 136

i) La existencia de una antipartícula para cada partícula (descritas ambas por el mismo operador de campo $\hat{\varphi}(x)$)

ii) Procesos de creación/aniquilación de partículas y antipartículas (NO necesariamente pares correspondientes al mismo campo — p.ej. $\hat{\varphi}_1^\dagger \hat{\varphi}_2^\dagger \hat{\varphi}_3 +$ conjugado hermitiano $= \underbrace{\hat{\phi}_1^\dagger \hat{\phi}_2^\dagger \hat{\phi}_3}_{\Rightarrow 3 \to 1+2} + \ldots$)

iii) Una conexión entre el espín y la estadística: las partículas con $j=0$ deben ser bosones.

Ahora, si bien la causalidad permitiría que $\hat{\mathcal{H}}$ fuera cualquier función del campo, y la unitariedad requiere solamente que sea hermitiana, para tener covariancia bajo Poincaré debemos asegurarnos de que $\hat{H} = \int d^3x\, \hat{\mathcal{H}}(x)$ transforme como debe hacerlo $\hat{P}^0$, la componente temporal de un vector (lo cual como veremos más adelante, equivale a pedir que $\hat{\mathcal{H}}(x)$ transforme como la componente 00 de un tensor de rango (1,1) — el tensor de energía-momento $\hat{T}^0{}_0(x)$).

Nos interesa entonces tener clara la manera en que el operador de campo $\hat{\varphi}(x)$ transforma bajo Poincaré

Para partículas con $j=0$, hemos visto que (p. 120)

$$\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda},a)\,\hat{a}_{pn}\,\hat{U}^{-1}(\underset{\sim}{\Lambda},a) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p n}}{E_{pn}}}\,\exp(-ia_\mu \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\,\hat{a}_{\Lambda p n}$$

desde ahora dejaremos de usar barra para cuadrivectores

de donde se sigue que

$$\underbrace{\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda},a)\hat{\varphi}_n(x)\hat{U}^{-1}(\underset{\sim}{\Lambda},a)}_{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{pn}}}\left(\hat{a}_{pn}e^{-ip\cdot x}+\hat{a}^\dagger_{p\bar{n}}e^{ip\cdot x}\right)} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{pn}}}\sqrt{\frac{E_{\Lambda pn}}{E_{pn}}}\left(e^{-ip\cdot x-i\Lambda p\cdot a}\,\hat{a}_{\Lambda pn} + e^{ip\cdot x+i\Lambda p\cdot a}\,\hat{a}^\dagger_{\Lambda p\bar{n}}\right)$$

Cambiando la variable de integración $p\to p'=\Lambda p$ y usando que $d^3p/E_{pn} = d^3p'/E_{p'n}$ (p. 14), esto es

$$\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda},a)\hat{\varphi}_n(x)\hat{U}^{-1}(\underset{\sim}{\Lambda},a) = \int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}}\left(e^{-i\Lambda^{-1}p'\cdot x-ip'\cdot a}\,\hat{a}_{p'n} + e^{i\Lambda^{-1}p'\cdot x+ip'\cdot a}\,\hat{a}^\dagger_{p'\bar{n}}\right),$$

y usando por último que

$$p^{\mu}x_{\mu} = \underbrace{(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu}}_{\Lambda_{\nu}{}^{\mu}\ \text{p.34}} p'^{\nu}x_{\mu} = p'^{\nu}x'_{\nu}\ , \text{ donde } x'^{\mu} \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu},$$

por el momento, no apli camos todavía la traslación

concluimos finalmente que

$$\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda},a)\hat{\varphi}_n(x)\hat{U}^{-1}(\underset{\sim}{\Lambda},a) = \int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}}\left(e^{-ip'\cdot(x'+a)}\hat{a}_{p'n} + e^{ip'\cdot(x'+a)}\hat{a}^{\dagger}_{p'\bar{n}}\right)$$

$$\boxed{\underbrace{\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda},a)\hat{\varphi}_n(x)\hat{U}^{-1}(\underset{\sim}{\Lambda},a)}_{\equiv\hat{\varphi}'_n(x)} = \underbrace{\hat{\varphi}_n(\Lambda x+a)}_{\equiv\hat{\varphi}_n(x')}}\,.$$

nombres parecen al revés, igual que en p. 63

Es decir, el nuevo (operador de) campo, evaluado en el nuevo punto, coincide con el viejo (operador de) campo en el viejo punto: el campo es un escalar bajo Poincaré.

Para $j>0$, la situación se complica por las matrices $D_{\lambda'\lambda}(\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{\Lambda},p))$ que aparecen en la regla de transformación de $\hat{a}_{p\lambda n}$. Solo tendremos un campo que transforma de manera sencilla bajo Poincaré si escogemos con cuidado los coeficientes de $\hat{a}_{p\lambda n}$ y $\hat{a}^{\dagger}_{p\lambda n}$,

$$\hat{\varphi}_{\ell n}(x) \equiv \sum_{\lambda}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{pn}}}\left(u_{\ell p\lambda n}e^{-ip\cdot x}\hat{a}_{p\lambda n} + v_{\ell p\lambda n}e^{ip\cdot x}\hat{a}^{\dagger}_{p\lambda\bar{n}}\right),$$

campo con varias componentes $\ell=1,\dots,L$

de tal manera que nuestro campo transforme de manera bien definida (y sencilla) bajo Lorentz / Poincaré :

$$\boxed{\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda}, a)\,\hat{\varphi}_{ln}(x)\,\hat{U}^{-1}(\underset{\sim}{\Lambda}, a) = \sum_{l'} M_{ll'}(\underset{\sim}{\Lambda}^{-1})\,\hat{\varphi}_{l'n}(\Lambda x + a),}$$

donde las matrices $M(\underset{\sim}{\Lambda})$ dan una rep del grupo de Lorentz (a diferencia de las $D_{\lambda'\lambda}(\underset{\sim}{W})$, que constituyen una rep solo del grupito $SO(3,1)|_{p_r}$, y en general son por lo tanto matrices de menor dimensión: $2j+1 \leq L$).

Con tales $\hat{\varphi}_{ln}(x)$, podremos construir una densidad Hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}(x)$ que transforme de manera apropiada (o, más fácil, una densidad Lagrangiana $\hat{\mathcal{L}}(x)$ que sea escalar bajo Poincaré). Más adelante veremos en detalle los casos $j=1/2$ y $j=1$, que corresponden respectivamente a un campo espinorial y a un campo vectorial.

Cualquier tipo de partícula relativista cuántica tiene entonces un operador de campo asociado, $\hat{\varphi}_{ln}(x)$. En el límite clásico, este operador se reduce a un campo clásico, $\varphi_{ln}(x)$.

Vale la pena tratar de resumir en un diagrama la lógica que hasta ahora hemos seguido en este curso:

1

Partícula ($E \geq 0$)

+ Mecánica Cuántica

Propagación incluso fuera del cono de luz

+ Relatividad Especial

Antipartículas, ~Creación/aniquilación

¿Causalidad?

¿Interacciones?

+ Relatividad Especial

1 partícula: $|p\lambda n\rangle$

Irrep unitaria de Poincaré(3,1)

¿Más de 1 partícula?

Espacio de Fock:

estados asintóticos

$\{|p_1\lambda_1 n_1; \dots; p_N\lambda_N n_N\rangle \ \forall N \geq 0\}$

¿Operadores?

(Weinberg usa 'ppio. de descomposición por cúmulos')

$\hat{a}_{p\lambda n}$, $\hat{a}^{\dagger}_{p\lambda n}$

¿Espacio de posición?

¿Interacciones?

$\hat{\phi}_n(x)$, $\hat{\phi}^{\dagger}_n(x)$ $\xrightarrow[c \to \infty]{}$ Mecánica Cuántica NO Relativista

¿Causalidad?

$\hat{\varphi}_n(x) \Longrightarrow$ {Antipartículas, Creación / Aniquilación, Espín-estadística}

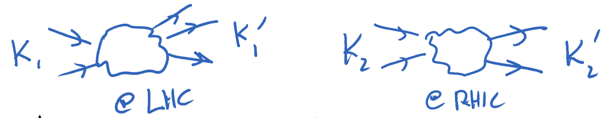
$\hbar \to 0$

Campo clásico $\varphi_n(x)$

2

Esta segunda columna también puede ser recorrida en sentido inverso, cuantizando un campo clásico (enfoque usual)

P.ej.



Para motivar el uso de operadores de creación y aniquilación $\hat{a}^\dagger_{p\lambda n}$, $\hat{a}_{p\lambda n}$, Weinberg enfatiza la importancia del principio de descomposición por cúmulos ("cluster decomposition principle"), que básicamente afirma que los resultados de 2 o más experimentos realizados en lugares suficientemente alejados deben ser independientes.

Más concretamente, en términos de la matriz de dispersión $S_{k_1' \cdots k_{N'}';\, k_1 \cdots k_N} \equiv \langle k_1', \ldots, k_{N'}'; - \mid k_1, \ldots, k_N; + \rangle$, el principio de descomposición por cúmulos afirma que el resultado para 2 experimentos de dispersión distantes debe factorizarse:

$p_N \lambda_N n_N$

$$\boxed{S_{K_1' K_2';\, K_1 K_2} \to S_{K_1';\, K_1} S_{K_2';\, K_2}}$$

los K se refieren a colecciones de partículas: $K_1 \equiv k_1, k_2, \cdots, k_{N_1}$, etc.

(Esto equivale a decir que la "parte conexa" de S para partículas distantes debe anularse, es decir, tales partículas no se pelan.)

Se puede mostrar [ver Weinberg 4.4] que los Hamiltonianos que respetan este principio pueden escribirse como sumas de productos de $\hat{a}$'s y $\hat{a}^\dagger$'s, con coeficientes que contienen solo una delta de Dirac (que refleja la conservación del momento total, $\delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N - \vec{p}_1{}' - \vec{p}_2{}' - \ldots - \vec{p}_{N'}{}')$).

jueves, 20 de septiembre de 2007 11:34 p.m.

Entendemos entonces finalmente por qué hablamos de campos: con ello obtenemos un formalismo extremadamente útil para resumir la física que resulta de combinar la noción de partícula con la mecánica cuántica y la relatividad especial. Este es el lenguaje que usaremos en el resto del curso, siguiendo la ruta 2. Pero, antes de finalizar con esta discusión, vale la pena hacer 2 comentarios adicionales:

i) Ciertamente es posible hablar de esta misma física sin utilizar el lenguaje de campos. Es decir, en lugar de seguir el camino 2, cuantizando campos ('segunda cuantización'), podemos simplemente insistir en estudiar la evolución cuántica de partículas, siguiendo el camino 1 ('primera cuantización'). (Esto resulta particularmente intuitivo en el método de cuantización por integral de trayectoria.) Este, de hecho, fue el enfoque utilizado por Feynman (en realidad usó un enfoque mixto: electrones como partículas interactuando a través del campo electromagnético). Así que es posible desarrollar las 'reglas de Feynman' para agregar interacciones sin pensar en campos [ver Bjorken y Drell, vol. 1]. Pero este método resulta ser en general menos poderoso: hay que inventar las interacciones muy a mano (verificando después también a mano que se respeten las condiciones de causalidad y unitariedad), y la descripción es puramente perturbativa: da una buena aproximación cuando las interacciones son débiles, pero no captura toda la física del sistema —existen efectos 'no perturbativos'—, y es completamente inútil cuando las interacciones se vuelven fuertes. (A pesar de todo esto, cabe destacar que el camino ① facilita algunos cálculos en la práctica [ver, p.ej., Schubert, hep-th/0101036].) En cualquier caso, como iremos aprendiendo en este curso, ¡el concepto de campo resultará más fundamental que el de partícula!

ii) NO sería del todo preciso decir que el formalismo de campos es la única manera de combinar a la mecánica cuántica con la relatividad especial: si no estamos casados con la noción de partícula, entonces podemos formular la teoría de cuerdas (que logra incluso incorporar a la relatividad general). Pero a bajas energías o, lo que es lo mismo, a grandes distancias, incluso la teoría de cuerdas se reduce a la teoría de campos ($\leftrightarrow$ partículas). Así que, independientemente de cuál resulte ser la 'teoría última', el lenguaje de la teoría cuántica de campos será para siempre parte de nuestra descripción de la naturaleza, que es cuántica, relativista y compuesta de ingredientes 'básicos' que, al menos en cierto rango de distancias, parecen partículas.

14:07/09/22

2. Campo Escalar Libre

Basándonos en lo que hasta ahora hemos aprendido, en el resto del curso tomaremos el punto de vista de que el sistema físico que nos interesa estudiar es un campo cuántico relativista. Empezaremos analizando a un campo clásico.

Por definición, un campo es una propiedad del universo que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante del tiempo:

$$\underbrace{\varphi(t,\vec{x})}_{\text{lo escribimos así}} \longleftrightarrow \overbrace{\varphi_{\vec{x}}(t)}^{\text{lo pensamos así}},$$

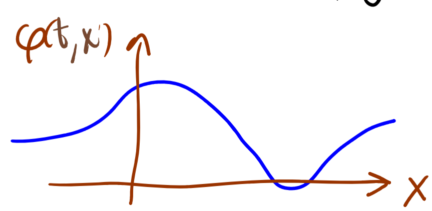
↑ índice continuo $\in \mathbb{R}^3$

análogo a $x_n(t)$ en sistema con N partículas.

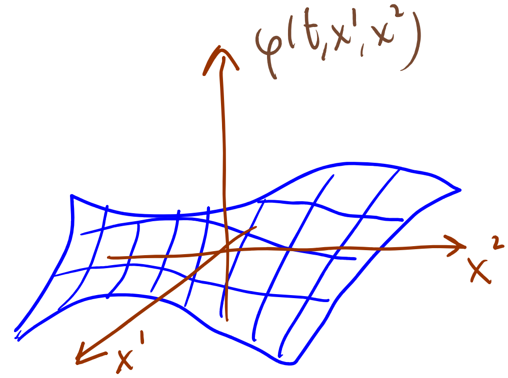
↑ índice discreto $n=1,\ldots,N$

Un 'campo' en $0+1$ dimensiones $\varphi(t)$ sería exactamente análogo a un sistema de 1 partícula que se mueve en 1 dim, $y(t)$.

Un campo en $1+1$ dim $\varphi_x(t)$ es exactamente análogo a una cuerda que puede oscilar en 1 dim transversa, $y(t,x)$.



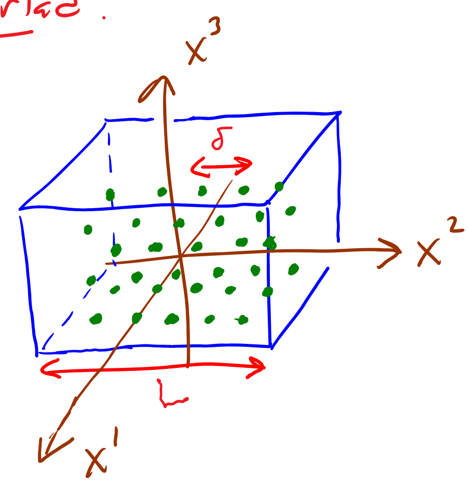
Un campo en 2+1 dimensiones $\varphi(t,x^1,x^2)$ es exactamente análogo a la membrana de un tambor, que oscila en 1 dim transversa, $y(t,x^1,x^2)$.



Un campo en 3+1 dim $\varphi(t,\vec{x})$ es entonces análogo a 1 gelatina/jalea que llena 3 dim espaciales y oscila en 1 dim transversa, $y(t,\vec{x})$. Ejemplos sencillos serían los campos que describen a la temperatura o la presión o la densidad o la velocidad del aire en un cuarto.

A partir de la definición, vemos que cualquier campo (en d+1 dim con $d \geq 1$) es un sistema con un número infinito (y no denumerable) de grados de libertad. ← uno/vector en cada $\vec{x}$

Se le puede pensar como el límite $L \to \infty, \delta \to 0$ del caso con un volumen finito L^3 ← ó d en un espacio discretizado con espaciamiento δ, sistema que tendría $(L/\delta)^3$ ← d grados de libertad.



(De hecho, esta perspectiva se utiliza para hacer cálculos numéricos en el caso de la interacción fuerte —empresa conocida como 'QCD en la retícula' (lattice QCD).)

En este curso nos interesa estudiar campos relativistas $\varphi_\ell(t,\vec{x}) \equiv \varphi_\ell(x)$ $(\ell = 1, \ldots, L)$, que transforman de manera definida bajo Poincaré:

número finito

rep de Lorentz no unitaria ← a diferencia de $\hat{U}(\Lambda)$, NO actúa sobre estados

$$x \longrightarrow x' = \Lambda x + a \quad \Longrightarrow \quad \varphi'_{\ell'}(x') = \sum_{\ell=1}^{L} M_{\ell'\ell}(\underset{\sim}{\Lambda})\varphi_\ell(x) .$$

En las próximas semanas analizaremos detenidamente el caso más sencillo: un campo escalar, $\varphi(x)$, tal que

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \qquad (\text{es decir, } L = 1,\ M(\underset{\sim}{\Lambda}) = 1).$$

rep trivial

Conviene tomar como punto de partida la descripción Lagrangiana de la dinámica. La cantidad fundamental es entonces la acción $S[\varphi] \equiv \int dt\, L[\varphi(t)]$,

Lagrangiano
~ energía cinética − potencial

donde estamos usando corchetes para indicar que tanto S como L son 'funcionales' —es decir, mapeos de funciones a números: para determinar L hace falta conocer $\varphi(t,\vec{x})$ $\forall$ $\vec{x}$ a un t dado; para calcular S se necesita conocer $\varphi(t,\vec{x})$ $\forall\, t,\vec{x}$.

Nos interesa formular teorías locales, donde la evolución dinámica del campo en un punto espaciotemporal dado depende solo del valor del campo en puntos vecinos, requisito que descarta la acción a distancia y está por tanto estrechamente vinculado con el de causalidad. Podemos escribir entonces

∂_t y $\vec{\nabla}$ juntas, por covariancia bajo Lorentz

$$L[\varphi(t)] \equiv \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x), \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\varphi(x), \ldots, \partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_D}\varphi(x))$$

omitimos variables que no tienen un valor fijo

Densidad Lagrangiana

Número finito de derivadas

(a diferencia de, p.ej., $L[\varphi(t)] = \int d^3x\, d^3x'\, \mathcal{L}(\varphi(t,\vec{x}), \varphi(t,\vec{x}\,'))$, que es no local y podría reescribirse en términos de una densidad Lagrangiana que depende de un número infinito de derivadas de $\varphi(x)$, definiendo $y \equiv x' - x$ y tomando

$$\mathcal{L} = \int d^3y\, \mathcal{L}(\varphi(x), \varphi(x) + y^\mu\partial_\mu\varphi(x) + \tfrac{1}{2!}\, y^\mu y^\nu \partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) + \ldots)).$$

Con $D=0$, tendríamos una teoría ultralocal, donde la evolución en cada $\vec{x}$ es independiente. (Semejante sistema sería análogo no a una gelatina, sino a polvo.)

El caso más común es $D=1$, que conduce a ecuaciones de movimiento con segundas derivadas $\partial_t^2\varphi$, $\partial_x^2\varphi$, para las cuales es preciso por tanto especificar condiciones iniciales sobre $\varphi(t,\vec{x})$ y $\partial_t\varphi(t,\vec{x})$. Tenemos entonces

$$\boxed{S[\varphi] = \int d^4x\ \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))},$$

← $\mathcal{L}$ es función ordinaria (No funcional) de 5 argumentos

que será invariante bajo Poincaré si la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ es también invariante (condición más fácil que pedir que $H=\int d^3x\ \mathcal{H}(x)$ transforme como la componente 0 de un cuadrivector). Notar que $L=L[\varphi(t),\dot{\varphi}(t)]$, $S=S[\varphi]$.

Justo como en el caso de un sistema con un número finito de grados de libertad, las ecs. de mov. para el campo $\varphi(x)$ se deducen a partir del principio variacional — las soluciones clásicas $\varphi_{cl}(x)$ serán aquellas configuraciones donde la acción es estacionaria:

$$\varphi_{cl}(x) \longrightarrow \varphi_{cl}(x)+\delta\varphi(x) \Rightarrow S[\varphi_{cl}] \longrightarrow S[\varphi_{cl}+\delta\varphi] \equiv S[\varphi_{cl}]+\delta S[\varphi_{cl},\delta\varphi]$$

con $\delta S[\varphi_{cl},\delta\varphi]=0$ para cualquier variación $\delta\varphi(x)$ que satisface condiciones de borde apropiadas en la frontera de la región de integración (normalmente $\int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x$, quizás también con $t_i \to -\infty$, $t_f = +\infty$).

Dado que

$$\varphi(x) \to \varphi(x) + \delta\varphi(x) \Longrightarrow \partial_\mu \varphi(x) \to \partial_\mu \varphi(x) + \underbrace{\partial_\mu \delta\varphi(x)}_{\equiv \delta(\partial_\mu \varphi(x))},$$

vemos que

$$\delta S[\varphi, \delta\varphi] \equiv S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi]$$

$$= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\varphi(x) + \delta\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x) + \partial_\mu \delta\varphi(x)) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \right\}$$

suma sobre $\mu = 0,1,2,3$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \delta\varphi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi(x))} \partial_\mu \delta\varphi(x) \right\}$$

$$\overset{\text{partes}}{=} \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi(x))} \right) \right\} \delta\varphi(x),$$

← en condiciones de borde tales que el término de superficie se anula

expresión que se anula para $\delta\varphi(x)$ arbitrario solo si se satisface la ec. de mov.

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi(x))} \right)}$$

Ecuación de Euler-Lagrange

L12: 27/02/17