viernes, 17 de agosto de 2007 11:20 a.m.

0. Motivación

La teoría cuántica de campos es a la vez:

- Un formalismo interesante desde el punto de vista teórico.
- Una herramienta útil en la práctica, en áreas muy diversas: física teórica de altas energías, fenomenología de partículas, física nuclear, física de materia condensada, matemáticas ¡y finanzas!
- Un lenguaje altamente exitoso para describir a nuestro universo a distancias $\sim 10^{-10} - 10^{-20}$ m (¡o quizás debiéramos decir $\sim 10^{26} - 10^{-35}$ m!)

  A pesar de ello, creemos por diversas razones (la principal es la necesidad de cuantizar a la gravedad) que es apenas una aproximación más a la realidad, y que existe un lenguaje aún más fundamental.
- Un tema que resulta extraño en un primer encuentro (similar a la mecánica cuántica). Incorpora solo a la cuántica habitual, pero con diferente enfoque.
- Un tema de investigación actual, buscando entender su

naturaleza más profunda, alcances y métodos de cálculo.
Un punto que resulta muy nebuloso al principio es:
si nuestro universo está hecho de partículas, y lo que queremos entonces es describir partículas cuánticas relativistas, ¿para qué demonios hablamos de campos?
Una manera de intentar responder esta pregunta (el camino más socorrido en los libros de texto) es simplemente tomar un campo y mostrar que al cuantizarlo obtenemos, sorprendentemente, ¡partículas!
Por supuesto haremos esto más adelante en este curso; pero para empezar, seguiremos otro camino.
Tratatemos de explicar por qué, en cierto sentido,

Partículas + Mecánica Cuántica + Relatividad Especial $\Longrightarrow$ Teoría Cuántica de Campos,

de modo que el formalismo de campos resulta prácticamente inevitable. Una alternativa conocida —¿la única?— es reemplazar a las partículas por objetos unidimensionales, para obtener la teoría de cuerdas, que acaba abarcando incluso a la relatividad general (y por tanto, a la gravedad). Pero increíblemente, descubrimos en años recientes que, al menos en ciertas circunstancias, ¡una teoría de cuerdas puede ser equivalente a una teoría de campos! Esto ocurre a través de la "correspondencia holográfica", AdS/CFT, o norma/gravedad.

El enfoque que adoptaremos al principio del curso está basado primero en la plática de Feynman "The Reason for Antiparticles", y después en los capítulos 2-5 del libro de Weinberg (que desafortunadamente creo que resulta de difícil lectura cuando uno aprende campos por primera vez, en parte por su nada convencional notación) y los capítulos 3-4 de los apuntes de (David) Gross.

Pero antes de cualquier otra cosa, iniciaremos con un breve repaso de las ideas básicas de la mecánica cuántica.

1. Mecánica Cuántica Relativista

En la notación de Dirac, el estado de nuestro sistema se denota a través de un ket (¡chete!) $|\psi\rangle$.

Si $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle$ son estados admisibles, entonces en general también lo es la superposición

$$\alpha|\psi\rangle + \beta|\psi'\rangle \equiv |\alpha\psi + \beta\psi'\rangle \qquad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Es decir, los estados son elementos de un espacio vectorial complejo. En este espacio existe un producto interno

$$i(|\psi\rangle, |\psi'\rangle) \equiv \langle\psi|\psi'\rangle \in \mathbb{C} \quad \text{que satisface}$$

1) $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$

2) $\langle\varphi|\alpha\psi + \beta\psi'\rangle = \alpha\langle\varphi|\psi\rangle + \beta\langle\varphi|\psi'\rangle$ (Lineal en su 2do. argumento) "Sesquilineal"

$\Big(1)+2) \Rightarrow \langle\alpha\varphi + \beta\varphi'|\psi\rangle = \alpha^*\langle\varphi|\psi\rangle + \beta^*\langle\varphi'|\psi\rangle$ (Antilineal en 1ero.)$\Big)$

3) $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0 \quad \forall\ |\psi\rangle$; $\langle\psi|\psi\rangle = 0$ solo si $|\psi\rangle = 0$

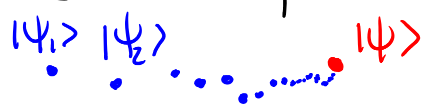
(Positivo definido)

$\Rightarrow$ probabilidad es módulo al cuadrado

Físicamente, $\dfrac{\langle\varphi|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle}\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}}$ es la amplitud de probabilidad $(\in \mathbb{C})$ de que el sistema se encuentre en $|\varphi\rangle$ cuando está en $|\psi\rangle$.

La norma del vector $|\psi\rangle$ se define a través de $\| |\psi\rangle \| \equiv \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$. Conviene por supuesto trabajar con estados normalizados: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.
(Recordemos también que la fase del vector es físicamente irrelevante, así que $|\psi\rangle \simeq e^{i\phi}|\psi\rangle \quad \forall\, \phi \in \mathbb{R}$.)

Supongamos que este espacio vectorial complejo equipado con producto interno es "completo" en relación a la norma $\|\cdot\|$ (es decir, toda "serie de Cauchy" converge: $\{|\psi_n\rangle\}$ donde $\forall\, \delta > 0\ \exists\, N$ tal que
$\| |\psi_n\rangle - |\psi_{n'}\rangle \| < \delta \quad \forall\ n, n' > N$



necesariamente implica que $\exists\, |\psi\rangle$ tal que $\lim_{n\to\infty} |\psi_n\rangle = |\psi\rangle$), y constituye por tanto un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Notar que los mapeos del tipo $\langle\varphi|\cdot\rangle : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$
$|\psi\rangle \mapsto \langle\varphi|\psi\rangle$
forman también un espacio vectorial.
El "vector dual" a $|\psi\rangle$, $\langle\psi|\cdot\rangle \equiv \langle\psi|$ se conoce como bra (¡con!).

P.ej., si $|\vec{x}\rangle$ denota el estado de una partícula localizada en $\vec{x}$, entonces el vector dual $\langle\vec{x}|$ sirve para formar el traslape $\langle\vec{x}|(|\psi\rangle) = \langle\vec{x}|\psi\rangle$, que no es otra cosa que la función de onda (en espacio de posición), $\langle\vec{x}|\psi\rangle \equiv \psi(\vec{x})$.

amplitud de que la partícula en estado $|\psi\rangle$ esté en $\vec{x}$

Sabemos que los estados $\{|\vec{x}\rangle \mid \vec{x}\in\mathbb{R}^3\}$ nos dan una "base" (ortogonal pero no normalizable: $\langle\vec{x}'|\vec{x}\rangle = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$) para $\mathcal{H}_{\substack{\text{1 partícula}\\ \text{sin espín}}}$, es decir, podemos escribir

delta de Dirac $=0$ si $\vec{x}\neq\vec{x}'$

$\int d^3x\, f(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') = f(\vec{x}')$

$$|\psi\rangle = \underbrace{\int d^3x\ |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|}_{=\hat{\mathbb{1}}\ \text{`resolución' de la identidad}}\psi\rangle \qquad \forall\ |\psi\rangle .$$

los estados $\{|\vec{p}\rangle\}$ definidos a través de $\langle\vec{p}|\vec{x}\rangle = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ nos dan otra base para el mismo espacio de Hilbert.

Regresando a la discusión general, recordemos que en el formalismo de la mecánica cuántica cada observable $\mathcal{O}$ está asociada a un operador lineal $\hat{\mathcal{O}}:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = \hat{\mathcal{O}}|\psi\rangle \equiv |\hat{\mathcal{O}}\psi\rangle$$

$\leftarrow \hat{O}|\psi_n\rangle = \lambda_n|\psi_n\rangle$

Los eigenvalores, autovalores o valores propios λ_n de $\hat{O}$ son los únicos resultados posibles de una medición (idealizada) de $\hat{O}$, e inmediatamente después de la medición, el estado del sistema es el eigenvector o vector propio $|\psi_n\rangle$ correspondiente. Esto implica que las mediciones de $\hat{O}$ y $\hat{O}'$ no interfieren una con otra solo si $[\hat{O}, \hat{O}'] = 0$.

Los eigenvectores $\{|\psi_n\rangle\}$ constituyen una base ortogonal, de modo que $\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = \hat{1}$. Usando esto, vemos que

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \sum_n \langle\psi|\underbrace{\hat{O}|\psi_n\rangle}_{\lambda_n|\psi_n\rangle}\langle\psi_n|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n \underbrace{|\langle\psi_n|\psi\rangle|^2}_{\text{probabilidad de } \lambda_n}$$

es el valor esperado para la observable $\hat{O}$ en el estado $|\psi\rangle$.

Los traslapes $\langle\psi_m|\hat{O}|\psi_n\rangle \equiv O_{mn} \in \mathbb{C}$ se conocen como los elementos de matriz de $\hat{O}$, y lo determinan por completo.

Dado un operador cualquiera $\hat{O}$, definimos su "conjugado hermitiano" $\hat{O}^\dagger$ tal que

$$\langle\varphi|\hat{O}\psi\rangle = \langle\hat{O}^\dagger\varphi|\psi\rangle \quad \forall \quad |\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

Es fácil ver que esto implica $O^\dagger_{mn} = O^*_{nm}$.

Las observables corresponden a operadores que son hermitianos, $\hat{O}^\dagger = \hat{O}$, lo cual implica que tienen eigenvalores reales. P.ej., en el caso de una partícula, las observables básicas son $\hat{x}^i$, $\hat{p}^i$ $i=1,2,3$ (con $[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\hbar\delta^{ij}$), y el operador más general se puede escribir en la forma

elemento de matriz

$$\hat{O} = \underbrace{\int d^3x\, d^3x'}\;\underbrace{|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|}_{\mathbb{1}}\,\overbrace{\hat{O}\,|\vec{x}'\rangle}^{O_{\vec{x}\vec{x}'}}\langle\vec{x}'| = \int d^3x\, d^3x'\, O_{\vec{x}\vec{x}'}\, |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}'| .$$

(o similarmente en la base de $|\vec{p}\rangle$)

La evolución temporal es generada por el operador Hamiltoniano $\hat{H}(\hat{p}_A, \hat{q}_A)$ (coords. generalizadas), a través de la ec. de Schrödinger

$$\boxed{i\hbar\,\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle} \qquad (\text{usaremos unidades } \hbar=1)$$

Definiendo el operador de evolución $\hat{U}(t,t')$ a través de

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t')\,|\psi(t')\rangle ,$$

la ec. de Schrödinger implica que, si $\hat{H}$ es independiente del tiempo, $\hat{U}(t,t') = \exp(-i\hat{H}(t-t'))$. En el caso general, $\hat{U}$ es un poco más complicado. Notar que, dado que la evolución temporal preserva la norma de los estados, el operador $\hat{U}(t,t')$ debe ser unitario: $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{\dagger}$ (lo cual equivale al requisito de que $\hat{H}$ sea hermitiano).

El valor esperado de un operador $\hat{O}$ (que es un ejemplo de una cantidad directamente medible) cambia en el tiempo de acuerdo con

$$\langle\hat{O}(t)\rangle_{\psi} \equiv \langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|e^{i\hat{H}t}\hat{O}e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle,$$

y es $\therefore$ independiente del tiempo solo si $[\hat{H},\hat{O}]=0$.

Recordemos que $|\psi(t)\rangle$, $\hat{O}$ es la descripción en el llamado "cuadro de Schrödinger", y que es posible describir al mismo sistema en el "cuadro de Heisenberg", donde los estados son independientes del tiempo, $|\psi\rangle_H \equiv |\psi(0)\rangle_S$, mientras que los operadores evolucionan,

$$\hat{O}_H(t) \equiv e^{i\hat{H}t}\hat{O}_S\, e^{-i\hat{H}t} = e^{i\hat{H}t}\hat{O}_H(0)e^{-i\hat{H}t},$$

evolución codificada en la ec. de Heisenberg, $i\hbar\partial_t\hat{O}_H(t) = [\hat{O}_H(t),\hat{H}]$.

De modo que

$$\langle \hat{O}(t)\rangle_\psi = {}_S\langle\psi(0)|\, e^{i\hat{H}t} \overbrace{\hat{O}_S}^{\hat{O}_H(0)} e^{-i\hat{H}t}\, |\psi(0)\rangle_S$$

$$= {}_H\langle\psi|\,\hat{O}_H(t)\,|\psi\rangle_H \,.$$

Es importante tener presente que, aún si $[\hat{O}_S, \hat{O}'_S]=0$, en general se tiene $[\hat{O}_H(t), \hat{O}'_H(t')] \neq 0$ a menos que $t=t'$ (p.ej., $[\hat{x}^i(t), \hat{x}^j(t')]\neq 0$ si $t\neq t'$, porque $[\hat{H}, \hat{x}^i(t)]\neq 0$).

Dada una base $\{|\psi_n\rangle\}$ para $\mathcal{H}$, la evolución de cualquier $|\psi\rangle$ se puede determinar a partir del

propagador

edo. en t

edos. en $t=0$

$$\underbrace{{}_S\langle\psi_{n'}|\, e^{-i\hat{H}(t'-t)}\, |\psi_n\rangle_S}_{U_{n'n}(t'-t)} = \underbrace{\left({}_S\langle\psi_{n'}|\, e^{-i\hat{H}t'}\right)}\underbrace{\left(e^{i\hat{H}t}|\psi_n\rangle_S\right)}$$

edo. en t'

$$\equiv {}_H\langle\psi_{n'}, t'|\,\psi_n, t\rangle_H \,,$$

etiqueta indica cuándo el estado tiene el comportamiento descrito

que representa la amplitud de que, si el sistema está en el estado $|\psi_n\rangle$ al tiempo t, se le encuentre entonces en el estado $|\psi_{n'}\rangle$ al tiempo t'.

P.ej., para $\mathcal{H}_{\substack{\text{1 partícula}\\ \text{sin espín}}}$ podemos usar $\{|\vec{x}\rangle\}$, y

$$|\psi(t')\rangle = \int d^3x'\, d^3x\, |\vec{x}'\rangle \underbrace{\langle \vec{x}'|\, e^{-i\hat{H}(t'-t)}\, |\vec{x}\rangle}_{\equiv \langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t\rangle} \langle \vec{x}|\psi(t)\rangle ,$$

ψacío de Heisenberg: eigenestado de $\hat{x}^i(t)$ con eigenvalor x^i

Este propagador incluye información completa de la solución a la ec. de Schrödinger (o Heisenberg), codificada de manera útil para el caso relativista: t y $\vec{x}$ en el mismo pie.

Consideremos primero una partícula libre no relativista:

$\hat{H} = \dfrac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m}$, de modo que el propagador es

$$\langle \vec{x}', t' \underbrace{|}_{} \vec{x}, t\rangle = \langle \vec{x}'|\, e^{-i\frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m}(t'-t)}\, |\vec{x}\rangle$$

presencia de t indica edo. de Heisenberg

Insertar $\hat{\mathbb{1}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \underbrace{\langle \vec{x}'|\vec{p}\rangle}_{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}'}}\, e^{-i\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}(t'-t)} \underbrace{\langle \vec{p}|\vec{x}\rangle}_{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}} ,$$

es decir,

integral gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x}) - i\vec{p}^{\,2}(t'-t)/2m}$$

completar cuadrado en exponente

$$= \left[\frac{m}{2\pi i(t'-t)}\right]^{3/2} e^{\frac{im}{2(t'-t)}(\vec{x}'-\vec{x})^2} .$$

Notar que, en un intervalo de tiempo $t'-t$ dado, la partícula puede moverse una distancia $|\vec{x}'-\vec{x}|$ arbitrariamente grande. Esto no es preocupante para una partícula no relativista, pero, ¿qué pasa en el caso relativista?

Sabemos que para una partícula relativista libre

$$\hat{H} = +\sqrt{(\hat{\vec{p}}c)^2 + m^2c^4} \qquad \text{(Usaremos unidades } c = 1\text{)}$$

[Notar que $\boxed{\hbar = c = 1}$ $\Longrightarrow$ $[m] = [p] = [E] = [\omega] = [x]^{-1} = [t]^{-1}$!],

un. naturales

así que

signo negativo porque energía es positiva

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \langle \vec{x}' | e^{-i\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}\,(t'-t)} | \vec{x} \rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}}\, e^{-i\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}\,(t'-t) + i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}$$

Insertamos a mano. La conclusión principal a la que llegaremos NO dependerá de esta inserción.

$\simeq 2m$ en el límite no relativista $|\vec{p}| << m$

El factor $2\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}$ que agregamos al denominador es necesario si queremos que el propagador sea invariante de Lorentz. En efecto, la expresión anterior se puede reescribir en la forma manifiestamente invariante

$$\langle \vec{x}',t'|\vec{x},t\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3}\, \delta(p^2-m^2)\, \Theta(p^0)\, e^{-ip\cdot(x'-x)} \,,$$

bajo Lorentz: $p^\mu \to \underline{p}^\mu$

$$\begin{cases} d^4p = d^4\underline{p} \\ p^2 = \underline{p}^2 \\ p\cdot(x'-x) = \underline{p}\cdot(\underline{x}'-\underline{x}) \end{cases}$$

Θ función escalón (de Heaviside)

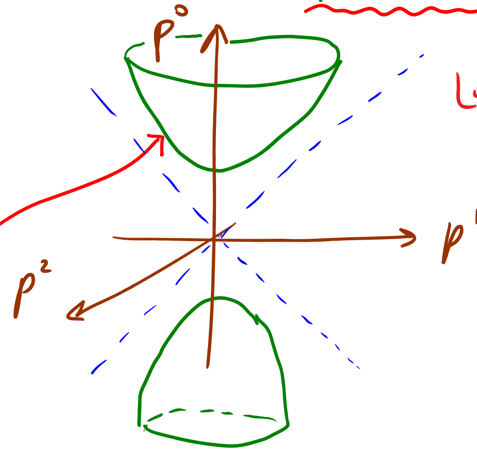
donde $p^\mu \equiv (p^0,\vec{p})$, $x^\mu \equiv (t,\vec{x})$, $d^4p \equiv dp^0 d^3p$, (cuadrivector)

$$p\cdot x \equiv p^0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x} \,, \qquad p^2 \equiv p\cdot p = (p^0)^2 - \vec{p}^{\,2}$$

OJO: usaremos signatura $+---$ (habitual para partícleros)

y $$\Theta(p^0) = \begin{cases} 1 & \text{si } p^0>0 \\ 0 & \text{si } p^0<0 \end{cases}.$$

"Capa de masa" (mass shell)



Lorentz NO cambia el signo de p^0

Para mostrar esto, basta notar que $\delta(\underbrace{p^2-m^2}_{(p^0)^2-\vec{p}^{\,2}-m^2})\,\Theta(p^0) \neq 0$

solo cuando

$$p^0 = +\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}\,,$$

1: 06/08/18

cambio de variable $p^0 \to (p^0)^2$

de manera que

$$\int_{\cancel{-\infty}\ 0}^{\infty} dp^0\, \delta((p^0)^2-\vec{p}^2-m^2)\theta(p^0)f(p^0) = \int_0^{\infty}\frac{d((p^0)^2)}{2p^0}\delta((p^0)^2-\vec{p}^2-m^2)\theta(p^0)f(p^0)$$

cualquier función

$$= \frac{f(p^0=+\sqrt{\vec{p}^2+m^2})}{2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}.$$

En nuestro caso tenemos $f(p^0)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{-ip\cdot(x'-x)}$,

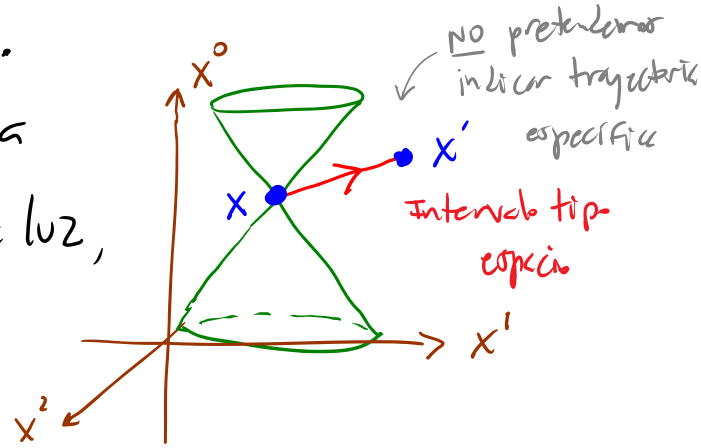
así que, como prometimos,

$$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^3}\,\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)\,e^{-ip\cdot(x'-x)} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{-i\sqrt{\vec{p}^2+m^2}(t'-t)+i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}}{2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}.$$

Ahora bien, dado que $\langle\vec{x}',t'|\vec{x},t\rangle$ es invariante bajo traslaciones y bajo Lorentz, solo puede depender del intervalo relativista

$$(x'-x)^2 \equiv (t'-t)^2-(\vec{x}'-\vec{x})^2.$$

Para preguntarnos si la partícula puede viajar más rápido que la luz, nos interesa determinar el propagador fuera del cono, donde $(x'-x)^2<0$. ← intervalo tipo espacio



$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{-i\sqrt{\vec p^{\,2}+m^2}\,(t'-t)+i\vec p\cdot(\vec x'-\vec x)}}{2\sqrt{\vec p^{\,2}+m^2}}$$

Pero por invariancia de Lorentz + traslaciones ← yendo a marco de referencia donde $(\underline{x}'-\underline{x})^\mu$ apunta a lo largo de eje 1

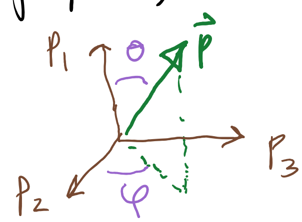
$$\langle \vec x', t' | \vec x, t\rangle = \langle \sqrt{-(x'-x)^2}, 0,0,0 | 0,0,0,0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{\vec p^{\,2}+m^2}}\; \underbrace{e^{+ip^1\sqrt{-(x'-x)^2}}}_{\cos\left(p^1\sqrt{-(x'-x)^2}\right) + i\,\text{sen}\left(p^1\sqrt{-(x'-x)^2}\right)}$$

0 (impar)

y cambiando a coordenadas esféricas con p^1 como eje polar,

$$d^3p = |\vec p|^2\, d|\vec p|\, \underbrace{d\Omega}_{\text{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi}\,, \qquad p^1 \equiv |\vec p|\cos\theta\,,$$



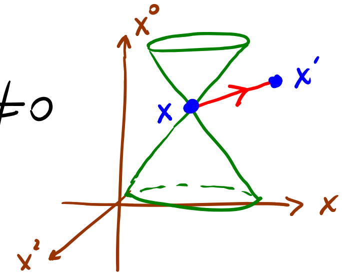
esto resulta ser (ver, p.ej., Greiner, ejercicio 4.6, p. 105)

$$\langle \vec x', t' | \vec x, t\rangle = 2\pi \int_0^\infty \frac{d|\vec p|\; |\vec p|^2}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{|\vec p|^2+m^2}} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, \cos\left(|\vec p|\sqrt{-(x'-x)^2}\,\cos\theta\right)$$

$$= \frac{m}{(2\pi)^2}\, \frac{K_1\left(m\sqrt{-(x'-x)^2}\right)}{\sqrt{-(x'-x)^2}}$$ ← Función de Bessel Modificada

$$\xrightarrow[\sqrt{-(x'-x)^2} \gg 1/m]{} \frac{m}{(2\pi)^2\sqrt{-(x'-x)^2}}\, \sqrt{\frac{\pi}{2m\sqrt{-(x'-x)^2}}}\; \exp\left(-m\sqrt{-(x'-x)^2}\right).$$

L1: 08/08/22



Encontramos entonces que $\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle \neq 0$ ¡aun fuera del cono de luz! La razón matemática es sencilla:

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \int \frac{|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega}{(2\pi)^3 2\sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}} e^{-i\sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}(t'-t)+i|\vec{p}||\vec{x}'-\vec{x}|\cos\theta}$$

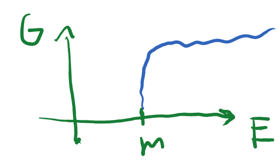
$$\stackrel{E=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}{\equiv} \int_m^\infty dE\, e^{-iE(t'-t)} g(E),$$

depende también de $|\vec{x}'-\vec{x}|$ (y sería una función de E sólo ligeramente distinta si no hubiéramos incluido $2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ en denominador)

o lo que es lo mismo,

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE\, e^{-iE(t'-t)} G(E) \equiv \tilde{G}(t'-t),$$

donde $G(E) \equiv g(E)\Theta(E-m)$, $=0\ \forall\ E<m$

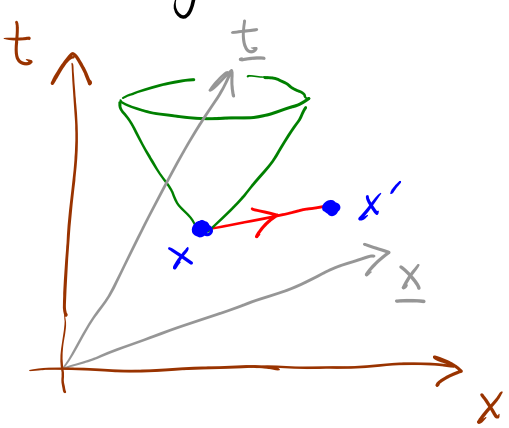


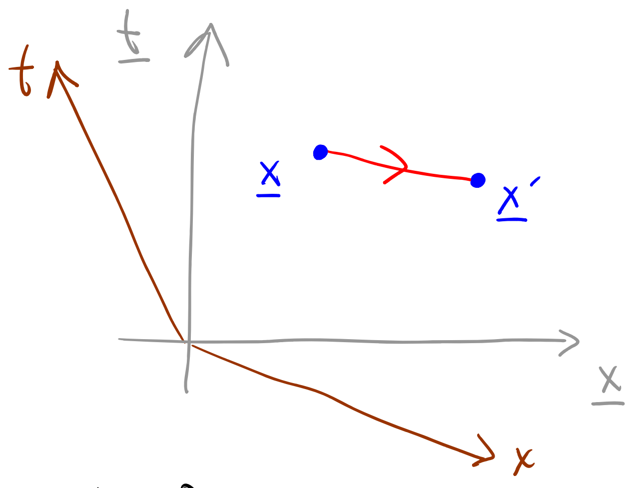
y la transformada de Fourier $\tilde{G}$ de una función G que es igual a cero en una región extendida NO puede ser también igual a cero en una región extendida. quisiéramos en $|t'-t|<|\vec{x}'-\vec{x}|$

Notar que NO podemos arreglar esto incluyendo energías negativas, porque necesitaríamos $\int_{-\infty}^{m} dE$, y en ese caso ¡no habría un estado fundamental para la partícula!

Concluimos así que la combinación de la mecánica cuántica con la inocente restricción a energías positivas inevitablemente da lugar a la posibilidad de propagación a velocidades superlumínicas! Cabe resaltar que esta posibilidad es apreciable solo a distancias pequeñas, del orden de $1/m$, el radio de Compton de la partícula.

Pero... en otro marco de referencia, ¡esto equivaldría a propagación hacia atrás en el tiempo!





¿Qué significa esto? El observador $\underline{O}$ ve una partícula con masa m, que se mueve de $\vec{\underline{x}}'$ a $\vec{\underline{x}}$ (¡y no al revés!). Si la partícula que O ve porta algún tipo de carga q, entonces la partícula que $\underline{O}$ ve tiene carga $-q$ (y la misma masa): ¡es la antipartícula correspondiente!

Concluimos entonces que, al combinar a la mecánica cuántica con la relatividad especial, la existencia de antipartículas resulta inevitable [ver Feynman].

(Como veremos mucho más adelante, la existencia de estos procesos NO implica una violación de la causalidad.)

Notemos ahora que el propagador de la antipartícula debe tener la forma

Energías positivas hacia adelante en el tiempo

$$\langle \underline{\vec{x}}, \underline{t} | \underline{\vec{x}}', \underline{t}' \rangle = \int \frac{d^3 \underline{p}}{(2\pi)^3 \, 2\sqrt{\underline{\vec{p}}^2 + m^2}} \, e^{\underbrace{-i\sqrt{\underline{\vec{p}}^2+m^2}\,(\underline{t}-\underline{t}')}_{= e^{-i(-\sqrt{\underline{\vec{p}}^2+m^2})(\underline{t}'-\underline{t})}} + i\underline{\vec{p}}\cdot(\underline{\vec{x}}-\underline{\vec{x}}')}$$

podríamos llamar $\vec{p}$ a $\underline{\vec{p}}$ porque es variable muda

Energías negativas hacia atrás en el tiempo

que por invariancia de Lorentz se puede calcular como

$$\langle \vec{x}, t | \vec{x}', t' \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \, 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \, e^{-i\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\,(t-t') + i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$= \langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle^* .$$

Con base en la equivalencia que hemos descubierto arriba, fuera del cono de luz (es decir, en un intervalo tipo espacio : $(x'-x)^2<0$) este propagador de antipartícula debe coincidir con el propagador de partícula $\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t\rangle$, así que debemos tener

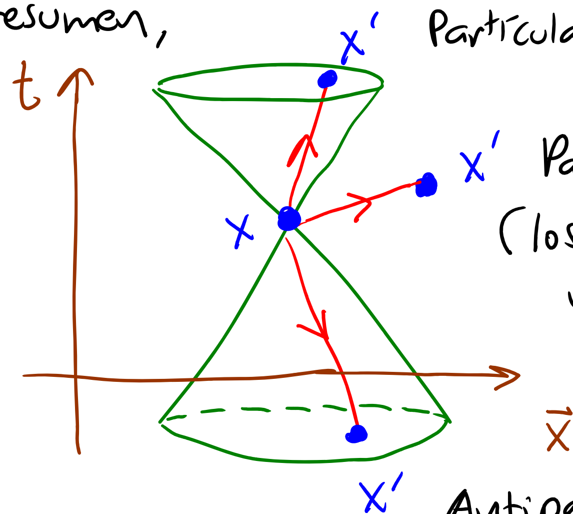
$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t\rangle = \langle \vec{x}, t | \vec{x}', t'\rangle = \langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t\rangle^* .$$

Y, efectivamente, vimos antes que para $t=t'$ el propagador es real. ✓

Ahora, si para $\underline{O}$ existen antipartículas que se mueven más rápido que la luz, lo mismo debe ser cierto para O (pues ningún observador es privilegiado). Pero entonces, por el mismo argumento matemático que usamos en el caso de la partícula, deben existir también antipartículas que viajan más lento que la luz (puesto que, restringiéndonos solo a energías positivas, el propagador no puede anularse dentro del cono).

lunes, 20 de agosto de 2007 10:29 a.m.

En resumen,



Partícula (propagador complejo)

Partícula o Antipartícula (los propagadores coinciden y son reales)

Antipartícula (propagador complejo) = partícula viajando al pasado

Podemos definir un propagador combinado, que toma las 2 posibilidades en cuenta: $x^\mu \equiv (t, \vec{x})$

$$G(x'-x) \equiv \Theta(\underbrace{x'^0 - x^0}_{t'-t}) \langle x' | x \rangle + \Theta(x^0 - x'^0) \langle x | x' \rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \left[\Theta(x'^0 - x^0) e^{-ip\cdot(x'-x)} + \Theta(x^0 - x'^0) e^{-ip\cdot(x-x')} \right]_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

$$E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

(La presencia de las funciones escalón Θ pareciera violar la invariancia de Lorentz, pero hemos visto que no es así.)