

Estos números coinciden entre sí solo para $j=0, 1/2$.

Las partículas no masivas en espín $j \geq 1$ son especiales.

Como veremos más adelante, su descripción estará naturalmente asociada a un cierto tipo de redundancia ('invariancia de norma' = de 'calibre' = de 'gauge').

Hemos terminado por fin con la construcción sistemática del espacio de Hilbert de los posibles tipos de partículas cuánticas relativistas. Por supuesto, los estados de una partícula que hemos considerado hasta ahora no nos interesan tanto por sí solos, sino como ingredientes básicos para construir los estados multipartículas que resultan más directamente relevantes para describir a la naturaleza.

Si tenemos un conjunto de partículas idénticas (indistinguibles), la operación de permutarlas entre sí evidentemente será una simetría, así que el espacio de Hilbert en cuestión deberá portar una rep del grupo de permutaciones. Siendo más precisos, las permutaciones expresan no una simetría, sino una redundancia, y los verdaderos estados físicos deben ser invariantes.

La posibilidad más sencilla es que al transponer 2 partículas idénticas, el estado cambie solo por una fase η . Claramente al hacer una misma transposición 2 veces obtenemos la identidad, así que debemos tener $\eta = \pm 1$. El valor de η se conoce como la estadística de las partículas en cuestión; aquellas que tienen $\eta = +1$ se llaman bosones, y aquellas con $\eta = -1$ se conocen como fermiones. Es importante resaltar que, de entrada, la estadística y el espín de una partícula son 2 conceptos totalmente independientes (aunque más adelante encontraremos que, en el contexto de la teoría cuántica de campos, están de hecho íntimamente relacionados). Conviene incorporar a η en nuestra notación, definiendo un ket de N partículas idénticas como automáticamente simétrico o antisimétrico bajo el intercambio de 2 de estas partículas:

Estados multiparticulares
fijilo

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$$

producto directo de espacios vectoriales

$$|\bar{p}_1, \lambda_1; \bar{p}_2, \lambda_2; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[|\bar{p}_1, \lambda_1\rangle \otimes |\bar{p}_2, \lambda_2\rangle \otimes \dots \otimes |\bar{p}_N, \lambda_N\rangle \right]$$

N partículas idénticas

elemento de la base

± 1 para bosones
fermiones

$$+ \eta |\bar{p}_2, \lambda_2\rangle \otimes |\bar{p}_1, \lambda_1\rangle \otimes \dots \otimes |\bar{p}_N, \lambda_N\rangle + \dots]$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi} S_{\pi} |\bar{p}_{\pi(1)}, \lambda_{\pi(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |\bar{p}_{\pi(N)}, \lambda_{\pi(N)}\rangle$$

N! permutaciones

$$\pi: (1, 2, \dots, N) \rightarrow (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(N))$$

$$S_{\pi} \equiv \eta^{\# \text{ de transposiciones en } \pi}$$

Así tenemos, p.ej., $|\bar{p}_1, \lambda_1; \bar{p}_2, \lambda_2; \bar{p}_3, \lambda_3; \dots\rangle = \eta |\bar{p}_2, \lambda_2; \bar{p}_1, \lambda_1; \bar{p}_3, \lambda_3; \dots\rangle$.

Esta definición implica un producto interno $\langle \bar{p}', \lambda' | \bar{p}, \lambda \rangle = 2p^0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\lambda\lambda'}$

$$\langle \bar{p}'_1, \lambda'_1; \dots; \bar{p}'_N, \lambda'_N | \bar{p}_1, \lambda_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N \rangle = \delta_{NN'} \sum_{\pi} S_{\pi} \prod_{I=1}^N (2\pi)^3 2p_I^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\pi(I)} - \vec{p}_I) \delta_{\lambda'_{\pi(I)}, \lambda_I}$$

P.ej.,

$$\langle \bar{p}'_1, \lambda'_1; \bar{p}'_2, \lambda'_2 | \bar{p}_1, \lambda_1; \bar{p}_2, \lambda_2 \rangle = (2\pi)^3 2p_1^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 - \vec{p}_1) \delta_{\lambda'_1, \lambda_1} (2\pi)^3 2p_2^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2) \delta_{\lambda'_2, \lambda_2}$$

$$\pm (2\pi)^3 2p_1^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_2 - \vec{p}_1) \delta_{\lambda'_2, \lambda_1} (2\pi)^3 2p_2^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 - \vec{p}_2) \delta_{\lambda'_1, \lambda_2}$$

LB: 17/62/17

Y también implica una regla de transformación (ver p. 82)
Notar que el valor de \hat{p}^μ es momento total

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) |\bar{p}_1, \lambda_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N\rangle = \exp[i a_\mu \Lambda^\mu_\nu (p_1 + \dots + p_N)^\nu] \\
\cdot \sum_{\lambda'_1, \dots, \lambda'_N} D_{\lambda'_1, \lambda_1}^{[j]}(W(\underline{\Lambda}, \bar{p}_1)) \dots D_{\lambda'_N, \lambda_N}^{[j]}(W(\underline{\Lambda}, \bar{p}_N)) \\
\cdot |\underline{\Lambda} \bar{p}_1, \lambda'_1; \underline{\Lambda} \bar{p}_2, \lambda'_2; \dots; \underline{\Lambda} \bar{p}_N, \lambda'_N\rangle,$$

es decir, cada partícula transforma por separado.

En particular, tomando $(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) = (\underline{1}, (-t, 0, 0, 0))$, tenemos que
 $\exp(-it\hat{H}) |\bar{p}_1, \lambda_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N\rangle = \exp[-it(p_1^0 + \dots + p_N^0)] |\bar{p}_1, \lambda_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N\rangle,$

es decir, nuestro estado con N partículas tiene energía total

$p^0 = p_1^0 + \dots + p_N^0$, lo que implica que estamos hablando de partículas libres, que no se sienten una a la otra!

¿Cómo podremos entonces describir partículas interactuantes? El punto es que, si bien es cierto que en el mundo real las partículas en general no son libres, la situación experimental usual se refiere a un

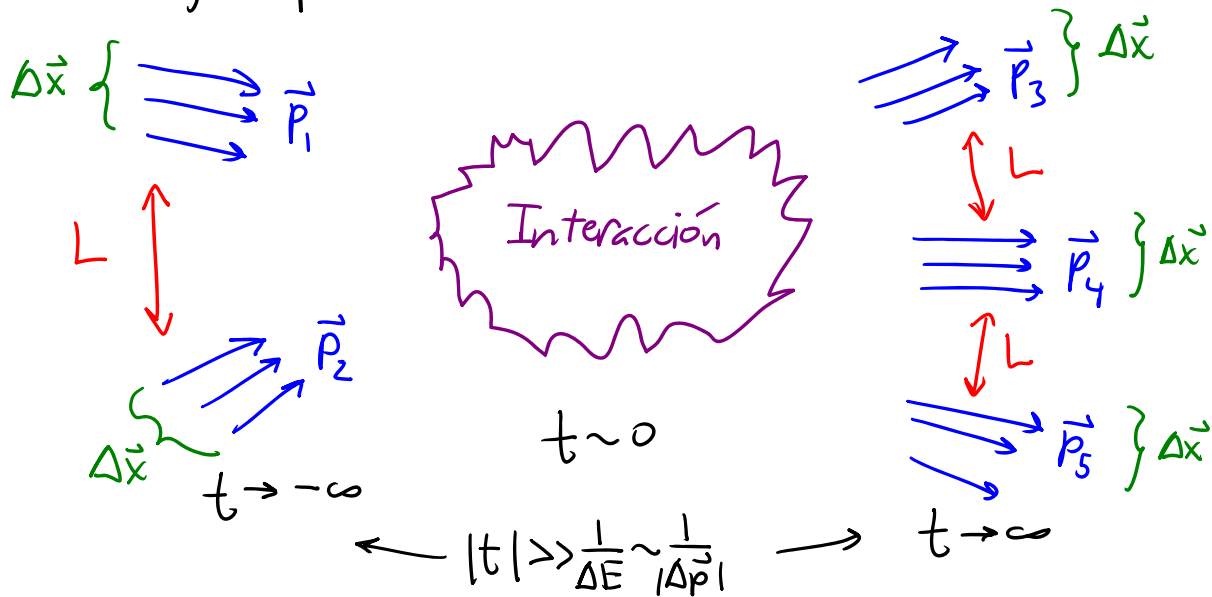
proceso de dispersión, donde un cierto número de partículas se encuentran inicialmente (en " $t \rightarrow -\infty$ ") separadas entre sí por distancias macroscópicas, luego se aproximan e interactúan (en " $t \sim 0$ "), para finalmente separarse de nuevo (cuando " $t \rightarrow +\infty$ ").



Si las interacciones entre las partículas son (al menos aproximadamente) locales, entonces disminuyen en intensidad con la distancia, así que cuando " $t \rightarrow \pm\infty$ " tenemos un estado inicial/final en el que las partículas son aproximadamente libres. Son estas partículas las que queremos describir con los estados multipartículas que recién construiremos. Esto pudiera sonar confuso, porque las partículas de las que hablamos tenían un momento \vec{p} completamente definido, y por tanto una posición \vec{x} completamente incierta, con lo cual no queda claro en qué sentido podemos separarlas unas de otras...

Lo que en realidad queremos decir es que cuando $t \rightarrow \pm\infty$ tenemos paquetes de onda de tamaño $|\Delta\vec{x}| \sim \frac{1}{|\Delta\vec{p}|}$ ^{prop. de incertidumbre} mucho mayor que la longitud de onda asociada al momento promedio $|\vec{p}|$ del paquete, $\lambda_{\text{de Broglie}} \sim \frac{1}{|\vec{p}|} \ll |\Delta\vec{x}|$,

pero con una separación L entre paquetes que es aún mucho mayor que este tamaño:



De esta manera satisfacemos por un lado $|\vec{p}| \gg |\Delta\vec{p}|$, así que las partículas se pueden aproximar por ondas planas con momento definido, y por otro lado $L \gg |\Delta\vec{x}|$, así que las partículas se pueden considerar no interactuantes.

Esperamos que estas 2 aproximaciones serán arbitrariamente buenas si tomamos un límite donde, conforme $t \rightarrow \pm\infty$, tenemos $|\Delta \vec{x}|, L \rightarrow \infty$, con $|\Delta \vec{x}|/L, |\Delta \vec{x}|/t \rightarrow 0$.

Vale la pena resaltar que la existencia de este límite depende de la 'estructura asintótica' del espaciotiempo (es decir, de sus propiedades en regiones distantes): es posible tomar el límite si el espaciotiempo es plano o 'asintóticamente plano', pero no necesariamente en otros casos.

Podemos definir entonces un estado entrante / saliente

$$| \bar{p}_i, \lambda_i; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N; \frac{\pm}{t} \rangle$$

$\left. \begin{array}{l} \swarrow \text{entrante: } t \rightarrow -\infty \\ \searrow \text{saliente: } t \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$

como aquel estado en el cuadro de Heisenberg en el cual se detectarán las partículas indicadas si se realiza una medición al tiempo $t \rightarrow \mp\infty$. Recordemos que en el cuadro de Heisenberg los estados son independientes del tiempo, lo cual no impide que le demos a estos estados un nombre que se refiere a los autovalores de

operadores que sí dependen del tiempo (como habíamos hecho ya antes, al definir los estados $|\bar{x}, t\rangle$).

En el cuadro de Heisenberg, un estado dado codifica la historia espacio-temporal completa de nuestro sistema, y es precisamente por esta razón que preferiremos trabajar en este cuadro, para tener una descripción manifiestamente covariante bajo el grupo de Poincaré.

De la mano de esto, es importante tener claro que los estados entrantes y salientes — llamados conjuntamente estados asintóticos — pertenecen a un mismo espacio de Hilbert, y difieren solo por la manera en que los estamos etiquetando. Para comparar con resultados experimentales, nuestro objetivo principal será calcular el traslate entre los estados entrantes y los salientes,

$$\langle \bar{p}'_1 \lambda'_1; \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N; - | \bar{p}_1 \lambda_1; \dots; \bar{p}_N \lambda_N; + \rangle \equiv S_{K'K}.$$

Amplitud de dispersión ó Matriz S

(No confundir con $\langle \bar{p}'_1 \lambda'_1; \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N; + | \bar{p}_1 \lambda_1; \dots; \bar{p}_N \lambda_N; + \rangle$ } $\stackrel{\leftarrow \text{p. 103}}{=} \delta_{N', N} \dots$)
 $\langle \bar{p}'_1 \lambda'_1; \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N; - | \bar{p}_1 \lambda_1; \dots; \bar{p}_N \lambda_N; - \rangle$ }

Físicamente represente la amplitud de esta transición, y es un objeto análogo al propagador $\langle \bar{x}' | \bar{x} \rangle$ del que hablamos al principio del curso.

La suposición básica con la que trabajamos es que los estados entrantes (o, *alternativamente*, los estados salientes) forman una base del espacio de Hilbert

para el sistema interactuante — hipótesis conocida como

'completitud asintótica' ← recordar que nuestro concepto de partícula incluye estados ligados ↔ partículas compuestas

Para ser más precisos, en general tenemos por supuesto distintos tipos de partículas, y en un proceso dado, el tipo de partículas involucradas puede cambiar, por lo que necesitamos etiquetas adicionales a p^{μ} y a λ .

Escribiremos $|\bar{p}_1, \lambda_1, n_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N, n_N\rangle$, donde podemos pensar en n_I como el nombre de la partícula número

I , etiqueta que la caracteriza por completo: especifica los valores de m y j (que determina el rango de λ), que como hemos visto codifican la manera en que la partícula transforma bajo el grupo de simetrías espaciotemporales,

y especifica también la manera en que la partícula cambia bajo la acción del grupo de posibles simetrías internas \equiv 'rotaciones' abstractas (SIN relación con espacio-tiempo) que no cambian las probabilidades. P.ej., como veremos más adelante, la carga eléctrica q está asociada a una simetría interna $U(1)$: $e^{i\theta\hat{Q}} |\bar{p}\lambda q\rangle = e^{i\theta q} |\bar{p}\lambda q\rangle$.

↑
'rotación' en un espacio abstracto,
generada por \hat{Q} tal que $[\hat{Q}, \hat{p}^\mu] = 0 = [\hat{Q}, \hat{j}^{\mu\nu}]$

Cuando el grupo de simetría interna G es no abeliano, además de un número para especificar la representación de G bajo la cual transforma la partícula, se requiere una (o más) etiqueta(s) adicional(es) K (análoga a λ) para distinguir entre sí a los diferentes estados asociados.

P.ej., la interacción fuerte resulta estar asociada a un grupo $SU(3)$ de simetría interna, y un quark transforma en la rep 'fundamental' (es decir, la rep 3-dimensional que define a $SU(3)$) y tiene por tanto 3 estados internos $K=1,2,3$ (\leftrightarrow estados $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), que llamamos rojo, verde y azul.

n_{\pm} es entonces una etiqueta que resume toda esta información.

10:29/08/22

Para no tener que preocuparnos del orden en que listamos a las partículas en nuestros estados asintóticos, conviene adoptar la convención de que el estado cambia por ± 1 si intercambiamos $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ bosones } \text{ ó } 1 \text{ bosón y } 1 \text{ fermión} \\ 2 \text{ fermiones} \end{array} \right.$ entre sí, aunque No se trate de partículas idénticas. Notemos que, para tener verdadera completitud asintótica, debemos incluir en nuestra lista de partículas posibles cualquier cosa que pueda resultar de nuestro experimento de dispersión — es decir, no solo a las partículas supuestamente elementales, sino también a aquellas estados ligados ^{← partículas compuestas} que sean (suficientemente) estables.

Como entendimos desde el principio del curso, las interacciones pueden cambiar el número de partículas, así que en realidad el estado más general de nuestro sistema es una superposición de estados con distinto número de

partículas. Es decir, el espacio de Hilbert que nos interesa no es, p.ej.,

$$\mathcal{H}_{1 \text{ partícula específica}} \equiv \{ |\bar{p}, \lambda\rangle \forall p, \lambda \}, \text{ o ni siquiera}$$

$$\mathcal{H}_{N \text{ partículas de cualquier tipo}} \equiv \{ |\bar{p}_1, \lambda_1, n_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N, n_N\rangle \forall \bar{p}_I, \lambda_I, n_I \},$$

sino la 'suma directa' (\equiv todas las superposiciones posibles)

$$\mathcal{H} \equiv \{ |0\rangle \} \oplus \{ |\bar{p}, \lambda, n\rangle \} \oplus \{ |\bar{p}_1, \lambda_1, n_1; \bar{p}_2, \lambda_2, n_2\rangle \} \oplus \dots$$

↑ vacío

↑ estado entrante o saliente

19:24/08/18 (-25 min)

conocida como espacio de Fock. Contiene, p.ej., al estado

$$\alpha_1 |\bar{p}_1, \lambda_1, n_1\rangle + \alpha_2 |\bar{p}_2, \lambda_2, n_2\rangle + \alpha_3 |\bar{p}_3, \lambda_3, n_3; \bar{p}_4, \lambda_4, n_4\rangle.$$

incierto en momento, espín, identidad y número

de partículas

Los operadores más generales que actúan sobre este espacio tendrán la posibilidad de mapear un estado con N partículas a otro con $N' \neq N$ partículas (o a una combinación lineal que incluya a tal estado). Este será

el caso, p.ej., del operador asociado a las interacciones entre nuestras partículas, que es parte del Hamiltoniano \hat{H} .

Para poder incorporar esta posibilidad general, conviene

inventaríamos unos operadores que implementan la transición básica de N a $N+1$ partículas: definimos

al operador de creación $\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^{\dagger}$ a través de

$$\sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^{\dagger} |\vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle = |\vec{p}\lambda n; \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle.$$

por convención

"crea" (agrega al ket) partícula de tipo n con momento \vec{p} y espín λ

Esto implica en particular que

$$|\vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \hat{a}_{\vec{p}_1 \lambda_1 n_1}^{\dagger} \dots \sqrt{2E_{\vec{p}_N}} \hat{a}_{\vec{p}_N \lambda_N n_N}^{\dagger} |0\rangle \quad (5)$$

siempre y cuando estipulemos que los \hat{a}^{\dagger} 's conmutan entre sí cuando al menos una de las partículas involucradas es un bosón, y anticommutan si las 2 son fermiones:

$$[\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^{\dagger}, \hat{a}_{\vec{p}'\lambda' n'}^{\dagger}]_{\mp} = 0 \quad \text{si} \begin{cases} n \text{ ó } n' \text{ es bosón} \\ n \text{ y } n' \text{ son fermiones} \end{cases} \quad (6)$$

donde $[\hat{A}, \hat{B}]_{-} \equiv [\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ conmutador

$[\hat{A}, \hat{B}]_{+} \equiv \{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ anticommutador

Determinemos ahora la manera en que actúa el conjunto hermitiano del operador de creación,

$\hat{a}_{\vec{p}\lambda n} \equiv (\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger)^\dagger$. Para identificar por completo al estado

$$\hat{a}_{\vec{p}\lambda n} | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N \rangle,$$

podemos calcular su traslapo con cada uno de los elementos de la base de nuestro espacio de Fock:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \hat{a}_{\vec{p}\lambda n} | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N \rangle \\ &= \langle \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger | \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N \rangle \\ & \stackrel{p.113}{=} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \langle \vec{p}\lambda n; \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{p.102}{=} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \delta_{N, N+1} \sum_{\pi} (-1)^{\# \text{ de transposiciones fermiónicas}} (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_{\pi(1)}) \delta_{\lambda \lambda_{\pi(1)}} \delta_{n n_{\pi(1)}} \\ & \quad \dots (2\pi)^3 2p'_N \delta^{(3)}(\vec{p}'_N - \vec{p}_{\pi(N)}) \delta_{\lambda'_N \lambda_{\pi(N)}} \delta_{n'_N n_{\pi(N)}} \\ & \text{N! permutaciones} \quad \pi: (12 \dots N) \rightarrow (\pi(1) \pi(2) \dots \pi(N)) \end{aligned}$$

Para no perdernos en la notación, tomemos $N=2$:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \hat{a}_{\vec{p}\lambda n} | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \vec{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \delta_{2, N+1} \left[(2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_1) \delta_{\lambda \lambda_1} \delta_{n n_1} \underbrace{(2\pi)^3 2p'_1 \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 - \vec{p}_2) \delta_{\lambda'_1 \lambda_2} \delta_{n'_1 n_2}}_{\langle \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1 | \vec{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle} \pm p_1 \lambda_1 n_1 \leftrightarrow p_2 \lambda_2 n_2 \right] \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} & \langle \bar{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N n'_N | \hat{a}_{p\lambda n} | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \bar{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \delta_{N', N} \left[(2\pi)^3 2p^0 \overset{E_{\vec{p}}}{\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_1)} \delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{nn_1} \langle \bar{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N n'_N | \bar{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle \right. \\ & \quad \left. \pm (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_2) \delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{nn_2} \langle \bar{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N n'_N | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1 \rangle \right]. \end{aligned}$$

Esto nos dice que

$$\begin{aligned} \hat{a}_{p\lambda n} | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \bar{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{p}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_1) \delta_{\lambda\lambda_1} \delta_{nn_1} | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \bar{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle \\ & \quad \pm \sqrt{2E_{\vec{p}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_2) \delta_{\lambda\lambda_2} \delta_{nn_2} | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \bar{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle, \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\langle \bar{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N n'_N | \hat{a}_{\bar{p}\lambda n} | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \delta_{N', N+1} \sum_{\pi} S_{\pi} (-1)^{\# \text{ de transposiciones fermiónicas}} (2\pi)^3 2p^0 \overset{E_{\vec{p}}}{\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_{\pi(1)})} \delta_{\lambda\lambda_{\pi(1)}} \delta_{n n_{\pi(1)}}$$

$$\dots (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_N - \vec{p}_{\pi(N)}) \delta_{\lambda'_N \lambda_{\pi(N)}} \delta_{n'_N n_{\pi(N)}}$$

$$\pi: (12 \dots N) \rightarrow (\pi(1) \pi(2) \dots \pi(N))$$

$$= \sqrt{2E_{\vec{p}}} \sum_{r=1}^N (n_r)^{f_r} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_r) \delta_{\lambda\lambda_r} \delta_{n n_r}$$

permutaciones donde $\pi(1)=r$

$$\cdot \delta_{N+1, N} \sum_{\pi} S_{\pi} (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 - \vec{p}_{\pi(2)}) \delta_{\lambda'_1 \lambda_{\pi(2)}} \delta_{n'_1 n_{\pi(2)}} \dots$$

$$(N-1)! \text{ permutaciones } (2 \dots N) \rightarrow (\pi(2) \dots \pi(N)), \text{ con } \pi(I) = 1, 2, \dots, N, \dots \text{ ó } N$$

Reconociendo que el segundo renglón de esta última expresión coincide con el traslapo $\langle \bar{p}'_1 \lambda'_1 n'_1, \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N n'_N | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots; \bar{p}_r \lambda_r n_r, \dots \rangle$, tenemos

$$\langle \bar{p}'_1 \lambda'_1 n'_1, \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N n'_N | \hat{a}_{\bar{p}\lambda n} | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle$$

$$= \sqrt{2E_{\bar{p}}} \sum_{r=1}^N (\eta_r)^{f_r} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{p}_r) \delta_{\lambda\lambda_r} \delta_{nn_r}$$

$$\cdot \langle \bar{p}'_1 \lambda'_1 n'_1, \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N n'_N | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots; \bar{p}_r \lambda_r n_r, \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle$$

Concluimos entonces que

$$\hat{a}_{\bar{p}\lambda n} | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle = \sqrt{2E_{\bar{p}}} \sum_{r=1}^N (\eta_r)^{f_r} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{p}_r) \delta_{\lambda\lambda_r} \delta_{nn_r}$$

$$\cdot | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots; \bar{p}_r \lambda_r n_r, \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle$$

Por esta razón, $\hat{a}_{\bar{p}\lambda n}$ se conoce como un operador de aniquilación (elimina partícula). Notemos que esto implica

$$\hat{a}_{\bar{p}\lambda n} | 0 \rangle = 0 \quad \forall \bar{p}, \lambda, n. \quad (7)$$

Las \hat{a} 's conmutan o anticonmutan entre sí justo como las \hat{a}^\dagger 's (esto es consecuencia del \dagger de (6)). Para obtener el

L9:20/02/17

conmutador entre los \hat{a} 's y los \hat{a}^\dagger 's, comparemos

$$\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger | k_1, \dots; k_N \rangle = \hat{a}_k \frac{1}{\sqrt{2E_k}} | k'; k_1, \dots; k_N \rangle$$

\uparrow
 $\equiv \bar{p}\lambda n$

$$= \frac{\sqrt{2E_k}}{\sqrt{2E_{k'}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') |k_1, \dots, k_N\rangle + \sum_{r=1}^N \frac{\sqrt{2E_k}}{\sqrt{2E_{k'}}} (\eta_n)^{f_{r+1}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}_r) |k', k_1, \dots, \cancel{k_r}, \dots, k_N\rangle$$

$\equiv \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'}$
 ± 1 si n es bosón / fermión
 $\#$ de fermiones en n', n_1, \dots, n_{r-1}

vs.

$$\langle \hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k | k_1, \dots, k_N \rangle = \sum_{r=1}^N \frac{\sqrt{2E_k}}{\sqrt{2E_{k'}}} (\eta_n)^{f_r} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}_r) |k', k_1, \dots, \cancel{k_r}, \dots, k_N\rangle$$

$\#$ de fermiones en n_1, \dots, n_{r-1}

Si η_n y $\eta_{n'} = \begin{matrix} ++, +-, -+ \\ -- \end{matrix}$ podemos restar / sumar estas 2 ecuaciones, para concluir que

$$\left[\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}, \hat{a}_{\vec{p}'\lambda' n'}^\dagger \right]_{\pm} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'}$$

(8)

(con el signo superior si n o n' es bosón / inferior si n y n' es fermión).

Notemos que, debido a nuestra elección de normalización para los \hat{a} 's y \hat{a}^\dagger 's, la expresión del lado derecho en (8) no es invariante de Lorentz (aún así, la ec. (8) sí es covariante).
↳ falta factor usual de $2E_{\vec{p}}$

Elegimos esta convención por razones históricas, para tener unas relaciones de conmutación análogas a las de los operadores 'de ascenso y descenso' del oscilador armónico: $[\hat{x}, \hat{p}] = i \leftrightarrow [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

(Entenderemos esta conexión en detalle más adelante, cuando hablemos de campos.)

La utilidad de los operadores de creación y aniquilación radica en primer lugar en el hecho de que las relaciones

(5)-(8) resumen toda la información relevante para construir

el espacio de Fock: $\hat{a}_{\vec{p}\lambda n} |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}, \lambda, n$ define al vacío, los estados multiparticular $|\vec{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots, \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle$ se obtienen actuando sobre $|0\rangle$ con los $\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger$, y el (anti)conmutador $[\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}, \hat{a}_{\vec{p}'\lambda' n'}^\dagger]_{\mp}$ (junto con $[\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}, \hat{a}_{\vec{p}'\lambda' n'}]_{\mp} = 0$) codifica el producto interno que convierte al espacio vectorial resultante en un espacio de Hilbert.

Además, como ya habíamos anticipado, cualquier operador \hat{O} que actúe en el espacio de Fock se puede escribir en términos de los operadores de creación y aniquilación, en la forma

$$\hat{O} = \sum_{N, N'=0}^{\infty} \int \underbrace{d^3 k'_1 \dots d^3 k'_{N'}}_{\equiv d^{3N'} K'} \underbrace{d^3 k_1 \dots d^3 k_N}_{d^{3N} K} \underbrace{O(K', K)}_{\substack{\sum_{\vec{p}_i \lambda_i n_i} \\ \sim \text{elementos de matriz} \\ \langle k'_1 \dots k'_{N'} | \hat{O} | k_1 \dots k_N \rangle}} \hat{a}_{k'_1}^\dagger \dots \hat{a}_{k'_{N'}}^\dagger \hat{a}_{k_1} \dots \hat{a}_{k_N}$$

En particular, cualquier operador definido para actuar sobre estados de 1 partícula, como p.ej. $\hat{F}^w |\bar{p}\lambda n\rangle = p^w |\bar{p}\lambda n\rangle$, se puede extender de manera aditiva a estados multiparticulares escribiendo

$$\hat{O} \equiv \sum_{n, \lambda', \lambda} \int \frac{d^3 p' d^3 p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}} \sqrt{2E_p}} \overset{\substack{\text{elemento de matriz} \\ \text{conocido (1 partícula)}}}{\hat{O}_{\bar{p}'\lambda' n}} \langle \bar{p}'\lambda' n | \hat{O} | \bar{p}\lambda n \rangle \hat{a}_{\bar{p}\lambda n}^{\dagger}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{no } n'}$

puesto que con esta definición tenemos

$$\hat{O} |\bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N\rangle = \sum_{n, \lambda', \lambda} \int \frac{d^3 p' d^3 p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}} \sqrt{2E_p}} \hat{O}_{\bar{p}'\lambda' n} \langle \bar{p}'\lambda' n | \hat{O} | \bar{p}\lambda n \rangle$$

$$\sqrt{2E_p} \sum_{r=1}^N (\pm 1)^{f_r} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_r) \delta_{\lambda\lambda_r} \delta_{n n_r} |\bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}' \lambda' n_r; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N\rangle$$

\uparrow n_r

$$= \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} \sum_{r=1}^N (\pm 1)^{f_r} |\bar{p}'\lambda' n_r; \bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}' \lambda' n_r; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N\rangle \langle \bar{p}'\lambda' n_r | \hat{O} | \bar{p}_r \lambda_r n_r \rangle$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{|\bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}' \lambda' n_r; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N\rangle}$

\nearrow en $n=n_r$, por $\delta_{n n_r}$

$$= \sum_{r=1}^N \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3 p_r'}{(2\pi)^3 2E_{p_r'}} |\bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}' \lambda' n_r; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N\rangle \langle \bar{p}' \lambda' n_r | \hat{O} | \bar{p}_r \lambda_r n_r \rangle$$

Pej., usando $\langle \bar{p}' \lambda' n' | \hat{P}^\mu | \bar{p} \lambda n \rangle = p^\mu (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\bar{p}' - \bar{p}) \delta_{\lambda' \lambda}$, esto dice que, actuando sobre el espacio de Fock, el operador de momento (\Leftrightarrow generador de traslaciones) es

$$\hat{P}^\mu = \sum_{n, \lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p} \sqrt{2E_p}} \underbrace{a_{\bar{p}' \lambda' n'}^\dagger \langle \bar{p}' \lambda' n' | \hat{P}^\mu | \bar{p} \lambda n \rangle}_{p^\mu (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\bar{p}' - \bar{p}) \delta_{\lambda' \lambda}} \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}$$

$$\hat{P}^\mu = \sum_{n, \lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^\mu \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}^\dagger \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}$$

$$\Rightarrow \hat{P}^\mu | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle = (p_1^\mu + p_2^\mu + \dots + p_N^\mu) | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle$$

Y en particular, tomando $\mu=0$ esto dice que

$$\hat{H} = \sum_{n, \lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}^\dagger \hat{a}_{\bar{p} \lambda n} \quad (\Leftrightarrow \text{partículas libres}).$$

Usando la identidad $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] \mp \pm [\hat{A}, \hat{C}] \hat{B}$,

es fácil ver que la combinación cuadrática que aparece aquí,

$$\hat{N}_{\bar{p} \lambda n} \equiv \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}^\dagger \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}, \quad \leftarrow \text{'operador de número' para partículas } \bar{p} \lambda n \quad \text{análogo a } \hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a} \text{ de oscilador armónico}$$

satisface

\leftarrow ojo: conmutador

$$[\hat{N}_{\bar{p}' \lambda' n'}, \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}^\dagger] = + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p}' - \bar{p}) \delta_{\lambda' \lambda} \delta_{n' n} \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}^\dagger,$$

$$[\hat{N}_{\bar{p}' \lambda' n'}, \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}] = - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p}' - \bar{p}) \delta_{\lambda' \lambda} \delta_{n' n} \hat{a}_{\bar{p} \lambda n},$$

(relaciones análogas a $[\hat{J}^3, \hat{J}^\pm] = \pm \hat{J}^\pm$, o a

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = +\hat{a}^\dagger, [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \text{ para oscilador), y por tanto}$$

$$[\hat{N}_{\vec{p}\lambda n}, \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger] = + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger$$

$$\underbrace{\hat{N}_{\vec{p}\lambda n}}_{\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}} |\vec{p}\lambda n_1, \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \dots \sqrt{2E_{\vec{p}_N}} \underbrace{\hat{N}_{\vec{p}\lambda n}}_{\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}} \hat{a}_{\vec{p}\lambda n_1}^\dagger \dots \hat{a}_{\vec{p}_N \lambda_N n_N}^\dagger |0\rangle$$

$$\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{N}_{\vec{p}\lambda n} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger$$

↑ dará 0 cuando llege frente a |0>

$$= \sum_{r=1}^N (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}_r) \delta_{\lambda\lambda_r} \delta_{nn_r} |\vec{p}\lambda n_1, \dots; \vec{p}_r \lambda_r n_r, \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle,$$

$N_{\vec{p}\lambda n}$ básicamente cuanta particular con estas etiquetas

así que integrando $\sum_{n'\lambda'} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}$ tenemos

$$\sum_{n,\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{N}_{\vec{p}\lambda n} |\vec{p}\lambda n_1, \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle = \hat{N} |\vec{p}\lambda n_1, \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle$$

número total de partículas

$\equiv \hat{N} \leftarrow$ operador de número (total) (análogo a $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ para oscilador armónico)

11/9/2008/22

Podemos notar también que el hecho de que

$$\underbrace{\hat{U}(\Lambda, \bar{a})}_{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{U}(\Lambda, \bar{a})^{-1} |0\rangle = \exp(iq_\omega \Lambda^\mu_\nu p^\nu) \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}(\Lambda, \vec{p}) \underbrace{\hat{U}(\Lambda, \bar{a})}_{\sqrt{2E_{\Lambda p}}} \hat{a}_{\Lambda \vec{p} \lambda n}^\dagger |0\rangle$$

↑ invariante

permite inferir la regla de transformación

$$\hat{U}(\Lambda, \bar{a}) \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{U}(\Lambda, \bar{a})^{-1} = \sqrt{\frac{E_{\Lambda \vec{p}}}{E_{\vec{p}}}} \exp(iq_\omega \Lambda^\mu_\nu p^\nu) \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}(\Lambda, \vec{p}) \hat{a}_{\Lambda \vec{p} \lambda n}^\dagger$$

(y su conjugado hermitiano).