En particular, tomando $(\underset{\sim}{\Lambda}, a) = (\underset{\sim}{\mathbb{1}}, (t, \vec{0}))$ esto dice que

$$\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\lambda n}(t) \equiv \exp(i\hat{H}t)\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\lambda n}\exp(-i\hat{H}t) = \exp(iE_{\vec{p}}t)\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\lambda n}$$

$$\left(\longleftrightarrow \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}(t) \equiv \exp(i\hat{H}t)\,\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}\exp(-i\hat{H}t) = \exp(-iE_{\vec{p}}t)\,\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}\right),$$

resultado que codifica la evolución temporal de los operadores de creación/aniquilación en el cuadro de Heisenberg (y que por supuesto es posible también obtener usando

$$\hat{H} = \sum_{n,\lambda}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\lambda n}\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}$$

y la identidad de BCH).

A partir de nuestra definición de partícula como una irrep de Poincaré(3,1), ha resultado natural hasta ahora trabajar con una descripción en el espacio de momentos. Por otro lado, las interacciones normalmente se especifican en primera instancia en el espacio de posiciones, así que nos conviene también desarrollar aquí el lenguaje correspondiente. Por simplicidad, consideremos por ahora solo el caso de una partícula escalar $(j=0)$, donde la etiqueta $\lambda=0$ es innecesaria.

Pasando del espacio de momentos al de posiciones, definimos el operador de campo

$$\underbrace{\hat{\phi}^\dagger_n(t,\vec{x})}_{x^\mu} \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \underbrace{e^{\overbrace{iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}^{\leftarrow\, ip\cdot x}} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}n}}_{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}n}(t)}$$

Incluye fase temporal de $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}n}(t)$, y Fourier habitual de $\vec{p}$ a $\vec{x}$

por convención para $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}n}$

y con ello su adjunto

$$\boxed{\hat{\phi}_n(t,\vec{x}) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{\overbrace{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}}^{-ip\cdot x}} \hat{a}_{\vec{p}n}}\,.$$

$$\underbrace{e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}n}}_{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\hat{a}_{\vec{p}n}(t)}$$

Llamamos a estos operadores 'de campo' simplemente porque (en física) campo $\equiv$ función de la posición en el espaciotiempo, así que $\hat{\phi}_n(t,\vec{x})$ es un campo valuado en operadores.

Claramente pretendemos interpretar físicamente a $\hat{\phi}^\dagger_n(x)$ ($\hat{\phi}_n(x)$) como un operador que crea (aniquila) una partícula del tipo $n$ en la posición $\vec{x}$ al tiempo $t$. Esto será exactamente cierto en el caso de partículas libres. Pero en el caso con interacciones, donde hasta ahora solo hemos definido $\hat{a}$'s y $\hat{a}^\dagger$'s para los estados entrantes o salientes, la interpretación de $\hat{\phi}^\dagger_n(t,\vec{x})$ (y $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}n}(t)$ ) como operador que crea una partícula solo aplicaría si $t\to\mp\infty$, respectivamente.

L10: 27/08/18

Restringiéndonos momentáneamente al caso libre, podemos verificar que los estados de 1 partícula

$$|xn\rangle \equiv \hat{\phi}^\dagger_n(x)|0\rangle$$

tienen traslape

$$\langle x'n'|xn\rangle = \langle \hat{\phi}^\dagger_{n'}(x')0|\hat{\phi}^\dagger_n(x)0\rangle$$

$$= \langle 0|\hat{\phi}_{n'}(x')\hat{\phi}^\dagger_n(x)|0\rangle$$

$$= \int\frac{d^3p'd^3p}{(2\pi)^6\sqrt{2E_{\vec{p}'}2E_{\vec{p}}}}\, e^{-ip'\cdot x'+ip\cdot x}\underbrace{\langle 0|\hat{a}_{\vec{p}'n'}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}n}|0\rangle}_{\langle 0|[\hat{a}_{\vec{p}'n'},\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}n}]_\mp|0\rangle}$$

$$= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}'-\vec{p})\,\delta_{nn'}$$

p. 116

$$= \delta_{nn'}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}\, e^{-ip\cdot(x'-x)},$$

amplitud que efectivamente coincide con el propagador de una partícula libre (ver p. 12). ✓

sólo de partícula, No prop de Feynman

De la misma cuenta podemos deducir las relaciones de (anti)conmutación de nuestros operadores de campo:

$$\underbrace{\left[\hat\phi_{n'}(x'),\hat\phi^\dagger_n(x)\right]_\mp}_{\text{esto es un número (porque } [\hat a_{\vec p' n'},\, \hat a^\dagger_{\vec p n}] \text{ es un número)}} = \langle 0|\left[\hat\phi_{n'}(x'),\hat\phi^\dagger_n(x)\right]_\mp|0\rangle$$

$$= \langle 0|\hat\phi_{n'}(x')\,\hat\phi^\dagger_n(x)|0\rangle \mp \cancelto{0}{\langle 0|\hat\phi^\dagger_n(x)\,\hat\phi_{n'}(x')|0\rangle}$$

$$= \langle x' n' | x n\rangle$$

$$= \delta_{nn'}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec p}}\,e^{-ip\cdot(x'-x)}.$$

Para entender mejor la manera en que este lenguaje de operadores de campo/creación/aniquilación se relaciona con el formalismo usual que aprendimos en el caso no relativista, y también para visualizar mejor el modo en que más adelante describiremos las interacciones en el caso relativista, nos conviene hacer una pausa aquí para estudiar primero el límite no relativista.

Tomemos entonces el límite donde la velocidad de la luz $c \to \infty$, lo cual implica que

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{(\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2} \xrightarrow[c\to\infty]{} mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} .$$

Para absorber la fase asociada a la (enorme) energía en reposo de la partícula, nos conviene definir (omitiendo por simplicidad la etiqueta n )

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}$$

$$\hat{\phi}_{NR}(t,\vec{x}) \equiv \lim_{c\to\infty} \sqrt{2mc^2}\, e^{imc^2 t} \hat{\phi}(x)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip\cdot x} \hat{a}_{\vec{p}} \Bigg|_{p^0 = E^{NR}_{\vec{p}} \equiv \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}} ,$$

$$\longleftrightarrow \quad \hat{\phi}^{\dagger}_{NR}(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip\cdot x} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}} \Bigg|_{p^0 = E^{NR}_{\vec{p}}} .$$

Podemos entonces calcular

$$[\hat{\phi}_{NR}(t',\vec{x}'), \hat{\phi}^{\dagger}_{NR}(t,\vec{x})]_{\mp} = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip'\cdot x' + ip\cdot x} \underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}'}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}]_{\mp}}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}'-\vec{p})}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip\cdot(x'-x)} ,$$

que, como era de esperarse, coincide con el propagador de la partícula no relativista (ver p. 12):

$$ {}_{NR}\langle t', \vec{x}' | t, \vec{x} \rangle_{NR} \equiv \langle 0 | \hat{\phi}_{NR}(t', \vec{x}') \hat{\phi}^{\dagger}_{NR}(t, \vec{x}) | 0 \rangle $$

$$ = \langle 0 | [ \hat{\phi}_{NR}(t', \vec{x}'), \hat{\phi}^{\dagger}_{NR}(t, \vec{x}) ]_{\mp} | 0 \rangle $$

$$ = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i \frac{\vec{p}^2}{2m}(t'-t) + i \vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} . $$

Notemos que a tiempos iguales, esto implica que

$$ [\hat{\phi}_{NR}(t, \vec{x}'), \hat{\phi}^{\dagger}_{NR}(t, \vec{x})]_{\mp} = {}_{NR}\langle t, \vec{x}' | t, \vec{x} \rangle_{NR} = \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}) . $$

Ya que la covariancia de Lorentz es irrelevante en el caso no relativista, conviene regresar al cuadro de Schrödinger (usando $\hat{O}_S \equiv \hat{O}_H(t=0)$, $|\psi, t\rangle_S \equiv e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_H$ ), reemplazando

$$ \hat{\phi}_{NR}(t, \vec{x}) \longrightarrow \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}) \equiv \hat{\phi}_{NR}(t=0, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}} . $$

Heisenberg    Schrödinger

Sabemos que los estados

$$ |\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N\rangle_{NR} \equiv \hat{\phi}^{\dagger}_{NR}(\vec{x}_1) \cdots \hat{\phi}^{\dagger}_{NR}(\vec{x}_N) |0\rangle $$

simétrico o antisimétrico bajo el intercambio de bosones o fermiones

nos dan una base para el espacio de Hilbert de $N$ partículas, y podemos notar que el traslape

$${}_{NR}\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_N | \psi, t\rangle \equiv \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_N, t)$$

no es otra cosa que la función de onda usual para un sistema de N partículas. Es interesante destacar aquí que, gracias a que los operadores de campo $\hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}_r)$ (anti)conmutan entre sí en el caso de partículas bosónicas (fermiónicas), esta función de onda $\psi(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N)$ es automáticamente (anti)simétrica bajo el intercambio de partículas:

conmutan / anticonmutan para bosones / fermiones

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_N, t) \equiv \langle \hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}_1)\hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}_2)\cdots\hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}_N) 0 | \psi, t\rangle = \pm\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N, t)$$

¡En este lenguaje no hace ya falta considerar, p.ej., la dichosa 'determinante de Slater'! Con esta razón basta para entender porqué el formalismo de operadores de creación/aniquilación/campo resulta útil en problemas de materia condensada (donde $N \sim 10^{23}$), aún cuando el número de partículas no cambie.

Notemos ahora que el operador de momento en el espacio de Fock,
espacial

$$\hat{\vec{P}} \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \vec{p}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\, \hat{a}_{\vec{p}} \quad ,$$

se puede reescribir en la forma

$$\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \vec{p}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}\hat{a}_{\vec{p}} \overbrace{\int d^3x\, e^{-i(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{x}}}^{(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}'-\vec{p})}$$

$$= \int d^3x \underbrace{\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}}_{\hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x})} \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\vec{p}\, e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\hat{a}_{\vec{p}}}_{\frac{1}{i}\vec{\nabla}_x \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\hat{a}_{\vec{p}}}_{\hat{\phi}_{NR}(\vec{x})}},$$

es decir,

$$\boxed{\hat{\vec{P}} = \int d^3x\, \hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}) \underbrace{\left[-i\vec{\nabla}_x\right]} \hat{\phi}_{NR}(\vec{x})}$$

← ¡Actúa sobre kets con un número arbitrario N de partículas!

Forma familiar del operador de momento cuando actúa sobre funciones de onda de 1 partícula

10:22/02/17

De manera similar, el Hamiltoniano para la partícula libre

$$\boxed{\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} = \int d^3x\, \hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x})\left[-\frac{\vec{\nabla}_x^2}{2m}\right]\hat{\phi}_{NR}(\vec{x})}$$

Hamiltoniano de 1 partícula libre, en espacio de momentos

Hamiltoniano de 1 partícula libre, en espacio de posiciones

Sospecharíamos entonces que, para describir a partículas que interactúan con un potencial externo $V_1(\vec{x})$, el Hamiltoniano en el espacio de Fock deberá tomar la forma (correctamente hermitiana)

$$\hat{H} = \int d^3x \, \hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}) \left[ -\frac{\vec{\nabla}_x^2}{2m} + V_1(\vec{x}) \right] \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}) \equiv \hat{H}_0 + \hat{V}_1$$

Y, efectivamente, usando los 2 resultados

$$\hat{\phi}_{NR}(\vec{x})|0\rangle = 0 \quad \forall \, \vec{x} \implies \langle 0|\hat{H} = \langle \hat{H} 0| = 0$$

y $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]_{\mp} \hat{C} \pm \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}]_{\mp} \implies$

$$[\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}), \hat{H}] = \int d^3x' \left[ \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}), \hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}') \left( -\frac{\vec{\nabla}_{x'}^2}{2m} + V_1(\vec{x}') \right) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}') \right]$$

$$= \int d^3x' \Bigg\{ \underbrace{[\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}), \hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}')]_{\mp}}_{\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \ \text{p.126}} \left( -\frac{\vec{\nabla}_{x'}^2}{2m} + V_1(\vec{x}') \right) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}')$$

$$\pm \hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}') \underbrace{\left[ \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}), \left( -\frac{\vec{\nabla}_{x'}^2}{2m} + V_1(\vec{x}') \right) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}') \right]_{\mp}}_{\left( -\frac{\vec{\nabla}_{x'}^2}{2m} + V_1(\vec{x}') \right) [\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}), \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}')]_{\mp} \to 0} \Bigg\}$$

Las derivadas salen del (anti)conmutador, porque derivar es simplemente restar

$$= \left( -\frac{\vec{\nabla}_x^2}{2m} + V_1(\vec{x}) \right) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}),$$

podemos verificar que

domingo, 16 de septiembre de 2007 09:38 p.m.

daría 0 si actuara a la izq. sobre $\langle 0|$

$$\underbrace{{}_{NR}\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N | }_{{}_{NR}\langle \hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}_1)\cdots\hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}_N) 0|}\hat{H} |\psi, t\rangle = \langle 0| \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_N)\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_{N-1})\cdots \underbrace{\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_1)\hat{H}}_{\hat{H}\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_1) + \underbrace{[\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_1), \hat{H}]}_{\left(-\frac{\vec{\nabla}^2_{x_1}}{2m} + V_1(\vec{x}_1)\right)\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_1)}} |\psi, t\rangle$$

$$= \sum_{r=1}^{N} \langle 0|\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_N)\cdots\left(-\frac{\vec{\nabla}^2_{x_r}}{2m} + V_1(\vec{x}_r)\right)\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_r)\cdots\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_1)|\psi, t\rangle$$

$$= \left\{\sum_{r=1}^{N}\left(-\frac{\vec{\nabla}^2_{x_r}}{2m} + V_1(\vec{x}_r)\right)\right\} \underbrace{{}_{NR}\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N|\psi, t\rangle}_{\psi(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_N, t)},$$

con lo cual vemos que

$$i\partial_t |\psi, t\rangle = \hat{H}|\psi, t\rangle \Longrightarrow {}_{NR}\langle \vec{x}_1, \cdots \vec{x}_N | i\partial_t |\psi, t\rangle = {}_{NR}\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N|\hat{H}|\psi, t\rangle$$

reproduce correctamente la ec. de Schrödinger esperada para el sistema de N partículas,

$$i\partial_t \psi(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N, t) = \underbrace{\left\{\sum_{r=1}^{N}\left(-\frac{\vec{\nabla}^2_{x_r}}{2m} + V_1(\vec{x}_r)\right)\right\}}_{} \psi(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N, t) \quad ✓$$

¡ Logramos reproducir esto con un $\hat{H}$ que NO depende de N !

De esta cuenta podemos notar que el ingrediente en el operador de interacción

$$\hat{V}_1 = \int d^3x \; \hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x})\, V_1(\vec{x})\, \hat{\phi}_{NR}(\vec{x})$$

que hace que el potencial $V_1(\vec{x})$ se acabe evaluando en las posiciones relevantes $\vec{x} = \vec{x}_r$ $(r = 1, 2, \cdots, N)$ es el operador de número en espacio de posición,

$$\hat{N}^{NR}_{\vec{x}} \equiv \hat{\phi}^{\dagger}_{NR}(\vec{x})\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{-i(\vec{p}\,'-\vec{p})\cdot\vec{x}}\, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}\,'}\hat{a}_{\vec{p}} \,,$$

crea anquila

que simplemente cuenta el número de partículas localizadas en $\vec{x}$ (de tal manera que el operador de número total es

$$\hat{N} = \int d^3x\, \hat{N}^{NR}_{\vec{x}} = \int d^3x\, \hat{\phi}^{\dagger}_{NR}(\vec{x})\hat{\phi}_{NR}(\vec{x})$$

$$= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3x\, e^{-i(\vec{p}\,'-\vec{p})\cdot\vec{x}}}_{(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}\,'-\vec{p})} \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}\,'}\hat{a}_{\vec{p}}$$

p. 120

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} \,,$$ como habíamos visto antes).

Habiendo entendido que $\hat{V}_1 = \int d^3x\, V_1(\vec{x})\hat{N}^{NR}_{\vec{x}}$, resulta natural conjeturar que la generalización al caso de interacciones entre pares de partículas descritas por un potencial $V_2(\vec{x},\vec{x}\,')$ involucrará la adición al operador Hamiltoniano de un término del tipo

para no contar doble

$$\hat{V}_2 \sim \frac{1}{2}\int d^3x'\, d^3x\, V_2(\vec{x}\,',\vec{x})\, \hat{N}^{NR}_{\vec{x}\,'}\hat{N}^{NR}_{\vec{x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3x'\, d^3x\, \hat{\phi}^{\dagger}_{NR}(\vec{x}\,')\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}\,')\, V_2(\vec{x}\,',\vec{x})\, \hat{\phi}^{\dagger}_{NR}(\vec{x})\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}) \,.$$

$\hat{V}_2 \sim \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \hat{\phi}^\dagger \phi$

Esto resulta ser esencialmente correcto, salvo por el hecho de que, con los operadores de campo escritos en el orden indicado, $\hat{V}_2$ podría dar una contribución distinta de cero al actuar sobre un estado con solo una partícula.

Para evitar esto, debemos colocar los 2 $\hat{\phi}_{NR}$'s a la derecha. La condición de hermiticidad $\hat{V}_2^\dagger = \hat{V}_2$ requiere entonces que definamos

$$\hat{V}_2 \equiv \int d^3x' \, d^3x \; V_2(\vec{x}', \vec{x}) \underbrace{\hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x}')\hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x})\hat{\phi}_{NR}(\vec{x})\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}')}_{\equiv \hat{N}^{NR}_{\vec{x}', \vec{x}}}$$

← operador que cuenta el número de pares en $(\vec{x}', \vec{x})$

De manera similar a como argumentamos antes, se puede mostrar que tomando $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_2$ se reproduce correctamente la ec. de Schrödinger

$$i\partial_t \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = \left[ \sum_{r=1}^{N} \left( -\frac{\vec{\nabla}^2_{x_r}}{2m} \right) + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{N} V_2(\vec{x}_r, \vec{x}_s) \right] \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t).$$

Claramente, con esta misma lógica podemos agregar igualmente interacciones entre 3 o más partículas, definiendo $\hat{V}_3$, $\hat{V}_4$, etc.

Con todo esto nos debe quedar claro que todo lo que aprendimos en mecánica cuántica no relativista se puede reformular fácilmente (y útilmente) en el lenguaje de operadores de campo que estamos desarrollando en este curso — lenguaje que, por razones históricas, se denomina ocasionalmente 'segunda cuantización'. ←¡pésimo nombre! Esto es así aún cuando el Hamiltoniano en cuestión no induzca transiciones entre estados con distintos números de partículas, y sea posible por tanto, dentro del espacio de Fock, restringir consistentemente nuestra atención al subespacio con N partículas, para un N dado.

Regresemos ahora al caso relativista (y al cuadro de Heisenberg). Una diferencia importante es que ahora (p.124)

$$\underbrace{\left[\hat{\phi}^\dagger(t,\vec{x}\,'),\hat{\phi}(t,\vec{x})\right]_{\mp}}_{\{\text{tiempos iguales}\}} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}\,'-\vec{x})} \neq \delta^{(3)}(\vec{x}\,'-\vec{x})$$

y, relacionado con esto, NO podemos ya identificar a martes, 18 de septiembre de 2007 10:41 p.m.

$\hat{\phi}^\dagger(t,\vec{x})\hat{\phi}(t,\vec{x})$ como el operador de número en el espacio de posición, $\hat{N}_{t\vec{x}}$, puesto que

$$\int d^3x\, \hat{\phi}^\dagger(t,\vec{x})\hat{\phi}(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}\hat{a}_{\vec{p}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}2E_{\vec{p}}}} e^{i(E_{\vec{p}'}-E_{\vec{p}})t} \underbrace{\int d^3x\, e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}}_{(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}$$

se reducía a una cte. en el caso NR

$$\neq \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} \equiv \hat{N}. \qquad (p.120)$$

El factor de $2E_{\vec{p}}$ que nos estorbó aquí puede ser eliminado diferenciando el operador de campo:

$$\hat{\phi}(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-iE_{\vec{p}}t+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\hat{a}_{\vec{p}}$$

$$\Longrightarrow i\partial_t\hat{\phi}(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}}\, e^{-iE_{\vec{p}}t+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\hat{a}_{\vec{p}},$$

de modo que

$$\int d^3x\, \hat{\phi}^\dagger(t,\vec{x})\, i\partial_t\hat{\phi}(t,\vec{x}) = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{E_{\vec{p}'}}}\, e^{i(E_{\vec{p}'}-E_{\vec{p}})t}\underbrace{\int d^3x\, e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}}_{(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}\hat{a}_{\vec{p}}$$

martes, 18 de septiembre de 2007 11:05 p.m.

$$\int d^3x\, \hat{\phi}^\dagger(t,\vec{x})\, i\partial_t \hat{\phi}(t,\vec{x}) = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} = \frac{1}{2}\hat{N}.$$

Se obtiene el mismo resultado al integrar $-i\partial_t\hat{\phi}^\dagger(t,\vec{x})\hat{\phi}(t,\vec{x})$, así que la combinación hermitiana

$$\hat{N}_{t\vec{x}} \equiv i\hat{\phi}^\dagger(t,\vec{x})\,\partial_t\hat{\phi}(t,\vec{x}) - i\,\partial_t\hat{\phi}^\dagger(t,\vec{x})\,\hat{\phi}(t,\vec{x})$$

satisface $\int d^3x\, \hat{N}_{t\vec{x}} = \hat{N}$, y da la impresión de jugar el papel de operador de número en el espacio de posiciones. Por analogía con el caso no relativista, parecería lógico entonces usar a $\hat{N}_{t\vec{x}}$ para agregar interacciones.

Es decir, al Hamiltoniano libre (para espín $j=0$)

$$\hat{H}_0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\vec{p}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}$$

querríamos agregar p.ej. una interacción con un potencial externo $V_1(\vec{x})$,

$$\hat{V}_1 = \int d^3x\, V_1(\vec{x})\, \hat{N}_{t\vec{x}},$$

miércoles, 19 de septiembre de 2007 08:30 a.m.

o entre pares de partículas,

$$\hat{V}_2 \sim \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3x'\; \hat{N}_{t\vec{x}}\, V_2(\vec{x},\vec{x}')\, \hat{N}_{t\vec{x}'} \,.$$

Pero, al menos en este segundo caso, hay un problema: la noción de un 'potencial' que actúa simultáneamente a distancia claramente está en conflicto con la relatividad especial. Para identificar este problema de manera más

2S2: 02/09/22

cuantitativa, notemos que la densidad de energía en $\vec{x}$ al tiempo $t$, que corresponde a un operador $\hat{\mathcal{H}}(t,\vec{x})$ definido por

$$\hat{H} \equiv \int d^3x\; \hat{\mathcal{H}}(t,\vec{x}) \overset{?}{=} \hat{H}_0 + \hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \ldots\,,$$

es una observable. El problema que nos ocupa radica en que, por causalidad, 2 mediciones separadas entre sí por un intervalo tipo espacio (que serían vistas como simultáneas en algún marco de referencia) NO pueden interferir entre sí. Es decir, debemos exigir que

$$\boxed{[\hat{\mathcal{H}}(t,\vec{x}), \hat{\mathcal{H}}(t',\vec{x}')] = 0 \quad \text{si} \quad (x'-x)^2 < 0}\,. \qquad (9)$$

Estos 2 operadores serán entonces simultáneamente diagonalizables (sus autovectores son compatibles), lo cual garantiza que la medición de uno NO afecta el resultado para el otro.

(Como veremos más adelante, esta condición resulta ser necesaria también para que la matriz S sea covariante bajo Lorentz.)

Y desafortunadamente, en el caso relativista

$\equiv i\hat{\phi}^\dagger(t,\vec{x})\partial_t\hat{\phi}(t,\vec{x}) - i\partial_t\hat{\phi}^\dagger(t,\vec{x})\hat{\phi}(t,\vec{x})$

$$[\hat{N}_{t\vec{x}}, \hat{N}_{t'\vec{x}'}] \neq 0 \quad \text{aún cuando} \quad (x'-x)^2 < 0 .$$

(En cualquier caso, $\hat{N}_{t\vec{x}}$ no era exactamente análogo al operador de número no relativista $\hat{N}^{NR}_{\vec{x}} \equiv \hat{\phi}^\dagger_{NR}(\vec{x})\hat{\phi}_{NR}(\vec{x})$, puesto que $[\hat{N}_{t\vec{x}}, \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}'t)] \neq +\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}t)$.)

El problema básico es que, como vimos en la p. 133,

$$[\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\phi}^\dagger(t,\vec{x}')]_{\mp} \neq 0 \quad \text{aún si} \quad \vec{x} \neq \vec{x}' ,$$

resultado que codifica el hecho de que, como vimos al principio del curso, las partículas cuánticas relativistas pueden viajar más rápido que la luz.

Usando a los operadores de campo $\hat{\phi}$ y $\hat{\phi}^\dagger$ como ingredientes básicos, claramente no es trivial entonces construir un operador de densidad de energía $\hat{\mathcal{H}}(t,\vec{x})$ que respete miércoles, 19 de septiembre de 2007 09:07 a.m.

p. 136

la condición de causalidad (9).

Felizmente, se conoce una solución a este problema: usando los operadores $\hat{\phi}_n(x)$ y $\hat{\phi}^\dagger_n(x')$, es posible armar un nuevo operador de campo $\hat{\varphi}_n(x)$ que sí (anti)conmuta con su conjugado hermitiano $\hat{\varphi}^\dagger_n(x')$ en intervalos tipo espacio. Para verificar esto de manera explícita, probemos con la combinación lineal

$$\hat{\varphi}_n(x) \equiv \alpha\hat{\phi}_n(x) + \beta\hat{\phi}^\dagger_{\breve{n}}(x),$$

"breve"

posiblemente $\breve{n} \neq n$, en cuyo caso $\breve{n}$ sería una partícula emparentada de algún modo con $n$

$$\leftrightarrow \quad \hat{\varphi}^\dagger_n(x) \equiv \alpha^*\hat{\phi}^\dagger_n(x) + \beta^*\hat{\phi}_{\breve{n}}(x).$$

(Claramente hubiéramos podido también llamar $\hat{\varphi}^\dagger_{\breve{n}}(x)$ y $\hat{\varphi}_{\breve{n}}(x)$ a estos operadores, respectivamente.)

Tenemos entonces (suponiendo por el momento que $n \neq \breve{n}$)

$$[\hat{\varphi}_n(t,\vec{x}), \hat{\varphi}^\dagger_n(t,\vec{x}')]_\mp = |\alpha|^2 \underbrace{[\hat{\phi}_n(t,\vec{x}), \hat{\phi}^\dagger_n(t,\vec{x}')]_\mp}_{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2+m_n^2}} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}} + |\beta|^2 \underbrace{[\hat{\phi}^\dagger_{\breve{n}}(t,\vec{x}), \hat{\phi}_{\breve{n}}(t,\vec{x}')]_\mp}_{\mp[\hat{\phi}_{\breve{n}}(t,\vec{x}'), \hat{\phi}^\dagger_{\breve{n}}(t,\vec{x})]}$$

(p.124)

para cualquier intervalo tipo espacio, podemos calcular en marco donde eventos son simultáneos es decir,

$$[\hat{\varphi}_n(t,\vec{x}), \hat{\varphi}_n^\dagger(t,\vec{x}')]_{\mp} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( \frac{|\alpha|^2}{2\sqrt{\vec{p}^2+m_n^2}} \underbrace{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}} \mp \frac{|\beta|^2}{2\sqrt{\vec{p}^2+m_{\breve{n}}^2}} \underbrace{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}} \right)$$

par $\to$ $\cos(\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}'))$ $\cos(\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x}))$

impar $\to$ $\cancel{+ i\,\mathrm{sen}(\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}'))} \to 0$ $\cancel{+ i\,\mathrm{sen}(\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x}))} \to 0$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\cos(\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}'))}{2} \left( \frac{|\alpha|^2}{\sqrt{\vec{p}^2+m_n^2}} \mp \frac{|\beta|^2}{\sqrt{\vec{p}^2+m_{\breve{n}}^2}} \right)$$

$$= 0 \text{ si y solo si } \begin{cases} |\alpha|^2 = |\beta|^2 \\ m_n = m_{\breve{n}} \\ n \text{ y } \breve{n} \text{ son bosones} \end{cases}$$

solo posible si existen tales partículas

Para partículas de espín $j=0$, hemos logrado entonces construir los nuevos operadores de campo (normalizando $\alpha = 1 = \beta$)

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\varphi}_n(x) &\equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}n}}} \left( e^{-ip\cdot x} \hat{a}_{\vec{p}n} + e^{ip\cdot x} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}\breve{n}} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}n} \equiv \sqrt{\vec{p}^2+m_n^2}} \\ \hat{\varphi}_n^\dagger(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}n}}} \left( e^{ip\cdot x} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}n} + e^{-ip\cdot x} \hat{a}_{\vec{p}\breve{n}} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}n}} \end{aligned}}$$

que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{\varphi}_n(x), \hat{\varphi}_n(x')] = 0 = [\hat{\varphi}_n^\dagger(x), \hat{\varphi}_n^\dagger(x')] \quad \forall\ x, x'$$

$$\boxed{[\hat{\varphi}_n(x), \hat{\varphi}_n^\dagger(x')] = 0 \quad \forall\ (x'-x)^2 < 0}$$

Condición de Microcausalidad

L'': 29/08/18 L'': 24/02/17

Usando este campo como elemento básico, la densidad Hamiltoniana puede ser cualquier función (hermitiana) $\hat{\mathcal{H}}(\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}^\dagger(x))$, y automáticamente satisfará

p. 136

la condición de causalidad (9), asegurando con ello que las densidades de energía en $x$ y $x'$ se puedan medir de manera independiente si $(x'-x)^2 < 0$. ✓

Ejemplos posibles serían $\hat{\mathcal{H}}(x) = \hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}(x)$ ó $\hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x)$.

Otro ejemplo es el Hamiltoniano libre que ya conocíamos,

$$\hat{H}_0 \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left( \hat{a}^\dagger_{\bar{p}n} \hat{a}_{\bar{p}n} + \hat{a}^\dagger_{\bar{p}\breve{n}} \hat{a}_{\bar{p}\breve{n}} \right)$$

que (salvo una constante) se puede expresar en términos de $\hat{\varphi}_n(x)$ y $\hat{\varphi}_n^\dagger(x)$ en la forma