

TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

Ustedes saben ya describir una partícula cuántica

No relativista:

$$\vec{x}, \vec{p} \rightarrow \hat{x}, \hat{p} \text{ con } [\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\delta^{ij} \quad (\hbar=1) \quad \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

delta de Kronecker

$$\text{Hamiltoniano } H = \vec{p}^2/2m \rightarrow \hat{H} = \hat{p}^2/2m$$

Los estados con energía definida son $|\vec{p}\rangle$ con $E = \vec{p}^2/2m$.

↖ momento definido

Para una partícula relativista sabemos que

$$p^\mu \equiv (E, \vec{p}) = (m\gamma, m\gamma\vec{v}) \quad (c=1)$$

↖ $1/\sqrt{1-v^2}$

satisface

$$p^2 \equiv p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu \equiv E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad \leftrightarrow \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2},$$

↖ métrica de Minkowski = diag(+1, -1, -1, -1)

así que para una partícula cuántica relativista $\hat{H} = \sqrt{\hat{p}^2 + m^2}$,

y los estados con energía definida son $|\vec{p}\rangle$ con $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Aunque dista mucho de ser obvio, resulta que

$$\text{Partículas} + \text{Relatividad Especial} + \text{Mecánica Cuántica} \\ = \text{Teoría Cuántica de Campos}$$

¿Por qué campo? La respuesta corta: ¡porque el universo no está hecho de partículas, sino de campo!!

¿Qué es un campo? Por definición, un campo es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante del tiempo (matemáticamente, una función del espaciotiempo): $\varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi_{\vec{x}}(t)$

preferimos esta notación \nearrow

por relatividad

(Análogo a $\vec{x}_n(t)$ en sistema con N partículas \nwarrow índice continuo $\in \mathbb{R}^3$
 \nwarrow índice discreto $n=1, \dots, N$)

A partir de la definición, vemos que cualquier campo es un sistema con un número infinito (y no denumerable) de grados de libertad.

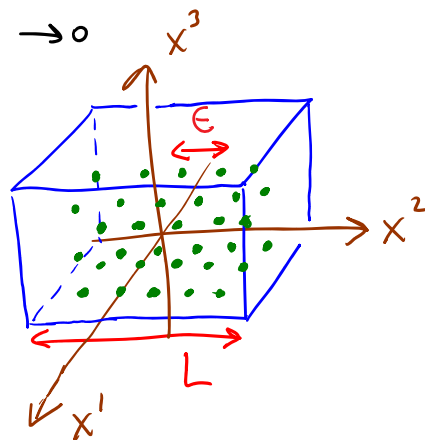
Se le puede pensar como el límite $L \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$

del caso con un volumen finito L^3 en un

espacio discretizado con espaciado ϵ ,

sistema que tendría $(L/\epsilon)^3$ grados de

libertad (retícula - en inglés, "lattice").



A ustedes les resultará ya muy familiar un ejemplo de campo: el campo electromagnético, descrito por 6 números en cada

lugar, $\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{B}(t, \vec{x}) \leftrightarrow F_{\mu\nu}(x)$ intensidad de campo (field strength),
 eléctrico magnético \nwarrow antisimétrico \nwarrow $\equiv x^{\mu\nu}$

o mejor dicho, por 4 números en cada lugar,

$$A_\mu(x) \equiv \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{potencial} \\ \text{escalar}}}{\Phi(t, \vec{x})}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{potencial} \\ \text{vectorial}}}{\vec{A}(t, \vec{x})} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(A)dri) potencial} \\ \text{electromagnético} \end{array}$$

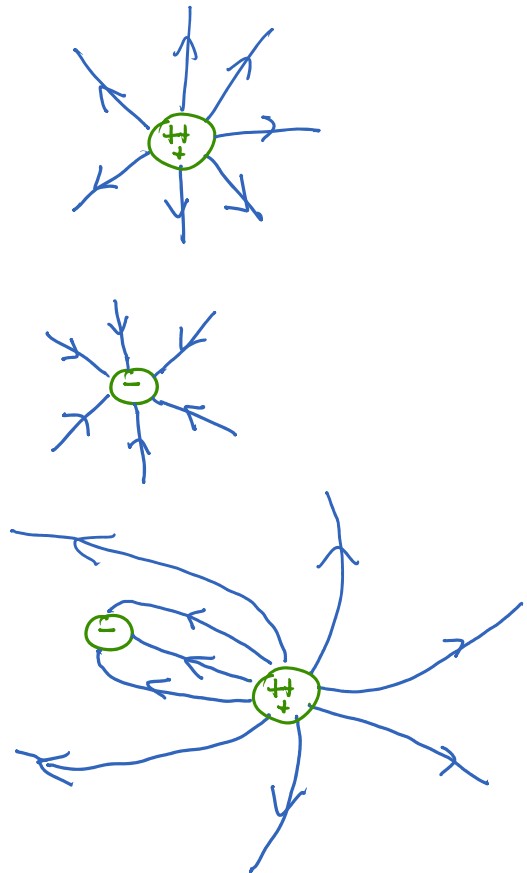
$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right\} \leftrightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

Vale la pena obtenerlos aquí con una adriación.

Cuando primero nos enseñan sobre \vec{E} y \vec{B} , visualizamos

que un imán o un objeto con carga eléctrica tiene (genera) su campo (que lo sigue cuando se mueve), que un segundo objeto tiene similarmente su propio campo, y que cuando ambos objetos están presentes sumamos su 2 campos para obtener el resultado total.

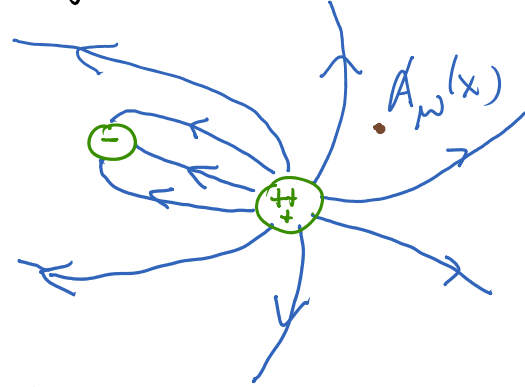
Pero éste NO es una buena manera de pensarlo.



Ya sea que haya uno, dos, muchos o ningún objeto, el campo electromagnético NO es "DE" ninguno de ellos: es un ente que llena siempre todo el espacio, y puede describirse dando 4 números en cada sitio.

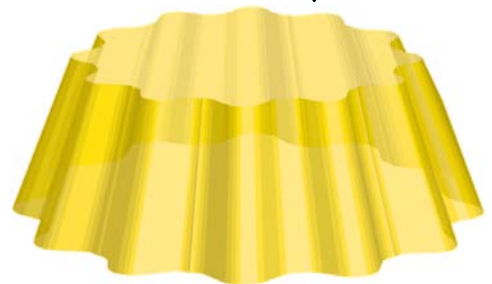
El valor de esos números SÍ depende de los objetos presentes; pero incluso cuando no hay ningún objeto, el campo electromagnético sigue estando ahí — es solo que los números son 0 en todo lugar, el campo está 'apagado'. El campo $A_\mu(x)$ es una propiedad de nuestro universo, preinstalada de fábrica.

Intuitivamente, podemos visualizarlo como una especie de 'gelatina' que llena absolutamente todo el universo y es capaz de vibrar (en un sentido abstracto) y sustentar ondas. Es justamente para describir cómo es que está vibrando que necesitamos especificar números en cada lugar.



$$\bullet A_\mu(x) = 0 \quad \forall x$$

2 El campo existe aún cuando no hay líneas / flechas



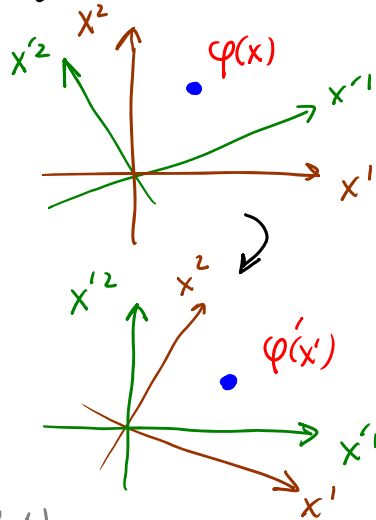
Por simplicidad, consideremos primero el campo más sencillo posible: un solo número real en cada x , que denotaremos $\varphi(x)$ (con $\varphi(x)^* = \varphi(x)$). Nos interesa estudiar campos relativistas (en el sentido de relatividad especial), es decir, con propiedades de transformación específicas bajo transformaciones de Lorentz
 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \equiv 3 \text{ rotaciones} + 3 \text{ empujones}$ ("boosts")
 $\Rightarrow x'_\mu y^\mu = x_\nu y^\nu$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \text{matriz } 4 \times 4 \text{ tal que} \\ \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \end{matrix}$ (que forman el grupo $SO(3,1)$)

Con $\varphi(x)$ solo tenemos un número en cada sitio, así que lo único decente que puede ocurrir cuando giramos nuestra cabeza (rotaciones) o pasamos caminando (empujones) es que ese número No cambie:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x') = \varphi(x)$$

\uparrow Cambia el nombre del punto
 cambi la función matemática

pero el valor en ese punto sigue igual



Esto es lo que se conoce como un campo escalar real.

Describiremos la dinámica de este campo a través de

la acción

$$S[\varphi(x)] \equiv \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

\uparrow corchetes denotan funcional

Lagrangiano

densidad Lagrangiana

Justo como en el caso de un sistema con un número finito de grados de libertad, las ecs. de mov. para el campo $\varphi(x)$ se deducen a partir del principio variacional — las soluciones clásicas $\varphi_{cl}(x)$ serán aquellas configuraciones donde la acción es estacionaria:

$$\varphi_{cl}(x) \rightarrow \varphi_{cl}(x) + \delta\varphi(x) \Rightarrow S[\varphi] \rightarrow S[\varphi_{cl} + \delta\varphi] \equiv S[\varphi_{cl}] + \delta S[\varphi_{cl}, \delta\varphi]$$

con $\delta S[\varphi_{cl}, \delta\varphi] = 0$ para cualquier variación $\delta\varphi(x)$ que

satisface condiciones de borde apropiadas en la frontera de la región de integración (normalmente $\int_{t_i}^{t_f} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x$, quizás también con $t_i \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow +\infty$).

Dado que $\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \vec{\nabla})$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x) \Rightarrow \partial_\mu \varphi(x) \rightarrow \partial_\mu \varphi(x) + \underbrace{\partial_\mu \delta\varphi(x)}_{\equiv \delta(\partial_\mu \varphi(x))}$$

$$\delta S[\varphi, \delta\varphi] \equiv S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi]$$

$$= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\varphi(x) + \delta\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x) + \partial_\mu \delta\varphi(x)) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \delta\varphi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \partial_\mu \delta\varphi(x) \right\}$$

$$\stackrel{\text{partes}}{=} \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \right) \right\} \delta\varphi(x),$$

expresión que se anula para $\phi(x)$ arbitrario solo si se satisface la ecuación de movimiento para $\phi(x)$,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)}$$

Ecuación de Euler-Lagrange

Sabemos que la acción $S[\phi]$ debe ser un número invariante bajo Lorentz, y $d^4x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ es invariante, así que a partir de $S = \int d^4x \mathcal{L}$ concluimos que la densidad lagrangiana debe ser también invariante, es decir, $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ debe ser una combinación de ϕ y $\partial_\mu \phi$ que sea escalar.

Claramente $\partial_\mu \phi$ es un vector de 4 \equiv vector covariante \equiv covector, así que no puede aparecer solo: para tener un escalar debemos

$$\text{formar la combinación } \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \eta^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \equiv (\partial\phi)^2$$

transforma como vector
 \equiv vector contravariante

$$= (\partial_t \phi)^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2$$

Si queremos que la ecuación de movimiento sea de segundo orden en las derivadas (que es la situación más común), nuestra densidad lagrangiana debe entonces tomar la forma

↙ elegimos por conveniencia, ajustando la normalización de φ

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)$$

Término "cinético" "Potencial"
 $\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2$

A partir de esta descripción lagrangiana, podemos generar también los ingredientes de la correspondiente descripción hamiltoniana. Definimos primero (la densidad de) el momento canónico conjugado a $\varphi(x)$,

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x) \quad (\text{análogo a } \vec{p}_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n})$$

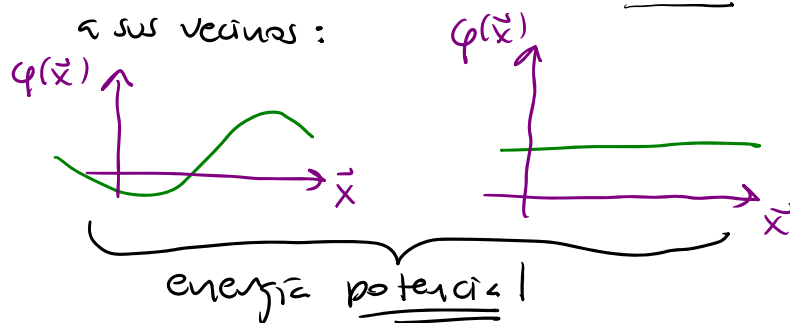
y utilizándolo (la), el Hamiltoniano

$$H \equiv \int d^3x (\pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}) \quad (\text{análogo a } H = \sum_n \vec{p}_n \cdot \dot{\vec{x}}_n - L)$$

$\equiv \mathcal{H}$ Densidad Hamiltoniana

$$= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + V(\varphi) \right]$$

Energía \rightarrow costo energético por variación espacial:
Cinética: cada $\varphi_{\vec{x}}$ está acoplado a sus vecinos:
 costo por encender el campo, incluso si tomamos un valor constante:
 costo por variación temporal



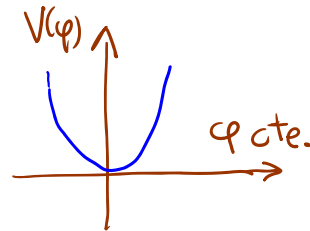
Lo más común es utilizar potenciales polinómicos,

$$V(\varphi) = C_1\varphi + C_2\varphi^2 + C_3\varphi^3 + C_4\varphi^4 + C_5\varphi^5 + \dots$$

↑ podemos cancelar corrientes apropiadamente $\varphi \rightarrow \varphi + \text{cte.}$

Empezaremos estudiando el caso

más sencillo, donde V es cuadrático:



Para que $\varphi=0$ sea un mínimo en

lugar de un máximo (y represente por tanto el valor preferido del campo) necesitamos tener $V''(0) = 2C_2 > 0$,

condición que es más fácil de recordar si adoptamos la notación $C_2 = \frac{1}{2}m^2$ (con m real), es decir, $m^2 \equiv V''(0)$.

Por razones que entenderemos en breve, un campo (no necesariamente escalar) con potencial cuadrático se llama un campo libre. El campo escalar libre se conoce también como campo de Klein-Gordon, y según hemos visto, su densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Lagrangiano de Klein-Gordon

y su densidad hamiltoniana (densidad de energía),

$$\mathcal{H}_{KG} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Hamiltoniana de Klein-Gordon

La ecuación de movimiento (Euler-Lagrange) es

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \Rightarrow \boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0} \quad \text{Ecuación de Klein-Gordon}$$

$$\underbrace{\quad}_{\equiv \square} \text{D'Alembertiano (Laplaciano)}$$

$$= \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$$

Igual que en el Hamiltoniano, en esta ecuación vemos que cada variable $\varphi_{\vec{x}}(t)$ está acoplada a sus

vecinos:

$$\partial_t^2 \varphi(\vec{x}, t) - \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{x}, t) + m^2 \varphi(\vec{x}, t) = 0$$

$$\partial_i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\varphi_{\vec{x} + \epsilon \hat{e}_i}(t) - \varphi_{\vec{x}}(t)]$$

↻ vector unitario en dirección i

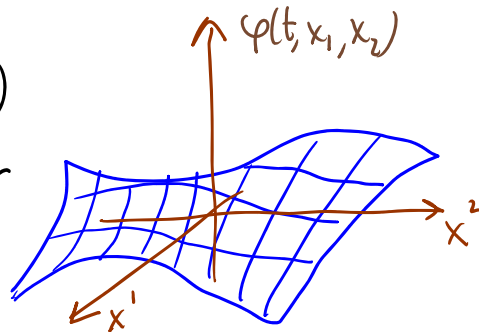
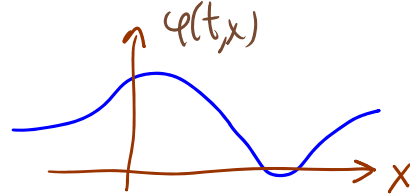
Es solo gracias a este acoplamiento que el campo es capaz de sustentar ondas - de hecho, si ponemos $m^2=0$ lo que tenemos es justamente

la llamada ecuación de ondas,

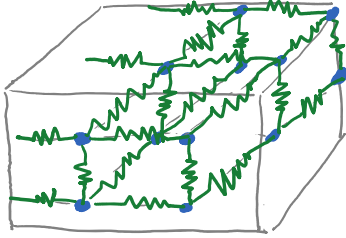
relevante para p.ej. una

cuerda de violín (cuya posición es descrita por un campo en $1+1$ dim)

o a la membrana de un tambor (campo en $2+1$ dim).



Vemos entonces que nuestro campo en 3+1 dim, $\varphi(t, \vec{x})$, en verdad es análogo a una GELATINA, o lo que es lo mismo,



a una colección de muchas pelotitas conectadas por resortes, en el límite donde el espaciamiento tiende a cero.

Por el acoplamiento entre puntos vecinos, el comportamiento de cada $\varphi_{\vec{x}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{x})$ (como el de cada pelotita) en general NO es sencillo. Pero para lidiar con las derivadas

especificar en la ecuación de movimiento $(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\varphi_{\vec{x}}(t) = 0$, podemos usar un truco familiar (de la cuerda, p.ej.): cambiar de variables por medio de una transformada de Fourier,

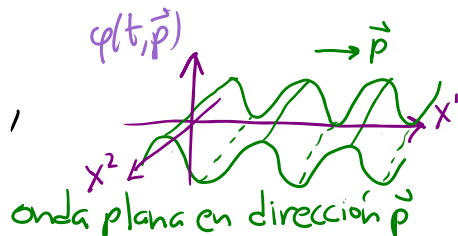
$$\varphi_{\vec{x}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{x}) \rightarrow \varphi_{\vec{p}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(t, \vec{x})$$

$$\left(\leftrightarrow \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(t, \vec{p}) \right),$$

$$\text{con } \varphi(t, \vec{x})^* = \varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi(t, \vec{p})^* = \varphi(t, -\vec{p}).$$

La ec. de mov. $(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = 0$ se convierte en

$$(\partial_t^2 + \underbrace{\vec{p}^2}_{\equiv E_{\vec{p}}^2} + m^2)\varphi(t, \vec{p}) = 0,$$



es decir, $\ddot{\varphi}(t, \vec{p}) = -E_{\vec{p}}^2 \varphi(t, \vec{p})$: cada $\varphi(t, \vec{p})$ es un oscilador armónico con frecuencia $\omega = E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$:

$$\varphi_{\vec{p}}(t) = \alpha_{\vec{p}} e^{-i\omega t} + \beta_{\vec{p}} e^{+i\omega t}, \text{ con } \beta_{\vec{p}} = \alpha_{-\vec{p}}^*$$

\hat{L} para tener
 $\varphi_{\vec{p}}^* = \varphi_{-\vec{p}}$

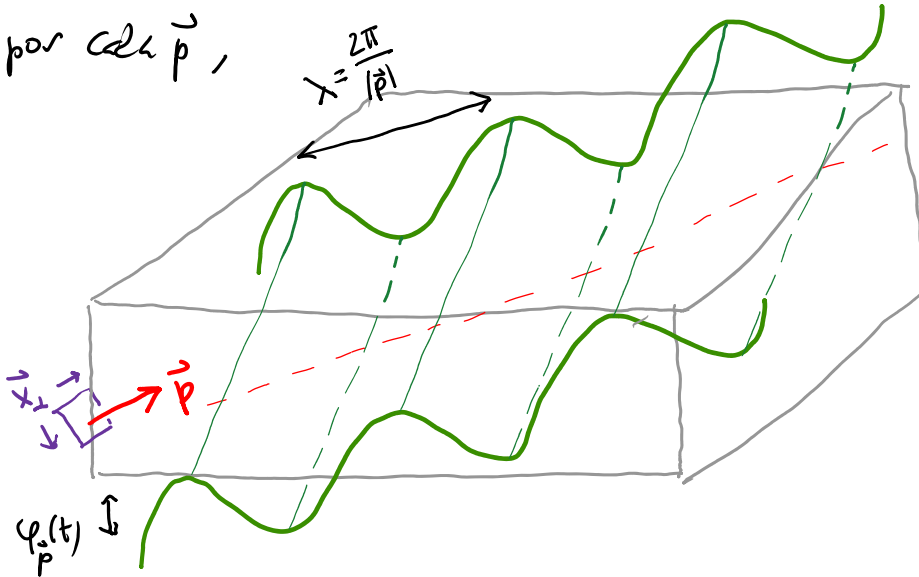
En otras palabras, hemos descubierto que los modos de Fourier son los modos normales del campo (compartimientos colectivos que oscilan armónicamente, tal como en una cuerda o en un sistema de péndulos con resortes), y nuestro campo libre $\varphi(t, \vec{x})$ no es entonces más que una colección infinita ($\varphi_{\vec{p}}(t) \forall \vec{p}$) de osciladores armónicos desacoplados — un sistema completamente análogo a una cuerda de violín, la membrana de un tambor, o una gelatina. El adjetivo "libre" para este campo se refiere justamente a que los modos de Fourier no interactúan entre sí (se superponen sin afectarse), que solo fue posible gracias a que la ec. de mov. es lineal en $\varphi \leftrightarrow \mathcal{L}$ es cuadrático en φ .
 Con esto entendemos perfectamente la manera L
 en que $\varphi(t, \vec{x})$ evolucionará a nivel clásico:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \alpha_{-\vec{p}}^* e^{iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \alpha_{-\vec{p}}^* e^{iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \end{aligned}$$

(números complejos)

que se fijan por condiciones iniciales

es simplemente una superposición de ondas planas viajeras, una por cada \vec{p} ,



Como en cualquier sistema mecánico, existe una conexión muy bonita entre las simetrías de un campo (transformaciones de x y/o de φ que no cambian la acción $S[\varphi]$) y la existencia de cantidades conservadas (es decir, que no cambian en el tiempo). Concretamente,

(cubri
rápido)

la transformación se puede hacer gradualmente

el teorema de Noether afirma que cada simetría continua da lugar a una ley de conservación. El teorema de hecho nos da una fórmula explícita para construir las cantidades conservadas a partir de los campos de la teoría (y sus derivadas).

Ver p.ej. los pp. 163-175 del curso

<http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes>

/indice.html#campos

Mencionaremos aquí solo 2 ejemplos:

- 1) Las 4 simetrías bajo traslaciones en el espaciotiempo, $x^\mu \rightarrow x^\mu + c^\mu$, dan lugar a 4 cargas conservadas,

$$P_\nu \equiv \int d^3x T^\nu = \int d^3x \left(\partial_\nu \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_\ell(x))} - \delta^\nu_0 \mathcal{L} \right) \quad \begin{matrix} \text{(cuadri-)} \\ \text{Momento} \end{matrix}$$

La carga para $\nu=0$ es la energía total de los campos,

$$P_0 = \int d^3x \left(\partial_0 \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_\ell(x))} - \mathcal{L} \right) = H \quad \begin{matrix} \text{Hamiltoniano} \\ \text{(cf. p. 8)} \end{matrix} \quad \checkmark$$

Densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} \equiv T^0_0$

y las 3 cargas con $\nu=i$ son el momento espacial

$$\vec{P} = - \int d^3x \vec{\nabla} \varphi_\ell \Pi_\ell$$

↑ signo por índice espacial subido: $P^i \equiv \int d^3x T^{0i}$ ↙ carga conservada

(Es importante NO confundir a la densidad de momento espacial

$T^{0i}(x)$ con la densidad de momento canónico $\Pi_\ell(x) \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi}_\ell$.)

↑ conjugado al campo

2) En una teoría con 2 campos escalares $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ (no necesariamente libres) que entran en el mismo pie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 - V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

tenemos invariancia bajo la 'rotación' (de los campos, no del

espacio)
$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi'_1(x) \\ \varphi'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix},$$

con θ un ángulo arbitrario (porque $\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$).

A diferencia de las traslaciones y Lorentz que son simétricos espatiotemporales, esta rotación es un ejemplo de lo que llamamos simetrías internas, porque no involucran cambios de las coordenadas x^μ .

Si a partir de φ_1 y φ_2 formamos el campo escalar complejo

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)),$$

← por convención

el lagrangiano se reescribe como

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - V(2\Phi^* \Phi),$$

y la rotación interna toma la forma más sencilla

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{i\theta} \Phi(x),$$

que evidentemente es una simetría.

Esta simetría continua da lugar a la carga conservada

$$Q = \int d^3x (\Phi^* \partial_t \Phi - \Phi \partial_t \Phi^*)$$

Cuando aprendamos cómo acoplar este campo $\Phi(x)$ al campo electromagnético $A_\mu(x)$, veremos que Q es ni más ni menos que la carga eléctrica.

Ahora, para que éste sea un curso de teoría cuántica de campos, ¿cómo cuantizar a nuestras gelatinas?

Sabemos que, para un sistema con un número finito de grados de libertad, la cuantización canónica consiste en promover las variables hamiltonianas básicas a operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert que describe a los estados del sistema, $H = \{|\psi\rangle\}$,

$$q_n(t), p_n(t) \rightarrow \hat{q}_n, \hat{p}_n$$

↑ coordenadas ↑ momentos

operadores independientes de t en el caso de Schrödinger

exigiendo que satisfagan las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{q}_n, \hat{p}_{n'}] = i \delta_{n,n'}, \quad [\hat{q}_n, \hat{q}_{n'}] = 0 = [\hat{p}_n, \hat{p}_{n'}]$$

$\hbar = 1$ → δ delta de Kronecker $\equiv \begin{cases} 1 & \text{si } n=n' \\ 0 & \text{si } n \neq n' \end{cases}$

La evolución dinámica de los estados $|\psi(t)\rangle$ es generada por el operador hamiltoniano $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) \equiv H(\hat{q}, \hat{p})$ a través de

la ecuación de Schrödinger $i\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$.

Equivalentemente, podemos pasar al caso de Heisenberg, donde los operadores son los que llevan la dependencia temporal,

$$\hat{q}_n(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{q}_n e^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{p}_n(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{p}_n e^{-i\hat{H}t},$$

las relaciones de conmutación canónicas se imponen a tiempos iguales,

$$[\hat{q}_n(t), \hat{p}_{n'}(t)] = i\delta_{n,n'}, \quad [\hat{q}_n(t), \hat{q}_{n'}(t)] = 0 = [\hat{p}_n(t), \hat{p}_{n'}(t)]$$

(en general $[\hat{q}_n(t), \hat{q}_n(t')] \neq 0$), los estados NO evolucionan con el tiempo ($|\psi\rangle_{\text{Heisenberg}} \equiv |\psi(t=0)\rangle_{\text{Schrödinger}}$ codifica

toda la historia del sistema), y la evolución dinámica de los operadores $\hat{O}(t)$ es generada por \hat{H} a través de la ecuación de Heisenberg

$$\frac{d\hat{O}(t)}{dt} = i[\hat{H}, \hat{O}(t)] + \frac{\partial \hat{O}(t)}{\partial t}$$

← posible dependencia explícita de t
(NO a través de $\hat{q}(t), \hat{p}(t)$)

Para cuantizar a nuestro campo escalar $\varphi(t, \vec{x}) \equiv \varphi_{\vec{x}}(t)$ con lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi)$ (sistema con un

número infinito y no numerable de grados de libertad), aplicamos exactamente la misma receta:

convertimos al campo $\varphi(t, \vec{x})$ ^{← una f en cada \vec{x}} y a su momento canónico conjugado $\Pi(t, \vec{x}) = \dot{\varphi}(t, \vec{x})$ ^{← una p en cada \vec{x}} en operadores en el cuadro de Schrödinger, $\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})$, o en el de Heisenberg,

$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\varphi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t}$, $\hat{\Pi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\Pi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t}$,
^{↑ preferimos, por relatividad}
 e imponemos las relaciones de conmutación habituales:

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\Pi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')] \\ [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')] &= i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}} \quad \begin{array}{l} \text{OJO:} \\ t = t' \end{array}$$

donde la delta de Dirac $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} \infty & \text{si } \vec{x} = \vec{x}' \\ 0 & \text{si } \vec{x} \neq \vec{x}' \end{cases}$ tal que $\int d^3x f(\vec{x}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = f(\vec{x}')$ es el reemplazo natural de la delta de Kronecker que tendríamos para variables discretas.

Se puede mostrar que las ecuaciones de Heisenberg para los operadores $\hat{\varphi}(t, \vec{x})$ y $\hat{\Pi}(t, \vec{x})$ se combinan para implicar que, como esperaríamos, $\hat{\varphi}(t, \vec{x})$ satisface la misma ecuación de movimiento que era satisfecha por el campo $\varphi(t, \vec{x})$ a nivel clásico.

En el caso de un campo escalar real libre, la

ecuación de movimiento es la de Klein-Gordon (p. 10),

$$\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \hat{\varphi}(t, \vec{x}) = 0},$$

lo cual implica, tal como en las pp. 11-12, que los operadores asociados a los modos de Fourier

$$\hat{\varphi}_{\vec{p}}(t) \equiv \hat{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{\varphi}(t, \vec{x})$$

obedecen la ecuación del oscilador armónico

$$\partial_t^2 \hat{\varphi}(t, \vec{p}) = -\omega^2 \hat{\varphi}(t, \vec{p}) \quad \text{con frecuencia } \omega = E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

El punto central aquí es que ya habíamos aprendido que a nivel clásico un campo libre es una colección de osciladores armónicos desplazados (uno por cada \vec{p}), pero es obvio entonces que desde pequeños sabemos cómo cuantizarlo!

Recordemos que para un oscilador armónico es muy útil definir los operadores de ascenso y descenso \hat{a}^\dagger y \hat{a} a través de

$$\hat{x} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger),$$

← reescalé
x y p para
abrir la
masa M (→ 1)

$$\text{de modo que } [\hat{x}, \hat{p}] = i \iff [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$$

$$\text{y } \hat{H} = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \hat{x}^2 = \frac{\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

↪ M=1 ↩
operador de número
≡ \hat{N}

Con estos ingredientes es fácil generar el conjunto completo de autoestados (eigenestados) de \hat{H} , es decir, de estados con energía definida:

* El estado base (o fundamental) es

$$|0\rangle \text{ tal que } \hat{a}|0\rangle = 0, \text{ y tiene energía } E = \frac{\omega}{2}.$$

\uparrow operador de descenso \uparrow "energía de punto cero"

* El primer estado excitado es (salvo normalización)

$$|1\rangle \equiv \hat{a}^\dagger |0\rangle, \text{ y tiene energía } E = \omega\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

\uparrow operador de ascenso

⋮

* El enésimo estado excitado es (salvo normalización)

$$|n\rangle \equiv (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \text{ y tiene energía } E = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

En otras palabras, $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ ($\hat{H} = \omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$).

\uparrow $\hat{a}^\dagger \hat{a}$

Regresando a nuestro campo escalar libre real ($\varphi^*(x) = \varphi(x) \Rightarrow \hat{\varphi}^\dagger(x) = \hat{\varphi}(x)$), sabemos que el operador $\hat{\varphi}(t, \vec{p})$ y su momento conjugado $\hat{\pi}(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{\pi}(t, \vec{x})$ son los que juegan el papel de \hat{x} y \hat{p} para cada oscilador armónico, así que podemos piratearnos impunemente

La definición de los operadores de ascenso y descenso
 $\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$:

$$\hat{\varphi}(\vec{p}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{\chi} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}))$$

\swarrow operador de Schrödinger
 y \searrow (o Heisenberg a $t \rightarrow \infty$)

\swarrow signo tal que $\hat{\varphi}(\vec{p})^{\dagger} = \hat{\varphi}(-\vec{p})$
 $\Rightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})^{\dagger} = \hat{\varphi}(\vec{x})$ (campo real)

$$\hat{\Pi}(\vec{p}) \equiv -i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{p} \equiv -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}))$$

A partir de las relaciones de conmutación para
 $\hat{\varphi}(\vec{p})$ y $\hat{\Pi}(\vec{p})$ ($\leftrightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})$ y $\hat{\Pi}(\vec{x})$) es fácil deducir que

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (\text{análogo a } [\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}] = \delta_{ij})$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}]$$

Tenemos entonces

$$\hat{\varphi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}} + e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}),$$

\swarrow cambiando $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ en el segundo término

$$\hat{\Pi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} -i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}} - e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}), \quad \underline{2}$$

Con esto podemos calcular el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}^2 \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} E_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}) \quad \leftarrow \text{resultado espereado} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(E_{\vec{p}} \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}}_{\equiv \hat{N}_{\vec{p}}} + \frac{1}{2} E_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}] \right) \quad \leftarrow \text{nuestro primer} \\ & \quad \text{operador de número} \quad \text{infinito} \\ & \quad \text{para el oscilador } \vec{p} \quad (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}) = \infty \\ & \quad \text{(cf. } \hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^{\dagger}) = \omega (\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \frac{1}{2}) \text{)} \end{aligned}$$

El segundo término en \hat{H} claramente representa la 'energía de punto cero' del oscilador armónico etiquetado por \vec{p} , es decir, la energía que tiene ese oscilador cuando se encuentra sin excitar, en su estado base. Sabemos que, en ausencia de la gravedad, solo importan diferencias de energía, por lo que podemos por simplicidad ignorar estas constantes y trabajar con el Hamiltoniano

$$:\hat{H}: \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{N}_{\vec{p}},$$

Energía de cada modo de Fourier

que nos da la energía total del sistema medida por encima de la energía que tiene el campo sin excitar. En esta expresión hemos usado el

simbolo $::$, que denota lo que se conoce como "ordenamiento normal", el cual consiste en colocar todas los \hat{a}^\dagger 's a la izquierda de los \hat{a} 's

$$(p.ej., : \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} : \equiv \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}, \quad : \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger : \equiv \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \\ : \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger : \equiv \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}}, \text{ etc.})$$

De manera similar, se encuentra que el operador de momento espacial asociado al campo (ver p. 14)

$$\hat{\vec{P}} = - \int d^3x \vec{\nabla} \hat{\phi} \hat{\Pi}$$

se reduce a

$$\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{N}_{\vec{p}}.$$

↙ momento espacial de cada modo

Colocando \hat{H} , podemos también obtener el operador de campo en el orden de Heisenberg,

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \exp(i\hat{H}t) \hat{\phi}(\vec{x}) \exp(-i\hat{H}t)$$

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right),$$

↖ "frecuencia positiva" ↗ "frecuencia negativa"

que podemos resumir usando $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ con $p^0 = E_{\vec{p}}$,

"frec. positiva" "frec. negativa"

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

De hecho, en la p.13 habíamos visto que, para el campo clásico, la solución más general a la ec. de Klein-Gordon es

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \alpha_{\vec{p}}^* e^{iE_{\vec{p}}t - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right),$$

↖ números complejos

así que lo único que ha ocurrido es que al promover

$$\varphi(x) \rightarrow \hat{\varphi}(x) \quad \text{tenemos} \quad \alpha_{\vec{p}} \rightarrow \hat{\alpha}_{\vec{p}} \equiv \frac{\hat{a}_{\vec{p}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \quad \leftarrow \text{operador de descenso}$$

Entonces, aunque no lo habían notado, ¡desde antes de venir a este curso ustedes conocen ya la manera de cuantizar un campo libre (= sektiona con ec. de mov. lineal, o también una cuerda o una membrana), y de obtener fácilmente sus estados con energía definida!

Justo como hicimos para 1 oscilador armónico en la p.20, podemos construir el espacio de autoestados de $:\hat{H}:$ (y \hat{H}) usando los operadores de ascenso y descenso. Identificamos primero al estado base (o fundamental) para el campo como aquel en el que

todos los osciladores están sin excitar:

$$|0\rangle \equiv |0, 0, \dots\rangle \text{ tal que } \hat{a}_{\vec{p}} |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}, \langle 0|0\rangle = 1.$$

↑ en realidad no podemos hacer una lista exhaustiva
(la etiqueta \vec{p} es no denumerable)

Actuando sobre este estado con un solo operador de ascenso,
obtenemos los estados con 1 solo oscilador excitado:

$$|\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle \quad (\equiv |0, 0, \dots, 1, 0, \dots\rangle)$$

oscilador número \vec{p}

donde hemos elegido la normalización de tal manera que

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{p}'}} \sqrt{2E_{\vec{p}}} (\langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}'}) (\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle) \\ &= \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{p}'}, \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}] |0\rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad \leftarrow \text{porque el término } -\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'} \text{ da cero al actuar sobre } |0\rangle \\ &= (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned}$$

combinación invariante bajo Lorentz

¿Cuál es la energía de estos estados?

Usando $:\hat{H}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}$ vemos que

$$\bullet \quad :\hat{H}: |0\rangle \propto \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} |0\rangle = 0,$$

es decir, $|0\rangle$ tiene energía $E=0$ (resulta esperado porque omitimos la energía de punto cero);

$$\bullet \quad : \hat{H} : | \vec{p} \rangle = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}'} \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger}_{[\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger]} | 0 \rangle \sqrt{2E_{\vec{p}}}$$

$[\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) | 0 \rangle$
porque el segundo término da 0

La delta de Dirac sirve para eliminar la integral, así que

$$: \hat{H} : | \vec{p} \rangle = E_{\vec{p}} \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = E_{\vec{p}} | \vec{p} \rangle,$$

que es el resultado esperado para el primer nivel excitado de un oscilador con frecuencia $\omega = E_{\vec{p}}$. ($E = \omega(1 + \frac{1}{2})$)

Con un cálculo idéntico, usando $\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$ (p.25), podemos obtener

$$\hat{\vec{P}} | 0 \rangle = 0, \quad \hat{\vec{P}} | \vec{p} \rangle = \vec{p} | \vec{p} \rangle.$$

Vemos entonces que el estado $| \vec{p} \rangle$ del campo (↔ onda plana \vec{p} lo menos energética posible en nuestra gelatina) tiene momento espacial \vec{p} y energía $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ (su cuadrimomento p^μ satisface la condición de capa de masa " $p^2 = m^2$ " mass shell), ¡¡justamente igual que una partícula relativista libre, con momento \vec{p} y masa m !!

Por esta razón llamamos a $| 0 \rangle$ ($\neq | \vec{0} \rangle$) el "Vacío" (= estado sin partículas), y a $| \vec{p} \rangle$ el estado con 1 partícula (de momento \vec{p}).

13

Ahora, hemos visto que $|\vec{p}\rangle$, el estado donde apenas 1 oscilador está en su primer nivel excitado, describe a 1 partícula, ¿pero que significan tienen los estados donde ese mismo oscilador está en un nivel más alto de excitación, o donde excitamos a más de 1 oscilador?

Si definimos " $1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots$ " ó " $1, 0, 0, \dots, 2, 0, \dots$ "

$$|\vec{p}, \vec{p}'\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \sqrt{2E_{\vec{p}'}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} |0\rangle \quad (= |\vec{p}', \vec{p}\rangle)$$

tenemos

↑ porque las \hat{a} 's conmutan

$$\begin{aligned} \hat{H} |\vec{p}, \vec{p}'\rangle &= \sqrt{2E_{\vec{p}}} \sqrt{2E_{\vec{p}'}} \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}''} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} |0\rangle \\ &\quad \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}}_{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}'' - \vec{p}) \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}} \\ &\quad \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}}_{\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}'' - \vec{p}') \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2E_{\vec{p}}} \sqrt{2E_{\vec{p}'}} \left(E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle + E_{\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} |0\rangle \right)$$

$$= (E_{\vec{p}} + E_{\vec{p}'}) |\vec{p}, \vec{p}'\rangle,$$

y en un cálculo idéntico, $\hat{P} |\vec{p}, \vec{p}'\rangle = (\vec{p} + \vec{p}') |\vec{p}, \vec{p}'\rangle$.

Es decir, $|\vec{p}, \vec{p}'\rangle$ es 1 estado con 2 partículas

relativistas libres (y en particular, desacopladas entre sí),

en masa m , cuyos momentos espaciales son \vec{p} y \vec{p}' .

Más en general, el punto es que el operador de número $\hat{N}_{\vec{p}} \equiv \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$ realmente calcula el nivel de excitación del modo de Fourier \vec{p} , y por ello se encuentra que $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle$ es un estado con n partículas idénticas libres con masa m y momentos $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$, cuya energía y momento totales son

$$E = E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2} + \dots + E_{\vec{p}_n} \quad \text{y} \quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n .$$

Un punto que vale la pena resaltar es que nuestro campo / teoría cuántica nos da la posibilidad de hablar de un número cualquiera de partículas.

El espacio de Hilbert asociado,

$$H = |0\rangle \oplus \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ partícula} \\ |\vec{p}\rangle \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ partículas} \\ |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \end{array} \right\} \oplus \dots$$

se conoce por su estructura como "espacio de Fock".

En este contexto, los operadores de ascenso $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y descenso $\hat{a}_{\vec{p}}$ se conocen respectivamente como

operadores de creación y aniquilación, porque sirven precisamente para "crear" o "aniquilar" partículas:

$$\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \propto |\vec{p}, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle ,$$

$$\hat{a}_{\vec{p}} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \propto |\vec{p}_1, \dots, \cancel{\vec{p}_i}, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad \text{si } \vec{p} = \vec{p}_i$$

$$(\text{= } 0 \text{ si } \vec{p} \notin \{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\}) .$$

En resumen, hemos encontrado que los espacios de Hilbert de 2 sistemas que a primera vista parecían muy diferentes, un campo escalar y una colección de un número arbitrario ($n=0,1,2,\dots$) de partículas sin espín, ¡en realidad coinciden a la perfección!

El acuerdo incluye no solo a los números cuánticos que etiquetan a los estados (\vec{p} 's), sino también a las energías, y por tanto, a la evolución temporal. Los 2 sistemas resultan ser totalmente indistinguibles:

¡¡ las partículas relativistas sin espín son en verdad pequeñas excitaciones cuánticas de un campo escalar !!

La misma historia aplica para un campo escalar libre complejo $\hat{\Phi}(x)$ (\leftrightarrow 2 campos reales con las mismas propiedades), salvo que, al no tener ya la restricción de realidad o hermiticidad del campo ($\hat{\Phi}^\dagger \neq \hat{\Phi}$), para cada \vec{p} obtenemos no 1 sino 2 parejas de operadores de creación y aniquilación:

$$\hat{\Phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}} = \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$\hat{\Phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

$$\text{con } [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger],$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}].$$

Las excitaciones de este campo son entonces de 2 tipos distintos, $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ y $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$, aunque corresponden a partículas con la

misma masa m . En la p.16 vimos que, asociada a la simetría interna $\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Phi(x)$,

existe una carga conservada $Q = \int d^3x (\Phi^* \partial_t \Phi - \Phi \partial_t \Phi^*)$,

que al acoplar a A_μ será ni más ni menos que la carga eléctrica. A nivel cuántico Q se convierte en

el operador $\hat{Q} = \int d^3x (\hat{\Phi}^\dagger \partial_t \hat{\Phi} - \hat{\Phi} \partial_t \hat{\Phi}^\dagger)$, que en términos de operadores de creación/aniquilación toma la forma

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}})$$

← para el campo real $\hat{b}_{\vec{p}} = \hat{a}_{\vec{p}}$ y $\therefore \hat{Q} = 0$

Con esto vemos que las partículas creadas por $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$, aunque tienen la misma masa, se distinguen porque tienen carga eléctrica opuestas (+1 y -1, respectivamente).

Es decir, el campo escalar complejo tiene como excitaciones a partículas cargadas, ¡junto con sus antipartículas!

↑ = partículas si $\hat{\psi} = \hat{\psi}^\dagger$ ($\hat{Q} = 0$)

En el mundo real, ejemplar de partículas sin espín, asociadas por tanto a campos escalares, son el bosón de Higgs (partícula elemental?) y el pión (esteb ligado).

Similarmemente, campos No escalares (aquellos que si cambian de una cierta manera bajo rotaciones y empujones) dan lugar a partículas con espín (cuyo aspecto si cambia de una manera específica cuando giramos la cabeza o paramos caminando):

- los fotones (espín 1) son excitaciones del campo electromagnético $A_{\mu}(x)$, un campo vectorial real.
- los electrones y antielectrones (espín $1/2$), son excitaciones del campo del electrón $\psi(x)$ un campo "espinorial" complejo.
 ← índice de espín oculto: 4 números complejos
- Cada una de las partículas restantes del Modelo Estándar (junto con su antipartícula), es igualmente una excitación en un campo correspondiente (materia \leftrightarrow campos espinoriales, fuerzas \leftrightarrow campos vectoriales)

Así que, como prometimos desde el principio del curso, el universo en verdad está hecho no de partículas, sino de campos (gelatinosos)!!

$$\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}$$

Regretando al caso escalar libre, sabemos que $\hat{\phi}(\vec{p})|0\rangle \propto |\vec{p}\rangle$,
y podemos encontrar una interpretación física directa para $\hat{\phi}(\vec{x})$
notando que

$$\hat{\phi}(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) |0\rangle$$

$$\stackrel{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |\vec{p}\rangle \equiv |\vec{x}\rangle$$

Combinación invariante de Lorentz

estados relativistas
con posiciones definidas
(tanto como es posible)

sería $\cong m$ en
caso no relativista

sería $\langle \vec{p} | \vec{x} \rangle$ en caso no relativista

Es decir, $\hat{\phi}(\vec{x})$ es un operador que crea (o destruye)

una partícula localizada en \vec{x} .

Pasando al cuadro de Heisenberg, se encuentra similarmente
que $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ crea/destruye una partícula en \vec{x} al tiempo t ,

$$\hat{\phi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |0\rangle \equiv |x\rangle$$

Vale la pena destacar que la aparición de t en
 $|x\rangle \equiv |x^{\mu}\rangle = |t, \vec{x}\rangle$ No se debe a que estemos
hablando de un estado en el cuadro de Schrödinger:

$|x\rangle$ es por definición un estado en el cuadro de Heisenberg, que tiene la propiedad de que, si lo examinamos en t , encontraremos a la partícula en \vec{x} , y es por eso que t figura como parte del nombre del estado.

En el caso de un campo complejo, recordando (p.31) que $\hat{\Phi} \sim \hat{a} + \hat{b}^\dagger$ y $\hat{\Phi}^\dagger \sim \hat{a}^\dagger + \hat{b}$, el enunciado correspondiente es que

$\hat{\Phi}(x)$ destruye una partícula o crea una antipartícula
localizada en x

$\hat{\Phi}^\dagger(x)$ crea una partícula o destruye una antipartícula :
localizada en x

$$\hat{\Phi}^\dagger(x) |0\rangle \equiv |x, n\rangle, \quad \hat{\Phi}(x) |0\rangle \equiv |x, \bar{n}\rangle.$$

↑ nombre de partícula
(p.ej. π^+)

↑ antipartícula
correspondiente
(p.ej. π^-)

Habiendo entendido lo anterior, podemos ahora hacer la única pregunta física que nos falta explorar en esta teoría libre. Dado que las partículas no interactúan, lo único que pueden hacer es propagarse.

libremente de un sitio a otro. Es interesante entonces preguntarnos qué tan probable es que tal cosa ocurra.

Concretamente, si $t' > t$ y sabemos que la partícula está en \vec{x} al tiempo t , ¿cuál es la amplitud de probabilidad de que la encontremos en \vec{x}' al tiempo t' ?

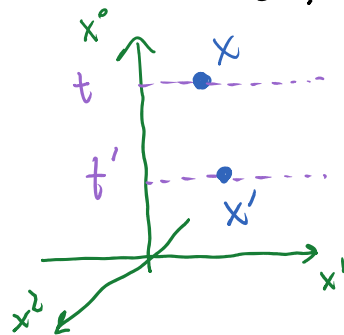
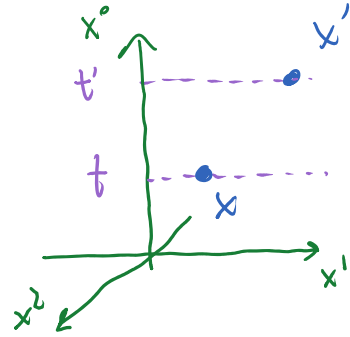
Sabiendo que el primer dato corresponde al estado $|x\rangle$ y el segundo a $|x'\rangle$ (en el axioma de Heisenberg), la respuesta está dada simplemente por el traslate (producto interno) entre ambos estados,

$$\langle x' | x \rangle = \langle 0 | \hat{\varphi}(x') \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle .$$

↑ crea partícula en x
↓ aniquila partícula en x'

Si x fuera en cambio posterior a x' ($t > t'$), en el uso cotidiano del lenguaje nos interesaría la amplitud de propagación de x' a x (y no al revés),

$$\langle x | x' \rangle = \langle 0 | \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') | 0 \rangle = \langle x' | x \rangle^* .$$



Es natural (y útil) definir entonces una amplitud de propagación que pueda referirse a cualquiera de las 2 opciones, según corresponda:

$$G(x', x) \equiv \langle x' | x \rangle \theta(x'^0 - x^0) + \langle x | x' \rangle \theta(x^0 - x'^0)$$

$$= \langle 0 | (\hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) \theta(x'^0 - x^0) + \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \theta(x^0 - x'^0)) | 0 \rangle$$

$$\equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) \} | 0 \rangle$$

↑ orden temporal: ordenar operadores de modo que el tiempo aumente de derecha a izquierda

función escalón (de Heaviside)

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Esta combinación se conoce como el propagador de Feynman, y es habitual representarlo como una línea que conecta a los eventos x y x' , ahora denotarlo solo esquemáticamente, como puntos que No hacen referencia a un diagrama espaciotemporal específico.



la línea no se refiere a una trayectoria definida: ¡la partícula es cuántica!

La invariancia bajo transformaciones

en el espaciotiempo implica que $G(x', x) = G(x - x')$.

El cálculo de este propagador para nuestro campo libre

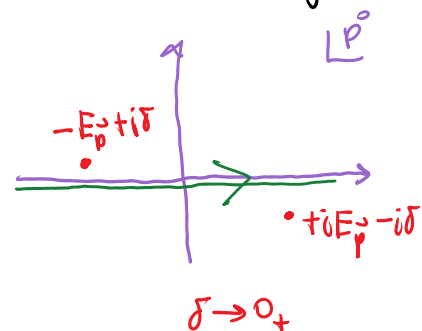
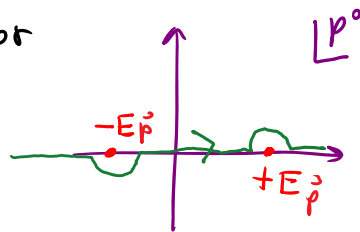
no presenta ninguna dificultad conceptual (¡estamos lidiando solo con osciladores armónicos!); pero no nos detendremos a hacerlo (ver ejercicio 4). El resultado es sencillo y se puede escribir en una forma manifiestamente invariante bajo Lorentz:

$$G(x', x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2}$$

Propagador de Feynman para campo escalar libre (Klein-Gordon)

$$\hookrightarrow (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_p^2$$

donde la novedad integral sobre p^0 significa que los orden planes que tenemos aquí están fuera de la capa de masa (off-shell), $p^0 \neq E_p$ ($p^2 \neq m^2$), y requiere una receta específica para lidiar con los polos simples que el integrando tiene en $p^0 = \pm E_p$, receta indicada en el diagrama de la derecha (equivocar los polos en breves excursiones en el plano complejo para la variable de integración p^0). Esto es equivalente a integrar sobre p^0 real pero desplazar los polos un poquito,



por lo que también es frecuente escribir

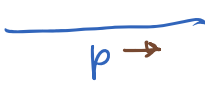
$$G(x', x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0_+$$

($\epsilon \equiv 2E_p \delta$)

Más fácil de recordar, e igualmente útil, es la transformada de Fourier

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad \text{ó} \quad \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Propiedad de Feynman
en espacio de momentos
(para Klein-Gordon)

que es habitual representar como  $p \rightarrow$ ↖ no se indican puntos inicial y final

flecha optativa para indicar el sentido en el que fluye p^M : $p \rightarrow = -p \leftarrow$

En el caso de un campo escalar complejo, definir

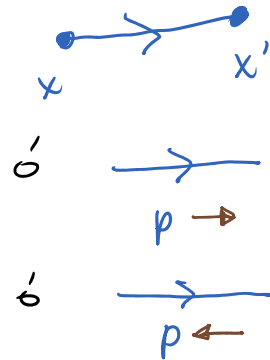
$$G(x', x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}(x') \hat{\Phi}^\dagger(x) \} | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \hat{\Phi}(x') \hat{\Phi}^\dagger(x) | 0 \rangle & \text{si } x' > x \\ \langle 0 | \hat{\Phi}^\dagger(x) \hat{\Phi}(x') | 0 \rangle & \text{si } x' < x \end{cases}$$

↑ crea partícula
↑ crea antipartícula

$$\left(\leftrightarrow G^*(x', x) = \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}^\dagger(x') \hat{\Phi}(x) \} | 0 \rangle \right),$$

y es habitual denotarlo como una línea con flecha que

indica (por convención) la dirección en la que se propagará la partícula (opuesta a la dirección de propagación de la antipartícula).



El resultado para $G(x', x)$ del campo escalar complejo es el mismo que vimos ya para el campo real.

Recordar que nuestro campo tiene además el hecho que describe a un número arbitrario de partículas, podemos interesarnos también calcular la amplitud de probabilidad de empezar con algún número n de partículas en x_1, \dots, x_n y terminar con otro número n' de partículas en $x'_1, \dots, x'_{n'}$. Esta amplitud está codificada en el correlador (o función de correlación, o función de Green) de N puntos

$$G_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x_N) \} | 0 \rangle$$

(con $N = n + n'$ y $x_{n+j} \equiv x'_j$).

← notar que $G(x', x) \equiv G_2(x', x)$

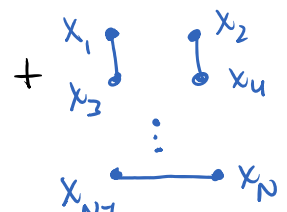
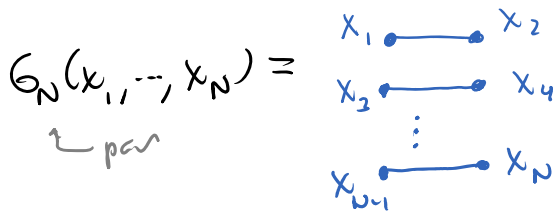
Pero en la teoría libre, las partículas no se interactúan unas a otras, y el número de partículas no cambia ($n = n' \Rightarrow N$ debe ser par), así que conociendo la

amplitud de propagación de 1 partícula tenemos ya toda la información necesaria para el caso general. Usando el llamado "teorema de Wick" (ver ejercicio 5e), es posible mostrar que

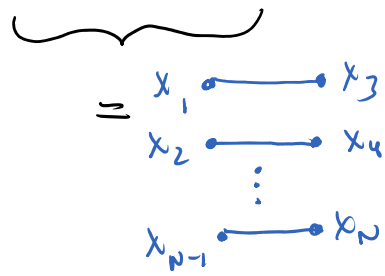
$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ es } \underline{\text{impar}} \\ G(x_1, x_2) G(x_3, x_4) \dots G(x_{N-1}, x_N) \\ + G(x_1, x_3) G(x_2, x_4) \dots & \text{si } N \text{ es } \underline{\text{par}} \\ + \text{todas las otras permutaciones} \end{cases}$$

que se puede visualizar con dibujitos:

← todas las $\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!}$



+ ... opciones entran en el mismo pie, porque las particulares son idénticas



= Suma sobre todas las "Diagramas de Feynman"

con N puntos x_1, \dots, x_N conectados por líneas (donde la presencia de más de una línea representa el producto de los G correspondientes)

Hasta ahora hemos hablado de un

campo libre \leftrightarrow \mathcal{L} cuadrático (ec. de mov. lineal)

\leftrightarrow Modos de Fourier desacoplados

\leftrightarrow Partículas no interactuantes

Si agregamos a \mathcal{L} términos cúbicos en φ o más altos,

la ec. de mov. para φ ya no será lineal, y los modos

de Fourier $\varphi(t, \vec{p})$ no estarán ya desacoplados (\therefore no serán modos normales). La situación se vuelve bastante

confusa porque este cambio no solo hace que las

partículas interactúen entre sí, sino que modifica

incluso la definición misma de lo que es una partícula

$|\vec{p}\rangle$ (y \therefore también del vacío $|0\rangle$). El punto clave es

que al permitir que las viejas partículas (\leftrightarrow modos de

Fourier) interactúen una con otra, inevitablemente

acaban también interactuando consigo mismos.

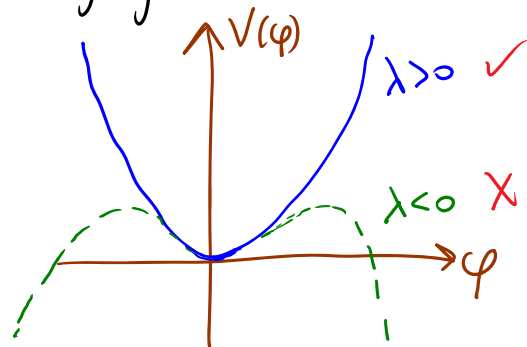
La relación entre el campo y las partículas

será mucho más sutil.

Para la teoría libre, descubrimos/entendimos la relación entre el campo $\tilde{\varphi}(x)$ y las partículas asociadas (sus "cuantos" básicos \leftrightarrow excitaciones más pequeñas posibles) solo después de resolver de forma exacta la ecuación de Klein-Gordon. Y para el caso de un campo interactuante, no seremos capaces de semejante proeza, porque la ecuación de movimiento es no lineal.

Para ser más concretos, consideremos la teoría de un campo escalar real con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2}_{\text{Término Cinético}} - \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv -V(\varphi)} \quad \text{Energía Potencial}$$



El parámetro λ , que determina la intensidad de las interacciones, se conoce como constante de acoplamiento, o simplemente acoplamiento.

El momento canónico conjugado a $\varphi(x)$ sigue siendo

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x), \quad \text{y el proceso}$$

de cuantización involucrará por supuesto el reemplazo

$$\varphi(x), \pi(x) \longrightarrow \hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x) \quad (\text{en el cuadro de Heisenberg})$$

con las reglas de conmutación usuales

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \underbrace{\hat{\pi}(t, \vec{x}')}_{\dot{\hat{\varphi}}(t, \vec{x}')}] &= i \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}), \\ [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] &= 0 = [\hat{\pi}, \hat{\pi}]. \end{aligned}}$$

Pero la ec. de Heisenberg para $\hat{\varphi}(x)$ (que coincide con la ec. de mpv. clásica)

$$(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi}(x) = -\frac{\lambda}{3!}\hat{\varphi}^3(x)$$

es No lineal, y $\therefore \hat{\varphi}(x)$ No puede ya expresarse como una combinación lineal de ondas planas con coeficientes

$$\hat{a}_p \text{ y } \hat{a}_p^\dagger.$$

\equiv teoría débilmente acoplada

Por otro lado, si las interacciones son débiles ($\Leftrightarrow \lambda \ll 1$),

esperaríamos que la dinámica del campo se pueda aproximar

con una expansión perturbativa en potencias de λ , que tengamos como punto de partida al campo libre ($\lambda=0 \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kb}}$).

Notando que podemos separar al Hamiltoniano

$$H = \underbrace{\int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right]}_{\equiv H_0 \leftarrow \text{libre}} + \underbrace{\int d^3x \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv H_{\text{int}} \leftarrow \text{interacción}},$$

nos conviene definir un cuadro en donde el operador de campo (y todos los operadores) evolucionen no con \hat{H} sino con \hat{H}_0 .

Es decir, en lugar del cuadro de Schrödinger,

$$\hat{O}_S, \quad |\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S,$$

o el de Heisenberg,

$$\hat{O}_H(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t}, \quad |\psi\rangle_H \equiv e^{i\hat{H}t} |\psi(t)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_S,$$

usaremos el llamado cuadro de interacción (o de Dyson, o de Tomonaga)

$$\hat{O}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0^s t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0^s t} = e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}t} \hat{O}_H(t) e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}_0^s t},$$

$$|\psi(t)\rangle_I \equiv e^{i\hat{H}_0^s t} |\psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_H.$$

En este cuadro tenemos, por construcción, que la ec. de evolución para los operadores involucra solo al Hamiltoniano libre,

$$i\partial_t \hat{O}_I(t) = [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^s] \quad (+ i\partial_t \hat{O}_I(t))$$

$$= [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^I]$$

↖ si hay dependencia explícita de t

(donde para la segunda igualdad hemos usado el hecho de que

$$\hat{H}_0^I \equiv e^{i\hat{H}_0^s t} \hat{H}_0^s e^{-i\hat{H}_0^s t} = \hat{H}_0^s = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}_I^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\phi}_I)^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}_I^2 \right]).$$

Esto es cierto en particular para $\hat{\phi}_I(x)$, que satisface entonces la ec. de mov. libre,

$$(\partial^2 + m^2) \hat{\phi}_I(x) = 0$$

Klein-Gordon.

Podemos entonces desarrollar como antes

$$\hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(e^{-ip \cdot x} \hat{a}_p + e^{ip \cdot x} \hat{a}_p^\dagger \right) \Big|_{p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

↑ independientes de t

y las relaciones de conmutación implican necesariamente que

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad [\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = 0.$$

Además, tenemos evidentemente que

$$:\hat{H}_0^{\mathbb{I}}: = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p.$$

Todo esto resulta muy reconfortante, ¡pero hasta ahora, parece que solo estamos jugando a olvidarnos de \hat{H}_{int} !

Como habíamos dicho, el efecto de las interacciones se ve ahora en la evolución de los estados,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_{\mathbb{I}} &= e^{i\hat{H}_0^{\mathbb{I}} t} |\psi(t)\rangle_{\mathbb{S}} = e^{i\hat{H}_0^{\mathbb{I}} t} e^{-i\hat{H}(t-t')} |\psi(t')\rangle_{\mathbb{S}} \\ &= e^{i\hat{H}_0^{\mathbb{I}} t} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^{\mathbb{I}} t'} |\psi(t')\rangle_{\mathbb{I}} \\ &\equiv \hat{U}_{\mathbb{I}}(t, t') \end{aligned}$$

Operador de evolución

(en el caso de interacción)

Felizmente, este objeto aparentemente horrendo puede ser reescrito puramente en términos de $\hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x)$:

orden temporal (p.37)

definido por Taylor

Hamiltoniano de interacción, en el cuadro de interacción

← misma $\partial \hat{U}$, con misma condición inicial

$$\hat{U}_I(t, t') = \mathcal{T} \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^t d\tau \hat{H}_{int}^I(\tau) \right] \right\}$$

$$= \mathcal{T} \left\{ \exp \left[-\frac{i\lambda}{4!} \int_{t'}^t d^4 y \hat{\phi}_I^4(y) \right] \right\}$$

↑ solo $\hat{a} + \hat{a}^\dagger$!

$$= \mathcal{T} \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int_{t'}^t d^4 y \hat{\phi}_I^4(y) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int_{t'}^t d^4 y_1 \hat{\phi}_I^4(y_1) \int_{t'}^t d^4 y_2 \hat{\phi}_I^4(y_2) + \dots \right\}$$

↑ serie de Taylor en λ , tal como describimos

Ahora, ¿qué queríamos calcular? No es nada otro, porque la jugada ha cambiado por completo:

- El estado $|0\rangle$ tal que $\hat{a}_{\vec{p}} |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$
No es (no tendría por qué ser) el vacío, el estado con menor energía en la teoría, que denotaremos $|\Omega\rangle$.
- El estado $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ No es el estado de 1 partícula, que seguiremos denotando $|\vec{p}\rangle$.
- la masa de las partículas asociadas al campo ya No es m . No tiene por qué serlo:

La conexión que encontramos entre $m^2 \equiv \partial_\varphi^2 V(\phi)$ y la masa de las partículas la descubrimos como resultado (inesperado) de un cálculo en el caso espectral del campo libre.

• El operador $\hat{\phi}$ ya no solo crea 1 partícula:

$$\hat{\phi}(\vec{p})|\Omega\rangle \sim f_1|\vec{p}\rangle + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3-1} 2E_{\vec{p}'}} f_2(\vec{p}')|\vec{p}-\vec{p}', \vec{p}'\rangle + \dots$$

Ante esta falta de claridad, como paso intermedio podemos primero identificar cantidades que estén nítidamente definidas a nivel del lenguaje de la teoría, y después preocuparnos de cómo extraer física de ellas.

Una elección que resulta muy útil es plantearnos la meta de determinar las correlaciones (o funciones de correlación, o funciones de Green) de N puntos:

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

orden ↑
temporal

↑ operador en
campo de Heisenberg

↑ Vacío verdadero
(con dependencia
temporal completa)

que en el caso libre eran directamente amplitudes de propagación (pp. 40-41), y aquí más o menos las

podemos pensar como algo similar.

Aunque no es obvio, puede resultarnos ser el caso que toda la información física de cualquier teoría de campos se puede extraer de los correladores $G_N(x_1, \dots, x_N) \forall N$.

¡Así que la meta en la vida de cualquier campista es poder calcular estas funciones!

Afortunadamente, usando la conexión entre el cuadro de Heisenberg y el cuadro de interacción se puede mostrar que

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_I(x_1) \dots \hat{\phi}_I(x_N) \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}$$

Recordando que $\int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t) = -\frac{\lambda}{4!} \int_{-T}^T d^4y \hat{\phi}_I^4(y)$, vemos que esta fórmula reduce el cálculo de cada correlador

G_N de la teoría interactuante ¡al cálculo de correladores para un campo libre, $G_N^{(0)}$ (fundamentalmente $N' \geq N$)!

Y este último de hecho mencionamos en la p. 39 que son muy fáciles de calcular: son simplet sumas de productos de propagadores libres $G_2^{(0)}(x, x') = G(x, x')$ (pp. 36-7)

que pueden resumirse con diagramas de Feynman. P.ej.

15

correlador de 4 puntos a orden λ^0 (interacciones todavía no figuran)

$$G_4^{(0)}(x_1, \dots, x_4) = \text{diagrama} = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3}$$

\equiv suma sobre todas las maneras de conectar los 4 puntos de modo en líneas (\leftrightarrow propagadores)

"pasar por atrás"

$$= G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) + G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) + G(x_1, x_4)G(x_2, x_3)$$

La novedad en la teoría interactuante es que, por la presencia de

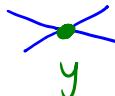
$$T \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4 y \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_1) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4 y_1 \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_1) \int d^4 y_2 \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_2) + \dots \right\}$$

tendremos que calcular términos como

$$\langle 0 | T \left\{ \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_1) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_2) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_3) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_4) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4 y \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_1) \right\} | 0 \rangle$$

donde 4 inserciones de $\hat{\phi}_{\mathbb{I}}$ coinciden en el mismo punto y_1 que además (a diferencia de x_1, \dots, x_4) no está fijo, sino que se integra sobre todo el espaciotiempo.

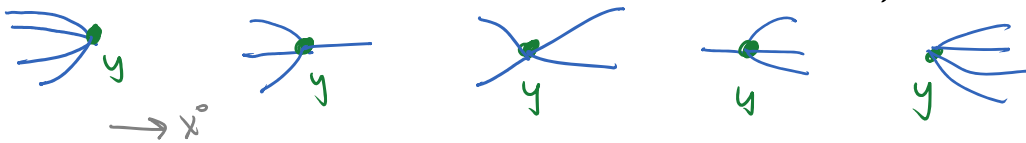
En los diagramas correspondientes, el punto y_1 donde se produce el efecto de la interacción será un sitio donde 4 líneas confluyen, un vértice de 4 pntos, que es entonces un nuevo ingrediente para nosotros

representación gráfica:  $\equiv -i\lambda \int d^4y$ (el factor de 4! se cancela con el vértice)

Físicamente, el efecto de k interacciones

$$\hat{\mathcal{L}}_I^4(y) \sim (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4 \sim \hat{a}^4 + 4\hat{a}^3\hat{a}^\dagger + 6\hat{a}^2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 4\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a}^3 + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$$

es permitir procesos donde el número de partículas cambia de 4 a 0, de 3 a 1, de 2 a 2, de 1 a 3, o de 0 a 4



Usando líneas y estos vértices, se arman combinaciones

como , que tienen una interpretación intuitiva.


⚠️ OJO: estas no son las partículas físicas, sino las que están libres, $\hat{a}^\dagger|0\rangle \Leftrightarrow \text{modo de Fourier}$

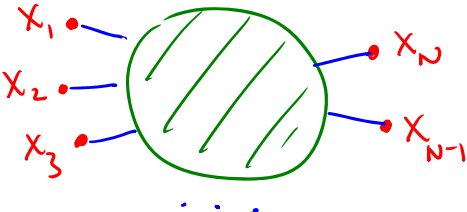
Vemos entonces que los diagramas de Feynman tienen una utilidad doble (si $\lambda \ll 1$). Por una parte, nos permiten visualizar el efecto de las interacciones como procesos donde se crean y/o aniquilan partículas (en grupos de 4 para \mathcal{L}^4).

Las que existen solo efímeramente, entre procesos sucesivos de interacción, se conocen como partículas virtuales ($\Leftrightarrow p^2 \neq m^2$).

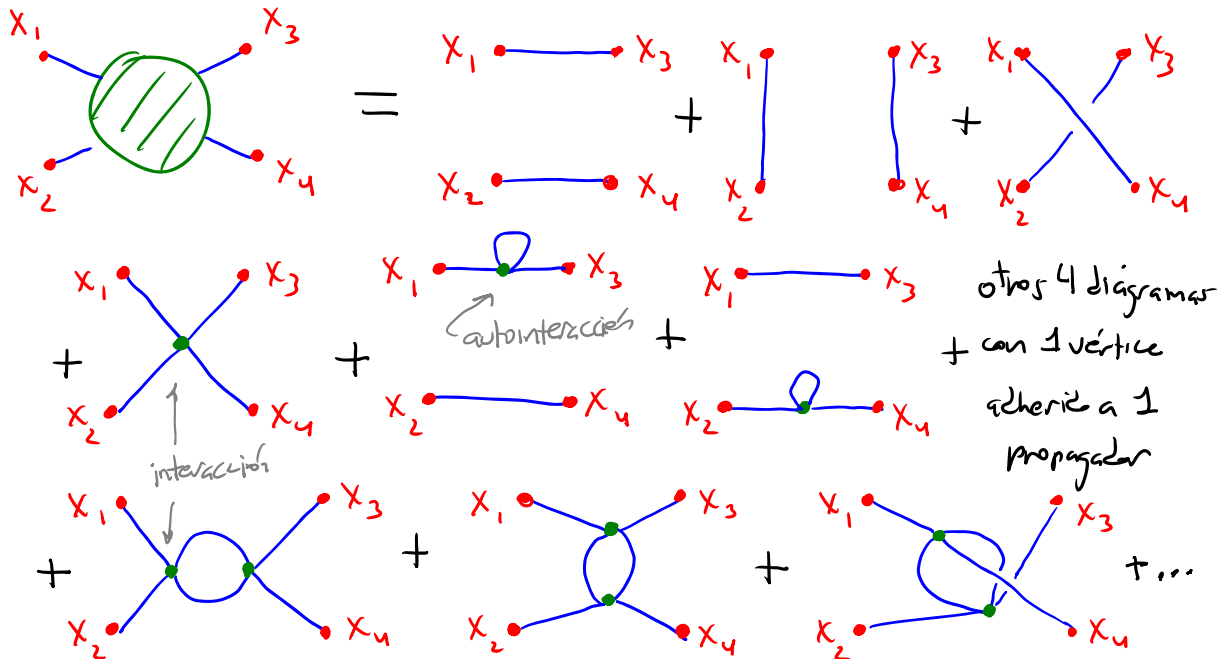
Por otra parte, los diagramas son una herramienta eficiente para hacer cálculos, gracias a las instrucciones explícitas que nos permiten convertir cada diagrama en una fórmula, instrucciones conocidas como reglas de Feynman.

Cuando uno mira los detalles, se encuentra que

$G_N(x_1, \dots, x_N) =$ Suma sobre todos los diagramas "conexos"
 (es decir, sin poder totalmente desconectar como p.ej. ) topológicamente distintos con N puntos externos x_1, \dots, x_N

\equiv 

P.ej., la función de 4 puntos $G_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ está dada por



Las reglas de Feynman para traducir cada diagrama a una fórmula son (comienza de ahora en adelante los cables):

1) Por cada propagador, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ x \quad x' \end{array} \equiv G(x, x')$$

(amplitud de probabilidad de propagación libre).

2) Por cada vértice, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ y \end{array} \equiv -i\lambda \int d^4 y$$

(amplitud de probabilidad de que 1 partícula se convierta en 3, ó 2 en 2, ó 3 en 1, ó 0 en 4, ó 4 en 0).

3) Por cada punto externo, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ x \end{array} \equiv 1$$

(~ amplitud de probabilidad de que la partícula que está en x esté en x).

4) Multiplicar los factores asociados a todas las partes.

5) Dividir entre el "factor de simetría", un número que

depende de las propiedades del diagrama, y evita sobrecontar procesos (ver por ej. pp. 405-9 de mi curso de campos de física).

NO hace falta tal corrección en p.ej. QED o QCD.

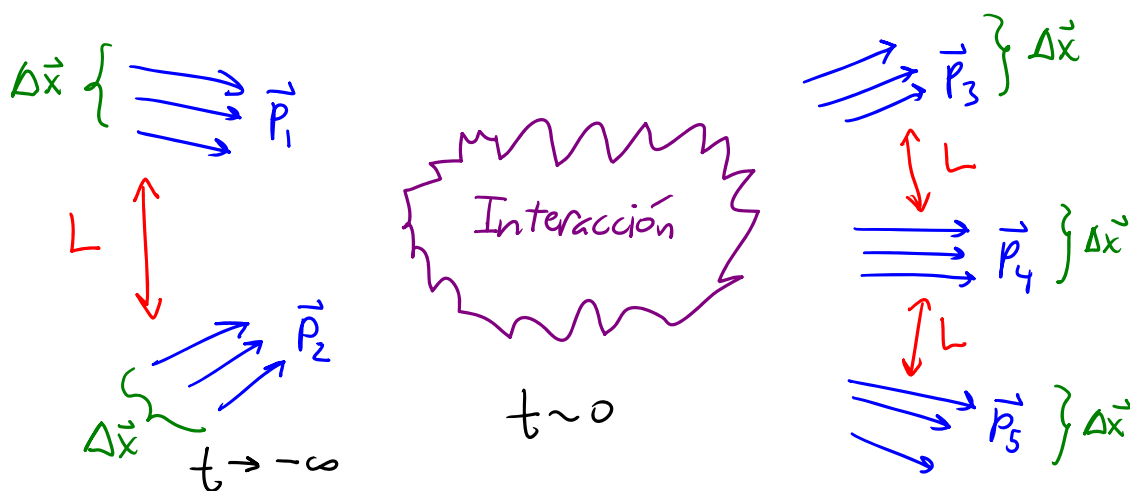
Frecuentemente es más fácil trabajar en espacio de momentos, cosa que es natural en particular si queremos calcular los correladores en espacio de momentos:

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_N) \equiv \int d^3 x_1 \dots d^3 x_N e^{ip_1 x_1} \dots e^{ip_N x_N} G_N(x_1, \dots, x_N).$$

Perfecto: ya tenemos una receta completamente sistemática para cumplir con la aspiración en la vida de todo campista: calcular los correladores G_N ó $\tilde{G}_N \forall N$.

Ahora, ¿cómo podemos extraer física de ahí?

La situación experimental usual se refiere a un proceso de dispersión, donde un cierto número N de partículas con momentos poco inciertos $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ se encuentran inicialmente (en " $t \rightarrow -\infty$ ") separadas entre sí por distancias macroscópicas, luego se aproximan e interactúan (en " $t \sim 0$ "), para finalmente separarse de nuevo, de modo que al final (cuando " $t \rightarrow +\infty$ ") obtenemos un número N' de partículas distantes, con momentos $\vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_{N'}$:



Al principio y al final podemos identificar partículas individualmente, gracias a que están muy separadas.

Podemos definir entonces un estado entrante / saliente

$$| \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N ; \pm \rangle$$

asintótico

como aquel estado en el cuadro de Heisenberg en el cual se detectarán las partículas indicadas si se realiza una medición al tiempo $t \rightarrow \mp \infty$.

Para comparar con resultados experimentales, nuestro objetivo principal será entonces calcular los traslapes entre los estados entrantes y los salientes,

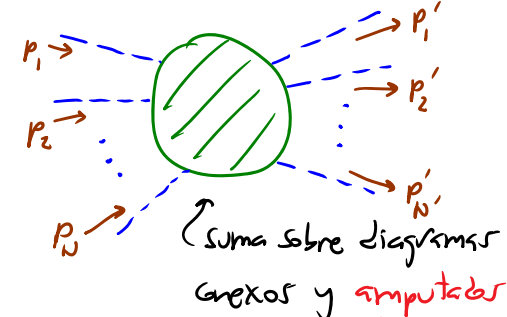
$$\langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_N ; - | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N ; + \rangle \equiv S_{p', \dots, p} \equiv S_{\mp \mp}$$

que representan la amplitud de probabilidad de que ocurran los procesos de dispersión señalados, y se conocen como amplitudes de dispersión o (todos juntos) la matriz S (o matriz de dispersión).

Estas amplitudes están muy directamente relacionadas con las cantidades que los físicos experimentales miden directamente: "sección eficaz" y "taxa de decaimiento".

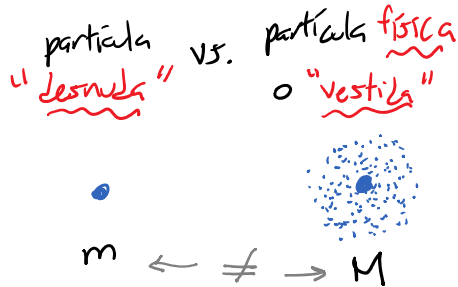
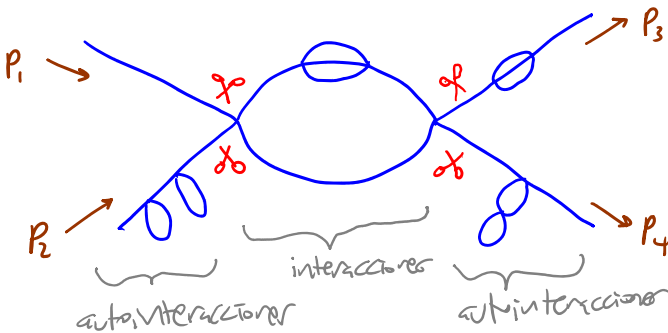
Es posible deducir una fórmula que relaciona a las amplitudes de dispersión con los correladores ("fórmula LSZ").

En términos de diagramas de Feynman, uno encuentra que:

$$\langle p'_1, p'_2, \dots, p'_N; - | p_1, p_2, \dots, p_N; + \rangle =$$


(suma sobre diagramas conexos y amputados)


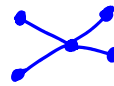
donde "amputar" un diagrama significa eliminar las patas externas, cortando cada una de ellas en el lugar más interno posible. P.ej., en el diagrama



habría que cortar en donde aparecen las tijeras: empezando en la punta de cada pata y caminando hacia el centro del diagrama, encontrarnos el último lugar donde la pata se desconecta al cercarse a sola línea, y cortar precisamente ahí, descartando incluso el propagador libre asociado a esa última línea (que hemos denotado como puntada), y reemplazándolo por $\sqrt{Z} \equiv |\langle \hat{p} | \hat{\phi}(x) | \Omega \rangle|$ ($= 1$ al orden más bajo en λ). Esos tramos emitidos codifican a las interacciones de cada partícula consigo misma.

No conviene entonces solo dibujar diagramas ya amputados.

L5

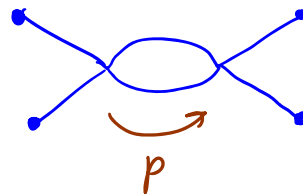
Al hacer cuentas en la práctica, siempre es relativamente fácil obtener resultados explícitos para los diagramas "a nivel árbol" (\equiv sin lazos, como p.ej.  ó ) , pero más allá de eso nos encontramos genéricamente con 2 problemas:

1) En un diagrama con 1 ó más lazos, la(s) integral(es)

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

sobre los momentos

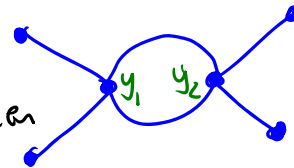
indeterminadas (uno por cada lazo)



en general no convergen para p's grandes, $p^\mu \rightarrow \pm\infty$

En espacio de posiciones, estas

"divergencias ultravioleta" (\equiv UV) provienen



del límite de distancias pequeñas donde 2 ó más

vértices coinciden en el espaciotiempo, $y_1^\mu \rightarrow y_2^\mu$.

Si la teoría tiene la propiedad de ser "renormalizable",

estas divergencias UV se pueden eliminar ajustando un número finito de parámetros, cuyos valores deducimos

de los datos experimentales. Este procedimiento

se conoce como renormalización, y tiene perfecto sentido

físico: no es más que un cambio de lenguaje, para

reportar nuestros resultados No en términos de los parámetros "de nudos" que figuran en \mathcal{L} (m, λ, \dots), sino de parámetros físicos (M, Λ, \dots), relacionados con cantidades medibles (y por tanto finitas).

[En teorías con partículas sin masa, como QED, por los propagadores $\propto \frac{i}{p^2 + i\epsilon}$ pueden aparecer además "divergencias infrarrojas" ($\equiv IR$), que corresponden a bajas energías, $p^\mu \rightarrow 0$, o lo que es lo mismo, distancias grandes, $|y_1^\mu - y_2^\mu| \rightarrow \infty$.]

2) El número de diagramas que se obtienen a $\mathcal{O}(\lambda^n)$ crece muy rápidamente — típicamente $\sim n!$ —, de tal manera que $G_N^{(n)} \sim \lambda^n n!$, y por tanto la serie perturbativa NO converge.

Esta es una señal clara de que el método perturbativo

NO contiene toda la física: existen efectos

NO perturbativos (típicamente $\sim \exp(-1/\lambda)$;

no desarrollables en Taylor), que son pequeños si el acoplamiento es débil.

Con lo anterior tenemos ya completo el paquete básico de ideas para un campo escalar débilmente acoplado. Debemos tener siempre presente que cuando el acoplamiento es fuerte ($\lambda \sim 1$, o peor aún, $\lambda \gg 1$), la expansión perturbativa es completamente inútil: ¡no nos sirve ni como método de cálculo ni de visualización!

Para entender a y hacer cálculos en campos no escalares, las ideas y herramientas básicas son las mismas, aunque en cada caso surgen novedades interesantes.

• CAMPO VECTORIAL

Para describir partículas con espín 1, se utiliza un campo vectorial $A_\mu(x)$: una colección de 4 números en cada lugar, que bajo transformaciones de Poincaré (= Lorentz + traslaciones),

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + c^\mu,$$

↪ matriz 4x4 tal que $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

se mezclan de acuerdo con

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x)$$

"representación vectorial
del grupo de Lorentz"

↑ nuevo nombre del punto
↑ nueva función característica

Si nuestro campo vectorial es no masivo, como es el caso del potencial electromagnético, hay una novedad importante: la existencia de "transformaciones de norma" (gauge). En el caso de electro, también la forma

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \Theta(x)$$

en $\Theta(x)$ una función arbitraria. Exigiendo invariancia bajo estas transformaciones y bajo Lorentz, construiremos para nuestro campo vectorial no masivo libre la acción de Maxwell

$$S[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{con } F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

← solo término cinético

Las transformaciones de norma tienen la peculiaridad de que no producen ningún cambio en el sistema físico: las configuraciones $A_{\mu}(x)$ y $A'_{\mu}(x)$ son completamente equivalentes:
 $\vdash A'_{\mu}(x) \simeq A_{\mu}(x) \forall \Theta(x)$! Es decir, no solo es que $S[A] = S[A']$ (como es el caso para una simetría), sino que los propios estados físicos no cambian: $|A_{\mu}(x)\rangle$ y $|A'_{\mu}(x)\rangle$ son el mismo vector

en el espacio de Hilbert físico.

En otras palabras, la invariancia de normas (más llamada simetría de normas) nos indica que nuestra descripción es redundante: tenemos más variables que grado de libertad físicos.

En el caso familiar de electro esto en realidad nos deberá de resultar obvio: $A_\mu(x)$ tiene 4 componentes, pero los fotones (o las ondas electromagnéticas clásicas) tienen solo 2 estados de polarización independientes.

Esta redundancia complica un poco el proceso de cuantización, y subsanar teniendo básicamente 2 opciones:

1) Eliminar la redundancia ("fijar la norma")

por completo ANTES de cuantizar, pero solo promover las variables físicas a operadores. P.ej., podemos

usar la "norma de Coulomb" $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, A_0 = 0,$

donde únicamente $\vec{A}_\perp \rightarrow \hat{\vec{A}}_\perp$. $\nearrow \nearrow$ no covariante bajo Lorentz

2) Cuantizar PRIMERO, $A_\mu \rightarrow \hat{A}_\mu$, obteniendo

una descripción cuántica redundante, donde

el espacio de Hilbert es demasiado grande (existen

estados que no son físicos), y DESPUÉS eliminar

la redundancia. P.ej., en la "norma de Lorentz",
 $\partial_\mu A^\mu = 0$, identificamos cuiles estados son físicos
 exigiendo que $(\partial_\mu \hat{A}^\mu)_+ |0\rangle = 0$.
 ↗ parte de frecuencia positiva ($\sim \hat{a}$)

Por este segundo camino, se puede calcular el
 propagador de Feynman para el fotón $\langle 0 | T \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \} | 0 \rangle$

índice relaciones en polarización μ (↔ espín o "helicidad") del fotón → ν

métrica de Minkowski en espacio de momentos.

$$= \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

↗ cf. Klein-Gordon $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

Ahora podemos preguntarnos cómo acoplar a un campo escalar
complejo $\Phi(x)$ con este campo vectorial sin masa $A_\mu(x)$

≡ campo de norma:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\Phi, A_\mu)$$

debe ser real, invariante bajo Lorentz, rotaciones de fase de Φ , y trasmf. de norma

$$-m^2 \Phi^* \Phi - m^2 A_\mu A^\mu + 2i \Phi^* \Phi A_\mu A^\mu + i A_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi + \dots$$

La receta más sencilla que funciona es simplemente reemplazar,
 en el término cinético de Φ , a la derivada usual por una

derivada covariante: $\mathbb{D}_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + iq A_\mu) \Phi$ $q = \text{cte.}$

Con esto, $\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ se convierte en

$$\mathcal{L} = (\underbrace{D_\mu \Phi}^{\text{Dolo}})^* D^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Electrodinámica
scalar

contiene $\partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi$ y

términos de interacción $\sim g A \Phi^* \Phi, g^2 A^2 \Phi^* \Phi$

\mathcal{L} es invariante bajo las transformaciones de norma

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i g \theta(x)} \Phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x)$$

↑ rotación de fase local (distinta en cada punto)

Por construcción, $D_\mu \Phi$ transforma igual que Φ :

$$D_\mu \Phi(x) \rightarrow D'_\mu \Phi(x) = e^{i g \theta(x)} D_\mu \Phi(x).$$

Esta receta para acoplar a A_μ en campos complejos, conocida como "acoplamiento mínimo", es LA manera en la que el potencial electromagnético se acopla a campos cargados.

De los términos de interacción vemos que g es el acoplamiento, es decir, la carga eléctrica de las partículas asociadas a Φ . En la p. 30 teníamos $g=1$, porque allí llamamos θ a la fase por la cual rotamos a Φ , y así es $g\theta$, con lo cual la carga total se relaciona a

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} g (\hat{a}_\vec{p}^\dagger \hat{a}_\vec{p} - \hat{b}_\vec{p}^\dagger \hat{b}_\vec{p})$$

• CAMPO ESPINORIAL

Para describir a partículas de espín $1/2$, como el electrón, en su caso de cinética no relativista definieron el concepto de espinor como un par de 2 números complejos, $\chi = \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix}$, que bajo

una rotación espacial genérica R (matriz 3×3 tal que $R^T R = \mathbb{1}$),
 $R(\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}) = \exp \left[i\theta_{12} J^{(12)} + i\theta_{23} J^{(23)} + i\theta_{31} J^{(31)} \right]$

$$\text{con } iJ^{(12)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad iJ^{(23)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad iJ^{(31)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑ "generación" de rotación en el plano 1-2 (i.e., alrededor del eje 3)

$$\text{(p.ej. } R(\theta, 0, 0) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark)$$

transforma así:

$$\chi \rightarrow \chi' = \underbrace{\exp \left[i\theta_{12} \frac{\sigma^3}{2} + i\theta_{23} \frac{\sigma^1}{2} + i\theta_{31} \frac{\sigma^2}{2} \right]}_{\equiv M(R) \text{ matriz } 2 \times 2} \chi,$$

donde $\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son las matrices de Pauli (que satisfacen $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{1} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$).

El punto importante es que las 3 matrices 2×2 $\frac{\sigma^i}{2}$ satisfacen

las mismas reglas de conmutación que las 3 matrices 3×3
 $J^{(12)} \equiv J^3$, $J^{(23)} \equiv J^1$, $J^{(31)} \equiv J^2$, y al experimentar, esto
 implica que las matrices 3×3 R y 2×2 $M(R)$ satisfacen
 la misma tabla de multiplicación:

$$\text{si } R_2 R_1 = R_3, \text{ entonces } M(R_2)M(R_1) = M(R_3).$$

Esto es indispensable para que nuestra regla de trans-
 formación de χ tenga sentido, pues de otro modo obtendríamos
 un distinto resultado para el nuevo espínor χ' de acuerdo
 de si hacemos la rotación R_3 de un jalón o por pasos R_1, R_2 .
 Matemáticamente, decimos que las matrices $M(R)$ son una
 "representación" del grupo de rotaciones $SO(3)$. (En realidad,
 son una "representación proyectiva", es decir, satisfacen la
 misma tabla de multiplicación que las R salvo por una fase ± 1 ,
 que no tiene importancia cuando estamos haciendo cálculos.
 Las $M(R)$ son literalmente una representación de $SU(2)$, que
 es el "grupo cubierto" de $SO(3)$, $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$.)

Cuando vamos al caso relativista, además de
 rotaciones $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & & \end{pmatrix}$ podemos hacer empujones

$$\Lambda = \exp \left[i\alpha_1 J^{(01)} + i\alpha_2 J^{(02)} + i\alpha_3 J^{(03)} \right]$$

↑ generador de empujón en la dirección 1

$$\text{con } iJ^{(01)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad iJ^{(02)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad iJ^{(03)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Debemos preguntarnos entonces cómo transforman el espínor χ bajo empujes. Es decir, debemos encontrar otras 3 matrices 2×2 $\frac{\tau^i}{2}$ que satisfagan las mismas relaciones de conmutación (entre sí y con las $\frac{\sigma^i}{2}$) que las que cumplen las $J^{(0i)}$ (entre sí y con las $J^{(ij)}$). Resulta haber 2 opciones distintas:

$$\frac{\tau^i}{2} = -\frac{i\sigma^i}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\tau^i}{2} = +\frac{i\sigma^i}{2}, \quad \text{así que hay 2 tipos de}$$

espinores relativistas, que llamamos espinores de Weyl

"izquierdo" χ_I y "derecho" χ_D , respectivamente:
↑ parámetro de números complejos ↓

$$\chi_I \rightarrow \chi'_I = \exp \left[i\alpha_1 \left(\frac{-i\sigma^1}{2} \right) + i\alpha_2 \left(\frac{-i\sigma^2}{2} \right) + i\alpha_3 \left(\frac{-i\sigma^3}{2} \right) \right] \chi_I.$$

Podemos entonces definir campos espinoriales izquierdos o derechos

$\chi_I(x)$ o $\chi_D(x)$ ← un espínor del tipo apropiado en cada x^μ .

Frecuentemente trabajamos en teorías que, además de ser invariantes bajo las 6 transformaciones de Lorentz continuas

$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ con $\Lambda(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{31}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (3 rotaciones

+ 3 empujes), tienen también como simetría a la transformación

discreta que llamamos paridad: $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{P} \Rightarrow \begin{cases} t'=t \\ \vec{x}'=-\vec{x} \end{cases}.$

Al actuar sobre los espinores de Weyl, la paridad tiene el efecto de intercambiar al izquierdo con el derecho: $\chi_I \xleftrightarrow{P} \chi_D$ (es por esto que los llamamos izquierdo y derecho).

Así que en una teoría invariante bajo paridad, por cada campo espinorial izquierdo $\chi_I(x)$ debe también existir un correspondiente campo espinorial derecho $\chi_D(x)$ (aunque es posible representar este último como $\eta_I(x) \equiv i\sigma^2 \chi_D^*(x)$, que según puede comprobarse, transforma como un espinor izquierdo).

Es útil entonces empaquetar a ambos tipos de espinor de Weyl en un espinor más grande, $\Psi \equiv \begin{pmatrix} \chi_I \\ \chi_D \end{pmatrix}$ espinor de Dirac.

↑ índice espinorial $a=1, \dots, 4$ usualmente oculto

La regla de transformación de este objeto bajo rotaciones y empujones puede resumirse convenientemente en términos de 4 matrices 4×4 , γ^μ , que son análogas a las de Pauli:

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Matrices de Dirac}$$

Estas satisfacen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$.

Bajo $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ con $\Lambda = \exp\left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{(\mu\nu)}\right]$,

el espinor de Dirac transforma como $\uparrow \theta_{ij} \text{ y } \tau_0$

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp\left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right] \Psi, \quad \text{con } S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Baso paridad, $x^\mu \rightarrow x'^\mu = P^\mu_\nu x^\nu$, se tiene $\psi \rightarrow \psi' = \gamma^0 \psi$.

Si definimos la "matriz de quiralidad"

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (tal que } \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, (\gamma^5)^2 = 1),$$

podemos recuperar las partes izquierda y derecha:

$$\psi_{\text{I}} \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} \chi_{\text{I}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{\text{D}} \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{\text{D}} \end{pmatrix}.$$

Como $\gamma^5 \psi_{\text{I}} = -\psi_{\text{I}}$, los llamamos también espinores de

quiralidad $\begin{cases} \text{negativa} \\ \text{positiva} \end{cases}$.

Se puede además comprobar que el espinor conjugado de Dirac

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \equiv (\psi^*)^T \gamma^0 \text{ transforma al revés que } \psi,$$

de tal modo que $\bar{\psi} \psi \equiv \psi_a^* \gamma^0_{ab} \psi_b$ es un escalar.

Y interesantemente, $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \equiv \psi_a^* \gamma^0_{ab} \gamma^\mu_{bc} \psi_c$ es un vector.

Definimos un campo espinorial de Dirac, $\psi(x)$, como aquel que nos da un espinor de Dirac en cada punto. En el caso libre, la densidad lagrangiana más sencilla que podemos escribir (cuadrática, escalar, real) es

ojo: m y no m^2 , por análisis dimensional

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

Lagrangiano de Dirac

↑ necesario para que la acción sea real

$$= \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi$$

↑ $\equiv \gamma^\mu\partial_\mu$ operador (diferencial) de Dirac

La ecuación de movimiento resultante es

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi(x) = 0$$

ecuación de Dirac.

Puede mostrarse que esta ecuación implica que se satisface también la de Klein-Gordon, $(\partial^2 + m^2)\Psi = 0$, y además impone una restricción que determina a χ_{\pm} en términos de χ_0 (o viceversa): $\chi_{\pm}(x) = \frac{i}{m}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\chi_0(x)$ $\sigma^{\mu\nu} \equiv (\mathbb{1}, \sigma^i)$

Por esta razón, $\Psi(x)$ tiene al final solo 4 datos reales independientes en cada punto, que es justo lo que esperamos para describir a una partícula cargada con espín $1/2$, como el electrón: hay 2 estados internos del electrón y otros 2 del antielectrón.

Al cuantizar, la principal novedad es que, después de descomponer en ondas planas y obtener las operaciones de creación/anniquilación

esparcidos,

$s=1,2$ etiquetas estado de espín

$$\hat{\Psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1}^2 \left(\hat{a}_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

\leftarrow spinores soluciones de Dirac \rightarrow

$$\hat{\bar{\Psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1}^2 \left(\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

con $\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger}$, $\hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger}$ respectivamente operadores de creación de partícula (p.ej. electrón) y antipartícula (antielectrón), uno descubre que existen estados con energía arbitrariamente negativa, a menos de que uno efectúe la cuantización canónica imponiendo relaciones de anticonmutación en lugar de cuantización,

$$\{\hat{\Psi}(\vec{x}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbb{1},$$

$$\{\hat{\Psi}(\vec{x}, t), \hat{\Psi}(\vec{x}', t)\} = 0$$

$$\leftrightarrow \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'\dagger} \right\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta^{ss'} = \left\{ \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'\dagger} \right\},$$

$$\left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} \right\} = \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} \right\} = 0 = \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}}^{s'\dagger} \right\} = \left\{ \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'\dagger} \right\}$$

Es decir, demostrar que **las partículas de espín $1/2$**
 (\Leftrightarrow propiedades de transformación bajo Lorentz) **deben ser**
necesariamente fermiones ($\Leftrightarrow \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle = -\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle$),
 y con ello explicar el principio de exclusión de Pauli
 ($\{ \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \} = (\hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger)^2 = 0 \Rightarrow \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger | \vec{p}_1 \rangle = 0$),
 Más en general, se puede demostrar el

Teorema de Espín-Estadística: las partículas

de espín $\begin{cases} \text{entero} \\ \text{semientero} \end{cases}$ deben ser $\begin{cases} \text{bosones} (\Leftrightarrow \text{conmutadores}) \\ \text{fermiones} (\Leftrightarrow \text{anticomutadores}) \end{cases}$.

Habiendo extendido al campo de Dirac $\psi(x)$, podemos también acoplarlo al campo de Maxwell $A_\mu(x)$ usando la receta de "acoplamiento mínimo" de las pp. 61-62. La teoría resultante es la **electrodinámica cuántica (QED)**,

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \equiv \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}(\partial_\mu A_\nu) + \mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\psi, \not{D}_\mu \psi, \bar{\psi})$$

es decir,

$$\not{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\zeta A_\mu$$

para el electrón, $\zeta = -e$

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \zeta A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{propagador del electrón} & \text{propagador del fotón} & \text{vértice} \end{array}$$

$\text{---} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$, $\text{---} = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$, $\text{---} = -i\zeta \gamma^\mu$

El Modelo Estándar entero está basado en el principio de invariancia de normas, utilizando

a campo de normas matriciales $A_{IJ}^{\mu}(x)$ $\leftarrow 1, \dots, N$
asociado a la "simetría" local $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

grupo no abeliano: Matrices No conmutan

en lugar del $U(1)$ que tenemos en electros.

En un poquito más de detalle: estos campos matriciales

$A_{IJ}^{\mu}(x)$, en lugar de transformarse como el potencial, electromagnético,

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\theta(x) \\ = e^{-i\theta(x)} (A_{\mu}(x) - i\partial_{\mu}) e^{i\theta(x)},$$

"matrices" 1×1

Cambian de acuerdo con "generadores" del grupo no abeliano
parámetro $(\alpha=1, \dots, d) \downarrow$ p.ej. $SU(N)$

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = \exp(-i\theta(x)T_{\alpha}) (A_{\mu}(x) - i\partial_{\mu}) \exp(i\theta(x)T_{\alpha})$$

Matrices $N \times N$

La intensidad de campo $F_{IJ}^{\mu\nu}(x)$ se define en este caso como

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + i[A_{\mu}, A_{\nu}]$$

$\neq 0$ en general

$F_{\mu\nu}(x)$ no es invariante de norma, sino que transformamos de acuerdo con

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \exp(-i\theta^\alpha(x)T_\alpha) F_{\mu\nu}(x) \exp(i\theta^\beta(x)T_\beta).$$

La densidad lagrangiana es una generalización de la de Maxwell, \leftarrow incluye interacciones $\sim A^3, A^4$

$$\mathcal{L}_{YM}(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)) = -\frac{1}{4} \text{Tr} [F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)].$$

Lagrangiano
de
Yang-Mills (-Shaw)

Un ejemplo de un campo de Yang-Mills es el campo gluónico (responsable de la interacción fuerte), asociado a transformaciones de norma con grupo $SU(3)$ (matrices complejas 3×3 unitarias y con determinante = 1).

La receta para acoplar un campo de Yang-Mills a campos de materia es la misma que antes. Necesitamos que el campo de materia tenga para empezar una simetría global bajo el grupo de norma en cuestión. P.ej., N campos escalares complejos $\Phi_I(x)$ que transforman de acuerdo con $\leftarrow I=1, \dots, N$

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) = e^{i\theta^\alpha T_\alpha} \Phi(x) \quad \leftarrow \text{misma rotación } \forall x$$

\leftarrow los N campos empaceta en una columna

Tal como en el caso electromagnético (p.68), si definimos la derivada covariante

$$D_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + iA_\mu) \Phi$$

← transformamos igual que $\Phi(x)$

y reemplazamos en el lagrangiano de Φ a $\partial_\mu \Phi$ por $D_\mu \Phi$ (p.ej., $\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi$ en Klein-Gordon), entonces la simetría global que también se convierte en una invariancia local,

$$\Phi(x) \rightarrow \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha) \Phi(x)$$

$$(y \ D\Phi(x) \rightarrow \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha) D\Phi(x)).$$

Podemos entonces construir una versión no abeliana de QED acoplando un campo de Yang-Mills $A_{IJ}^\mu(x)$ $I, J=1, \dots, N$ a un paquete de N campos de Dirac, $\Psi_I(x)$ $I=1, \dots, N$. En el caso donde el grupo de norma es $SU(3)$ ($N=3$), esto conduce a la cromodinámica cuántica (QCD)

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{YM} (A_{IJ}^\mu, \partial_\nu A_{IJ}^\mu) + \mathcal{L}_{Dirac} (\Psi_I, (D_\mu \Psi)_I, \bar{\Psi}_I)$$

