

orden temporal (p.37)

definido por Taylor

Hamiltoniano de interacción, en el cuadro de interacción

misma \hat{U} , con misma condición inicial

$$\hat{U}_I(t, t') = \mathcal{T} \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^t d\tau \hat{H}_{int}^I(\tau) \right] \right\}$$

$$= \mathcal{T} \left\{ \exp \left[-\frac{i\lambda}{4!} \int_{t'}^t d^4 y \hat{\phi}_I^4(y) \right] \right\}$$

¡solo $\hat{a} + \hat{a}^\dagger$!

$$= \mathcal{T} \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int_{t'}^t d^4 y \hat{\phi}_I^4(y) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int_{t'}^t d^4 y_1 \hat{\phi}_I^4(y_1) \int_{t'}^t d^4 y_2 \hat{\phi}_I^4(y_2) + \dots \right\}$$

serie de Taylor en λ , tal como describimos

Ahora, ¿qué queríamos calcular? No es nada otro, porque la jugada ha cambiado por completo:

- El estado $|0\rangle$ tal que $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$
No es (no tendría por qué ser) el vacío, el estado con menor energía en la teoría, que denotaremos $|\Omega\rangle$.
- El estado $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$ No es el estado de 1 partícula, que seguiremos denotando $|\vec{p}\rangle$.
- la masa de las partículas asociadas al campo ya No es m . No tiene por qué serlo:

La conexión que encontramos entre $m^2 \equiv \partial_\varphi^2 V(\phi)$ y la masa de las partículas la descubrimos como resultado (inesperado) de un cálculo en el caso espectral del campo libre.

- El operador $\hat{\phi}$ ya no solo crea 1 partícula:

$$\hat{\phi}(\vec{p})|\Omega\rangle \sim f_1|\vec{p}\rangle + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3-1} 2E_{\vec{p}'}} f_2(\vec{p}')|\vec{p}-\vec{p}', \vec{p}'\rangle + \dots$$

Ante esta falta de claridad, como paso intermedio podemos primero identificar cantidades que estén nítidamente definidas a nivel del lenguaje de la teoría, y después preocuparnos de cómo extraer física de ellas.

Una elección que resulta muy útil es plantearnos la meta de determinar las correlaciones (o funciones de correlación, o funciones de Green) de N puntos:

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

orden \nearrow
temporal

\nearrow operador en
caso de Heisenberg

\nearrow vacío verdadero
(con dependencia
temporal completa)

que en el caso libre eran directamente amplitudes de propagación (pp. 40-41), y aquí más o menos las

podemos pensar como algo similar.

Aunque no es obvio, puede resultarnos ser el caso que toda la información física de cualquier teoría de campos se puede extraer de los correladores $G_N(x_1, \dots, x_N) \forall N$.

¡Así que la meta en la vida de cualquier campista es poder calcular estas funciones!

Afortunadamente, usando la conexión entre el cuadro de Heisenberg y el cuadro de interacción se puede mostrar que

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_I(x_1) \dots \hat{\phi}_I(x_N) \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}$$

Recordando que $\int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t) = -\frac{\lambda}{4!} \int_{-T}^T d^4y \hat{\phi}_I^4(y)$, vemos que esta fórmula reduce el cálculo de cada correlador

G_N de la teoría interactuante ¡al cálculo de correladores para un campo libre, $G_N^{(0)}$ (fundamentalmente $N' \geq N$)!

Y este último de hecho mencionamos en la p. 39 que son muy fáciles de calcular: son simplet sumas de productos de propagadores libres $G_2^{(0)}(x, x') = G(x, x')$ (pp. 36-7)

que pueden resumirse con diagramas de Feynman. P.ej.

15

correlador de 4 puntos a orden λ^0 (interacciones todavía no figuran)

$$G_4^{(0)}(x_1, \dots, x_4) = \text{diagrama} = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3}$$

\equiv suma sobre todas las maneras de conectar los 4 puntos de modo en líneas (\leftrightarrow propagadores)

"pasar por atrás"

$$= G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) + G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) + G(x_1, x_4)G(x_2, x_3).$$

La novedad en la teoría interactuante es que, por la presencia de

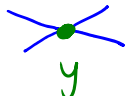
$$T \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4 y \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_1) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4 y_1 \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_1) \int d^4 y_2 \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_2) + \dots \right\},$$

tendremos que calcular términos como

$$\langle 0 | T \left\{ \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_1) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_2) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_3) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_4) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4 y \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_1) \right\} | 0 \rangle,$$

donde 4 inserciones de $\hat{\phi}_{\mathbb{I}}$ coinciden en el mismo punto y_1 , que además (a diferencia de x_1, \dots, x_4) no está fijo, sino que se integra sobre todo el espaciotiempo.

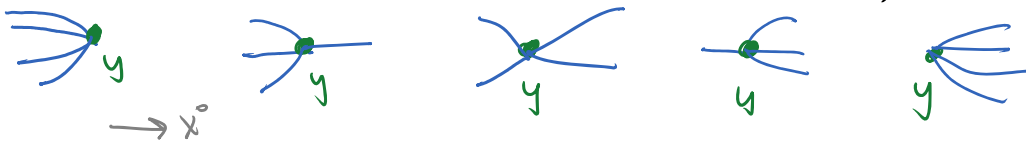
En los diagramas correspondientes, el punto y_1 donde se produce el efecto de la interacción será un sitio donde 4 líneas confluyen, un vértice de 4 puntos, que es entonces un nuevo ingrediente para nosotros

representación gráfica:  $\equiv -i\lambda \int d^4y$ (el factor de 4! se cancela con el de 4)

Físicamente, el efecto de k interacciones

$$\hat{\mathcal{L}}_I^4(y) \sim (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4 \sim \hat{a}^4 + 4\hat{a}^3\hat{a}^\dagger + 6\hat{a}^2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 4\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a}^3 + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$$

es permitir procesos donde el número de partículas cambia de 4 a 0, de 3 a 1, de 2 a 2, de 1 a 3, o de 0 a 4



Usando líneas y estos vértices, se arman combinaciones

como , que tienen una interpretación intuitiva.

⚠️ OJO: estas no son las partículas físicas, sino las que están libres, $\hat{a}^\dagger|0\rangle \Leftrightarrow \text{modo de Fourier}$

Vemos entonces que los diagramas de Feynman tienen una utilidad doble (si $\lambda \ll 1$). Por una parte, nos permiten visualizar el efecto de las interacciones como procesos donde se crean y/o aniquilan partículas (en grupos de 4 para \mathcal{L}^4).

Las que existen solo efímeramente, entre procesos sucesivos de interacción, se conocen como partículas virtuales ($\Leftrightarrow p^2 \neq m^2$).

Por otra parte, los diagramas son una herramienta eficiente para hacer cálculos, gracias a las instrucciones explícitas que nos permiten convertir cada diagrama en una fórmula, instrucciones conocidas como reglas de Feynman.

1) Por cada propagador, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \text{-----} x' \\ | \\ \bullet \end{array} \equiv G(x, x') \quad \text{(amplitud de probabilidad de propagación libre).}$$

2) Por cada vértice, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ | \\ y \end{array} \equiv -i\lambda \int d^4 y \quad \text{(amplitud de probabilidad de que 1 partícula se convierta en 3, ó 2 en 2, ó 3 en 1, ó 0 en 4, ó 4 en 0).}$$

3) Por cada punto externo, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \equiv 1 \quad \text{(amplitud de probabilidad de que la partícula que está en } x \text{ esté en } x).$$

4) Multiplicar los factores asociados a todas las partes.

5) Dividir entre el "factor de simetría", un número que depende de las propiedades del diagrama, y evita sobrecontar procesos (ver por ej. pp. 405-9 de mi curso de campos de física).
NO hace falta tal corrección en p.ej. QED o QCD.

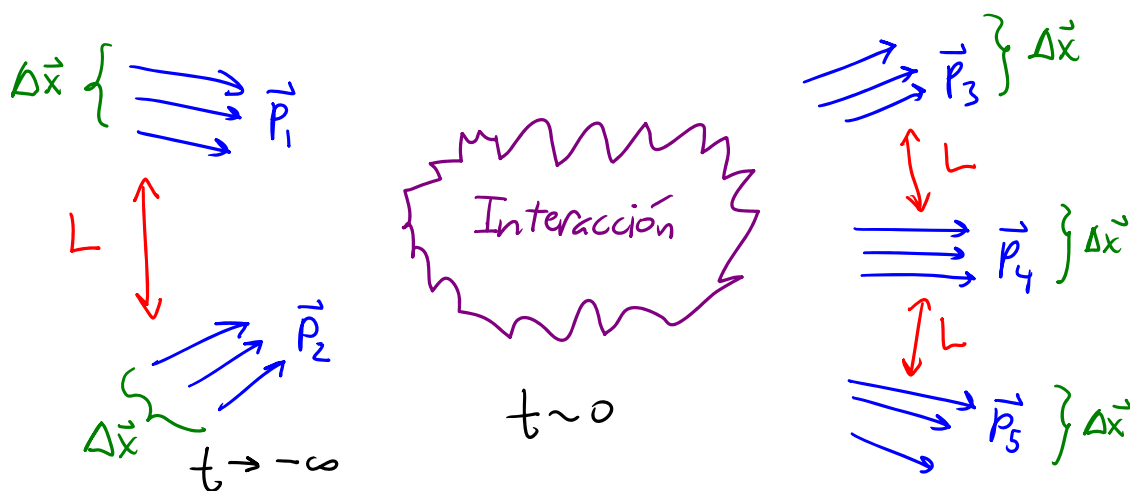
Frecuentemente es más fácil trabajar en espacio de momentos, cosa que es natural en particular si queremos calcular los correladores en espacio de momentos:

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_N) \equiv \int d^3 x_1 \dots d^3 x_N e^{ip_1 \cdot x_1} \dots e^{ip_N \cdot x_N} G_N(x_1, \dots, x_N).$$

Perfecto: ya tenemos una receta completamente sistemática para cumplir con la aspiración en la vida de todo campista: calcular los correladores G_N ó $\tilde{G}_N \forall N$.

Ahora, ¿cómo podemos extraer física de ahí?


La situación experimental usual se refiere a un proceso de dispersión, donde un cierto número N de partículas con momentos poco inciertos $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ se encuentran inicialmente (en " $t \rightarrow -\infty$ ") separadas entre sí por distancias macroscópicas, luego se aproximan e interactúan (en " $t \sim 0$ "), para finalmente separarse de nuevo, de modo que al final (cuando " $t \rightarrow +\infty$ ") obtenemos un número N' de partículas distantes, con momentos $\vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_{N'}$:



Al principio y al final podemos identificar partículas individualmente, gracias a que están muy separadas.

Podemos definir entonces un estado entrante / saliente

$$| \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N ; \pm \rangle$$



asintótico

como aquel estado en el cuadro de Heisenberg en el cual se detectarán las partículas indicadas si se realiza una medición al tiempo $t \rightarrow \mp \infty$.

Para comparar con resultados experimentales, nuestro objetivo principal será entonces calcular los traslapes entre los estados entrantes y los salientes,

$$\langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_N ; - | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N ; + \rangle \equiv S_{p', \dots, p} \equiv S_{\mp \mp}$$

que representan la amplitud de probabilidad de que ocurran los procesos de dispersión señalados, y se conocen como amplitudes de dispersión o (toda junta) la matriz S (o matriz de dispersión).

Estas amplitudes están muy directamente relacionadas con las cantidades que los físicos experimentales miden directamente: "sección eficaz" y "taxa de decaimiento".

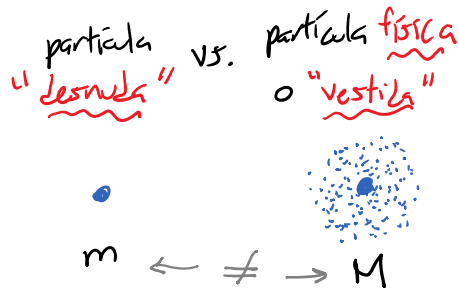
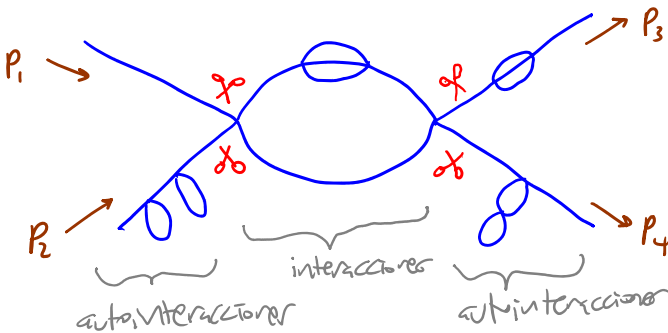
Es posible deducir una fórmula que relaciona a las amplitudes de dispersión con los correladores ("fórmula LSZ").

En términos de diagramas de Feynman, uno encuentra que:

$$\langle p'_1, p'_2, \dots, p'_N; - | p_1, p_2, \dots, p_N; + \rangle =$$

(suma sobre diagramas
conexos y amputados)


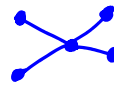
donde "amputar" un diagrama significa eliminar las patas externas, cortando cada una de ellas en el lugar más interno posible. P.ej., en el diagrama



habría que cortar en donde aparecen las tijeras: empezando en la punta de cada pata y caminando hacia el centro del diagrama, encontraremos el último lugar donde la pata se desconecta al cercarse a sola línea, y cortamos precisamente ahí, descartando incluso el propagador libre asociado a esa última línea (que hemos denotado como puntada), y reemplazándolo por $\sqrt{Z} \equiv |\langle \hat{p} | \hat{\phi}(x) | \Omega \rangle|$ ($= 1$ al orden más bajo en λ). Esos tramos emitidos codifican a las interacciones de cada partícula consigo misma.

No conviene entonces solo dibujar diagramas ya amputados.

L5

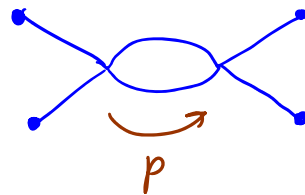
Al hacer cuentas en la práctica, siempre es relativamente fácil obtener resultados explícitos para los diagramas "a nivel árbol" (\equiv sin lazos, como p.ej.  ó ) , pero más allá de eso nos encontramos genéricamente con 2 problemas:

1) En un diagrama con 1 ó más lazos, la(s) integral(es)

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

sobre los momentos

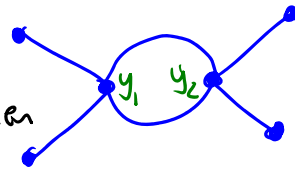
indeterminados (uno por cada lazo)



en general no convergen para p's grandes, $p^\mu \rightarrow \pm\infty$

En espacio de posiciones, estas

"divergencias ultravioleta" (\equiv UV) provienen



del límite de distancias pequeñas donde 2 ó más

vértices coinciden en el espaciotiempo, $y_1^\mu \rightarrow y_2^\mu$.

Si la teoría tiene la propiedad de ser "renormalizable",

estas divergencias UV se pueden eliminar ajustando un número finito de parámetros, cuyos valores deducimos

de los datos experimentales. Este procedimiento

se conoce como renormalización, y tiene perfecto sentido

físico: no es más que un cambio de lenguaje, para

reportar nuestros resultados No en términos de los parámetros "de nudar" que figuran en \mathcal{L} (m, λ, \dots), sino de parámetros físicos (M, Λ, \dots), relacionados con cantidades medibles (y por tanto finitas).

[En teorías con partículas sin masa, como QED, por los propagadores $\propto \frac{i}{p^2 + i\epsilon}$ pueden aparecer además "divergencias infrarrojas" ($\equiv IR$), que corresponden a bajas energías, $p^0 \rightarrow 0$, o lo que es lo mismo, distancias grandes, $|y^0 - y^0| \rightarrow \infty$.]

2) El número de diagramas que se obtienen a $\mathcal{O}(\lambda^n)$ crece muy rápidamente — típicamente $\sim n!$ —, de tal manera que $G_N^{(n)} \sim \lambda^n n!$, y por tanto la serie perturbativa NO converge.

Esta es una señal clara de que el método perturbativo

NO contiene toda la física: existen efectos

NO perturbativos (típicamente $\sim \exp(-1/\lambda)$;

no desarrollables en Taylor), que son pequeños si el acoplamiento es débil.

Con lo anterior tenemos ya completo el paquete básico de ideas para un campo escalar débilmente acoplado. Debemos tener siempre presente que cuando el acoplamiento es fuerte ($\lambda \sim 1$, o peor aún, $\lambda \gg 1$), la expansión perturbativa es completamente inútil: ¡no nos sirve ni como método de cálculo ni de visualización!

Para entender a y hacer cálculos en campos no escalares, las ideas y herramientas básicas son las mismas, aunque en cada caso surgen novedades interesantes.

• CAMPO VECTORIAL

Para describir partículas con espín 1, se utiliza un campo vectorial $A_\mu(x)$: una colección de 4 números en cada lugar, que bajo transformaciones de Poincaré (= Lorentz + traslaciones),

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + c^\mu,$$

↪ matriz 4×4 tal que $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

se mezclan de acuerdo con

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x)$$

"representación vectorial
del grupo de Lorentz"

↑ nuevo nombre del punto
↑ nueva función característica

Si nuestro campo vectorial es no masivo, como es el caso del potencial electromagnético, hay una novedad importante: la existencia de "transformaciones de norma" (gauge). En el caso de electro, también la forma

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \Theta(x)$$

en $\Theta(x)$ una función arbitraria. Exigiendo invariancia bajo estas transformaciones y bajo Lorentz, construiremos para nuestro campo vectorial no masivo libre la acción de Maxwell

$$S[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{con } F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

← solo término cinético

Las transformaciones de norma tienen la peculiaridad de que no producen ningún cambio en el sistema físico: las configuraciones $A_{\mu}(x)$ y $A'_{\mu}(x)$ son completamente equivalentes:
 $\vdash A'_{\mu}(x) \simeq A_{\mu}(x) \forall \Theta(x)$! Es decir, no solo es que $S[A] = S[A']$ (como es el caso para una simetría), sino que los propios estados físicos no cambian: $|A_{\mu}(x)\rangle$ y $|A'_{\mu}(x)\rangle$ son el mismo vector

en el espacio de Hilbert físico.

En otras palabras, la invariancia de normas (más llamada simetría de normas) nos indica que nuestra descripción es redundante: tenemos más variables que grado de libertad físicos.

En el caso familiar de electro esto en realidad nos deberá resultar obvio: $A_\mu(x)$ tiene 4 componentes, pero los fotones (o las ondas electromagnéticas clásicas) tienen solo 2 estados de polarización independientes.

Esta redundancia complica un poco el proceso de cuantización, y subsanar teniendo básicamente 2 opciones:

1) Eliminar la redundancia ("fijar la norma")

por completo ANTES de cuantizar, pero solo promover las variables físicas a operadores. P.ej., podemos

usar la "norma de Coulomb" $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, A_0 = 0,$

donde únicamente $\vec{A}_\perp \rightarrow \hat{\vec{A}}_\perp$. $\nearrow \nearrow$ no covariante bajo Lorentz

2) Cuantizar PRIMERO, $A_\mu \rightarrow \hat{A}_\mu$, obteniendo

una descripción cuántica redundante, donde

el espacio de Hilbert es demasiado grande (existen estados que no son físicos), y DESPUÉS eliminar

la redundancia. P.ej., en la "norma de Lorentz",
 $\partial_\mu A^\mu = 0$, identificamos cuiles estados son físicos
 exigiendo que $(\partial_\mu \hat{A}^\mu)_+ |0\rangle = 0$.
 ↗ parte de frecuencia positiva ($\sim \hat{a}$)

Por este segundo camino, se puede calcular el
 propagador de Feynman para el fotón $\langle 0 | T \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \} | 0 \rangle$

índice relaciones en polarización μ (↔ espín o "helicidad") del fotón → μ

métrica de Minkowski en espacio de momentos.

cf. Klein-Gordon $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

$$= -\frac{i \eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

Ahora podemos preguntarnos cómo acoplar a un campo escalar
complejo $\Phi(x)$ con este campo vectorial sin masa $A_\mu(x)$

≡ campo de norma:

debe ser real, invariante bajo Lorentz, rotaciones de fase de Φ , y transf. de norma

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\Phi, A_\mu)$$

$$-m^2 \Phi^* \Phi - m^2 A_\mu A^\mu + 2i \Phi^* \Phi A_\mu A^\mu + i A_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - \dots$$

La receta más sencilla que funciona es simplemente reemplazar,
 en el término cinético de Φ , a la derivada usual por una

derivada covariante: $\mathbb{D}_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + iq A_\mu) \Phi$ $q = \text{cte.}$

Con esto, $\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ se convierte en

$$\mathcal{L} = (\underbrace{D_\mu \Phi}^{\text{oro}})^* D^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Electrodinámica
scalar

contiene $\partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi$ y

términos de interacción $\sim g A \Phi^* \Phi, g^2 A^2 \Phi^* \Phi$

\mathcal{L} es invariante bajo las transformaciones de norma

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i g \theta(x)} \Phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x)$$

↑ rotación de fase local (distinta en cada punto)

Por construcción, $D_\mu \Phi$ transforma igual que Φ :

$$D_\mu \Phi(x) \rightarrow D'_\mu \Phi(x) = e^{i g \theta(x)} D_\mu \Phi(x).$$

Esta receta para acoplar a A_μ en campos complejos, conocida como "acoplamiento mínimo", es LA manera en la que el potencial electromagnético se acopla a campos cargados.

De los términos de interacción vemos que g es el acoplamiento, es decir, la carga eléctrica de las partículas asociadas a Φ . En la p. 30 teníamos $g=1$, porque allí llamamos θ a la fase por la cual rotamos a Φ , y así es $g\theta$, con lo cual la carga total se relaciona a

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} g (\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p - \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p)$$

• CAMPO ESPINORIAL

Para describir a partículas de espín $1/2$, como el electrón, en su caso de cinética no relativista definieron el concepto de espinor como un par de 2 números complejos, $\chi = \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix}$, que bajo

una rotación espacial genérica R (matriz 3×3 tal que $R^T R = \mathbb{1}$),
 $R(\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}) = \exp \left[i\theta_{12} J^{(12)} + i\theta_{23} J^{(23)} + i\theta_{31} J^{(31)} \right]$

$$\text{con } iJ^{(12)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad iJ^{(23)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad iJ^{(31)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑ "generación" de rotación en el plano 1-2 (i.e., alrededor del eje 3)

$$\text{(p.ej. } R(\theta, 0, 0) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark)$$

transforma así:

$$\chi \rightarrow \chi' = \underbrace{\exp \left[i\theta_{12} \frac{\sigma^3}{2} + i\theta_{23} \frac{\sigma^1}{2} + i\theta_{31} \frac{\sigma^2}{2} \right]}_{\equiv M(R) \text{ matriz } 2 \times 2} \chi,$$

donde $\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son las matrices de Pauli (que satisfacen $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{1} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$).

El punto importante es que las 3 matrices 2×2 $\frac{\sigma^i}{2}$ satisfacen

las mismas reglas de conmutación que las 3 matrices 3×3
 $J^{(12)} \equiv J^3$, $J^{(23)} \equiv J^1$, $J^{(31)} \equiv J^2$, y al experimentar, esto
 implica que las matrices 3×3 R y 2×2 $M(R)$ satisfacen
 la misma tabla de multiplicación:

$$\text{si } R_2 R_1 = R_3, \text{ entonces } M(R_2)M(R_1) = M(R_3).$$

Esto es indispensable para que nuestra regla de trans-
 formación de χ tenga sentido, pues de otro modo obtendríamos
 un distinto resultado para el nuevo espínor χ' de acuerdo
 de si hacemos la rotación R_3 de un jalón o por pasos R_1, R_2 .
 Matemáticamente, decimos que las matrices $M(R)$ son una
 "representación" del grupo de rotaciones $SO(3)$. (En realidad,
 son una "representación proyectiva", es decir, satisfacen la
 misma tabla de multiplicación que las R salvo por una fase ± 1 ,
 que no tiene importancia cuando estamos haciendo cálculos.
 Las $M(R)$ son literalmente una representación de $SU(2)$, que
 es el "grupo cubierto" de $SO(3)$, $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$.)

Cuando vamos al caso relativista, además de
 rotaciones $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ podemos hacer empujones

$$\Lambda = \exp \left[i\alpha_1 J^{(01)} + i\alpha_2 J^{(02)} + i\alpha_3 J^{(03)} \right]$$

↑ generador de empujón en la dirección 1

$$\text{con } iJ^{(01)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad iJ^{(02)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad iJ^{(03)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos preguntarnos entonces cómo transforman el espínor χ bajo empujones. Es decir, debemos encontrar otras 3 matrices 2×2 $\frac{\tau^i}{2}$ que satisfagan las mismas relaciones de conmutación (entre sí y con las $\frac{\sigma^i}{2}$) que las que cumplen las $J^{(0i)}$ (entre sí y con las $J^{(ij)}$). Resulta haber 2 opciones distintas:

$$\frac{\tau^i}{2} = -\frac{i\sigma^i}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\tau^i}{2} = +\frac{i\sigma^i}{2}, \quad \text{así que hay 2 tipos de}$$

espinores relativistas, que llamamos espinores de Weyl

"izquierdo" χ_I y "derecho" χ_D , respectivamente:
↑ parámetro de números complejos ↓

$$\chi_I \rightarrow \chi'_I = \exp \left[i\alpha_1 \left(\frac{-i\sigma^1}{2} \right) + i\alpha_2 \left(\frac{-i\sigma^2}{2} \right) + i\alpha_3 \left(\frac{-i\sigma^3}{2} \right) \right] \chi_I.$$

Podemos entonces definir campos espinoriales izquierdos o derechos

$\chi_I(x)$ o $\chi_D(x)$ ← un espínor del tipo apropiado en cada x^μ .

Frecuentemente trabajamos en teorías que, además de ser invariantes bajo las 6 transformaciones de Lorentz continuas $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ con $\Lambda(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{31}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (3 rotaciones + 3 empujones), tienen también como simetría a la transformación discreta que llamamos paridad: $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{P} \Rightarrow \begin{cases} t'=t \\ \vec{x}'=-\vec{x} \end{cases}$.

Al actuar sobre los espinores de Weyl, la paridad tiene el efecto de intercambiar al izquierdo con el derecho: $\chi_I \xleftrightarrow{P} \chi_D$ (es por esto que los llamamos izquierdo y derecho).

Así que en una teoría invariante bajo paridad, por cada campo espinorial izquierdo $\chi_I(x)$ debe también existir un correspondiente campo espinorial derecho $\chi_D(x)$ (aunque es posible representar este último como $\eta_I(x) \equiv i\sigma^2 \chi_D^*(x)$, que según puede comprobarse, transforma como un espinor izquierdo).

Es útil entonces empaquetar a ambos tipos de espinor de Weyl en un espinor más grande, $\Psi \equiv \begin{pmatrix} \chi_I \\ \chi_D \end{pmatrix}$ espinor de Dirac.

↑ índice espinorial $a=1, \dots, 4$ usualmente oculto

La regla de transformación de este objeto bajo rotaciones y empujones puede resumirse convenientemente en términos de 4 matrices 4×4 , γ^μ , que son análogas a las de Pauli:

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Matrices de Dirac}$$

Estas satisfacen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$.

Bajo $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ con $\Lambda = \exp\left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{(\mu\nu)}\right]$,

el espinor de Dirac transforma como $\Psi \rightarrow \Psi' = \exp\left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right] \Psi$, con $S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

↑ θ_{ij} y τ_0

Baso paridad, $x^\mu \rightarrow x'^\mu = P^\mu_\nu x^\nu$, se tiene $\psi \rightarrow \psi' = \gamma^0 \psi$.

Si definimos la "matriz de quiralidad"

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (tal que } \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, (\gamma^5)^2 = 1),$$

podemos recuperar las partes izquierda y derecha:

$$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi_D \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_D \end{pmatrix}.$$

Como $\gamma^5 \psi_{\pm} = \mp \psi_{\pm}$, les llamamos también espinores de

quiralidad $\left\{ \begin{array}{l} \text{negativa} \\ \text{positiva} \end{array} \right.$.

Se puede además comprobar que el espinor conjugado de Dirac

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \equiv (\psi^*)^T \gamma^0 \text{ transforma al revés que } \psi,$$

de tal modo que $\bar{\psi} \psi \equiv \psi_a^* \gamma^0_{ab} \psi_b$ es un escalar.

Y interesantemente, $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \equiv \psi_a^* \gamma^0_{ab} \gamma^\mu_{bc} \psi_c$ es un vector.

Definimos un campo espinorial de Dirac, $\psi(x)$, como aquel que nos da un espinor de Dirac en cada punto. En el caso libre, la densidad lagrangiana más sencilla que podemos escribir (cuadrática, escalar, real) es

ojo: m y no m^2 , por análisis dimensional

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

Lagrangiano de Dirac

↑ necesario para que la acción sea real

$$= \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi$$

↑ $\equiv \gamma^\mu\partial_\mu$ operador (diferencial) de Dirac

La ecuación de movimiento resultante es

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi(x) = 0$$

ecuación de Dirac.

Puede mostrarse que esta ecuación implica que se satisface también la de Klein-Gordon, $(\partial^2 + m^2)\Psi = 0$, y además impone una restricción que determina a χ_{I} en términos de χ_{D} (o viceversa): $\chi_{\text{I}}(x) = \frac{i}{m}\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu\chi_{\text{D}}(x)$ $\sigma^{\mu\nu} \equiv (\mathbb{1}, \sigma^i)$

Por esta razón, $\Psi(x)$ tiene al final solo 4 datos reales independientes en cada punto, que es justo lo que esperamos para describir a una partícula cargada con espín $1/2$, como el electrón: hay 2 estados internos del electrón y otros 2 del antielectrón.

Al cuantizar, la principal novedad es que, después de descomponer en ondas planas y obtener las operaciones de creación/aniquilación

esparcidos,

$s=1,2$ etiquetas estado de espín

$$\hat{\Psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1}^2 \left(\hat{a}_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

↑ operadores solución ↓
de Dirac

$$\hat{\bar{\Psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1}^2 \left(\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

con $\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger}$, $\hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger}$ respectivamente operadores de creación de partícula (p.ej. electrón) y antipartícula (antielectrón), uno descubre que existen estados con energía arbitrariamente negativa, a menos de que uno efectúe la cuantización canónica imponiendo relaciones de anticonmutación en lugar de cuantización,

$$\{\hat{\Psi}(\vec{x}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbb{1},$$

$$\{\hat{\Psi}(\vec{x}, t), \hat{\Psi}(\vec{x}', t)\} = 0$$

$$\leftrightarrow \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'\dagger} \right\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta^{ss'} = \left\{ \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'\dagger} \right\},$$

$$\left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} \right\} = \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} \right\} = 0 = \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}}^{s'\dagger} \right\} = \left\{ \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'\dagger} \right\}$$

Es decir, demostrar que **las partículas de espín $1/2$**
 (\Leftrightarrow propiedades de transformación bajo Lorentz) **deben ser**
necesariamente fermiones ($\Leftrightarrow \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle = -\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle$),
 y con ello explicar el principio de exclusión de Pauli
 ($\{ \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \} = (\hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger)^2 = 0 \Rightarrow \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger | \vec{p}_1 \rangle = 0$),
 Más en general, se puede demostrar el

Teorema de Espín-Estadística: las partículas

de espín $\begin{cases} \text{entero} \\ \text{semientero} \end{cases}$ deben ser $\begin{cases} \text{bosones} (\Leftrightarrow \text{conmutadores}) \\ \text{fermiones} (\Leftrightarrow \text{anticomutadores}) \end{cases}$.

Habiendo extendido al campo de Dirac $\psi(x)$, podemos también acoplarlo al campo de Maxwell $A_\mu(x)$ usando la receta de "acoplamiento mínimo" de las pp. 61-62. La teoría resultante es la **electrodinámica cuántica (QED)**,

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \equiv \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}(\partial_\mu A_\nu) + \mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\psi, D_\mu \psi, \bar{\psi})$$

$\uparrow \equiv \partial_\mu + i\gamma A_\mu$
 para el electrón, $q = -e$

es decir,

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \gamma A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad \text{---} = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}, \quad \text{---} = -i\gamma^\mu$$

propagador del electrón propagador del fotón vértice

El Modelo Estándar entero está basado en el principio de invariancia de normas, utilizando

a campo de normas matriciales $A_{IJ}^{\mu}(x)$ $\leftarrow 1, \dots, N$
asociado a la "simetría" local $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

grupo no abeliano: Matrices No conmutan

en lugar del $U(1)$ que tenemos en electros.

En un poquito más de detalle: estos campos matriciales

$A_{IJ}^{\mu}(x)$, en lugar de transformarse como el potencial, electromagnético,

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\theta(x) \\ = e^{-i\theta(x)} (A_{\mu}(x) - i\partial_{\mu}) e^{i\theta(x)},$$

"matrices" 1×1

Cambian de acuerdo con "generadores" del grupo no abeliano
parámetro $(\alpha=1, \dots, d) \downarrow$ p.ej. $SU(N)$

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = \exp(-i\theta(x)T_{\alpha}) (A_{\mu}(x) - i\partial_{\mu}) \exp(i\theta(x)T_{\alpha})$$

Matrices $N \times N$

La intensidad de campo $F_{IJ}^{\mu\nu}(x)$ se define en este caso como

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + i[A_{\mu}, A_{\nu}]$$

$\neq 0$ en general

$F_{\mu\nu}(x)$ no es invariante de norma, sino que transformamos de acuerdo con

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \exp(-i\theta^\alpha(x)T_\alpha) F_{\mu\nu}(x) \exp(i\theta^\beta(x)T_\beta).$$

La densidad lagrangiana es una generalización de la de Maxwell, \leftarrow incluye interacciones $\sim A^3, A^4$

$$\mathcal{L}_{YM}(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)) = -\frac{1}{4} \text{Tr} [F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)].$$

Lagrangiano
de
Yang-Mills (-Shaw)

Un ejemplo de un campo de Yang-Mills es el campo gluónico (responsable de la interacción fuerte), asociado a transformaciones de norma con grupo $SU(3)$ (matrices complejas 3×3 unitarias y con determinante = 1).

La receta para acoplar un campo de Yang-Mills a campos de materia es la misma que antes. Necesitamos que el campo de materia tenga para empezar una simetría global bajo el grupo de norma en cuestión. P.ej., N campos escalares complejos $\Phi_I(x)$ que transforman de acuerdo con $\leftarrow I=1, \dots, N$

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) = e^{i\theta^\alpha T_\alpha} \Phi(x) \quad \leftarrow \text{misma rotación } \forall x$$

\leftarrow los N campos empacotados en una columna

Tal como en el caso electromagnético (p.68), si definimos la derivada covariante

$$D_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + iA_\mu) \Phi$$

← transformamos igual que $\Phi(x)$

y reemplazamos en el lagrangiano de Φ a $\partial_\mu \Phi$ por $D_\mu \Phi$ (p.ej., $\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi$ en Klein-Gordon), entonces la simetría global que también se convierte en una invariancia local,

$$\Phi(x) \rightarrow \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha) \Phi(x)$$

$$(y \ D\Phi(x) \rightarrow \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha) D\Phi(x)).$$

Podemos entonces construir una versión no abeliana de QED acoplando un campo de Yang-Mills $A_{IJ}^\mu(x)$ $I, J=1, \dots, N$ a un paquete de N campos de Dirac, $\Psi_I(x)$ $I=1, \dots, N$. En el caso donde el grupo de norma es $SU(3)$ ($N=3$), esto conduce a la cromodinámica cuántica (QCD)

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{YM} (A_{IJ}^\mu, \partial_\nu A_{IJ}^\mu) + \mathcal{L}_{Dirac} (\Psi_I, (D_\mu \Psi)_I, \bar{\Psi}_I)$$

↑ Yang-Mills

quark gluón vértices

↑ $\partial_\mu + iA_{\mu IJ}$
⇒ invariancia local $SU(3)$