

TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

Ustedes saben ya describir una partícula cuántica

No relativista:

$$\vec{x}, \vec{p} \rightarrow \hat{x}, \hat{p} \text{ con } [\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\delta^{ij} \quad (\hbar=1) \quad \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

delta de Kronecker

$$\text{Hamiltoniano } H = \vec{p}^2/2m \rightarrow \hat{H} = \hat{p}^2/2m$$

Los estados con energía definida son $|\vec{p}\rangle$ con $E = \vec{p}^2/2m$.

↖ momento definido

Para una partícula relativista sabemos que

$$p^\mu \equiv (E, \vec{p}) = (m\gamma, m\gamma\vec{v}) \quad (c=1)$$

↖ $1/\sqrt{1-v^2}$

satisface

$$p^2 \equiv p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu \equiv E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad \leftrightarrow \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2},$$

↖ métrica de Minkowski = diag(+1, -1, -1, -1)

así que para una partícula cuántica relativista $\hat{H} = \sqrt{\hat{p}^2 + m^2}$,

y los estados con energía definida son $|\vec{p}\rangle$ con $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Aunque dista mucho de ser obvio, resulta que

$$\text{Partículas} + \text{Relatividad Especial} + \text{Mecánica Cuántica} \\ = \text{Teoría Cuántica de Campos}$$

¿Por qué campo? La respuesta corta: ¡! porque el universo no está hecho de partículas, sino de campo!!

¿Qué es un campo? Por definición, un campo es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante del tiempo (matemáticamente, una función del espaciotiempo): $\varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi_{\vec{x}}(t)$

preferimos esta notación \nearrow

por relatividad

(Análogo a $\vec{x}_n(t)$ en sistema con N partículas \nwarrow índice continuo $\in \mathbb{R}^3$
 \nwarrow índice discreto $n=1, \dots, N$)

A partir de la definición, vemos que cualquier campo es un sistema con un número infinito (y no denumerable) de grados de libertad.

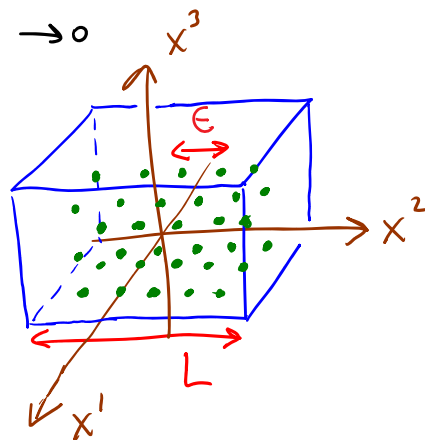
Se le puede pensar como el límite $L \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$

del caso con un volumen finito L^3 en un

espacio discretizado con espaciado ϵ ,

sistema que tendría $(L/\epsilon)^3$ grados de

libertad (retícula - en inglés, "lattice").



A ustedes les resultará ya muy familiar un ejemplo de campo: el campo electromagnético, descrito por 6 números en cada

lugar, $\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{B}(t, \vec{x}) \leftrightarrow F_{\mu\nu}(x)$ intensidad de campo (field strength),
 eléctrico magnético $\nwarrow \nwarrow$ antisimétrico $\equiv x^{\mu\nu}$

o mejor dicho, por 4 números en cada lugar,

$$A_\mu(x) \equiv \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{potencial} \\ \text{escalar}}}{\Phi(t, \vec{x})}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{potencial} \\ \text{vectorial}}}{\vec{A}(t, \vec{x})} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(A)dri) potencial} \\ \text{electromagnético} \end{array}$$

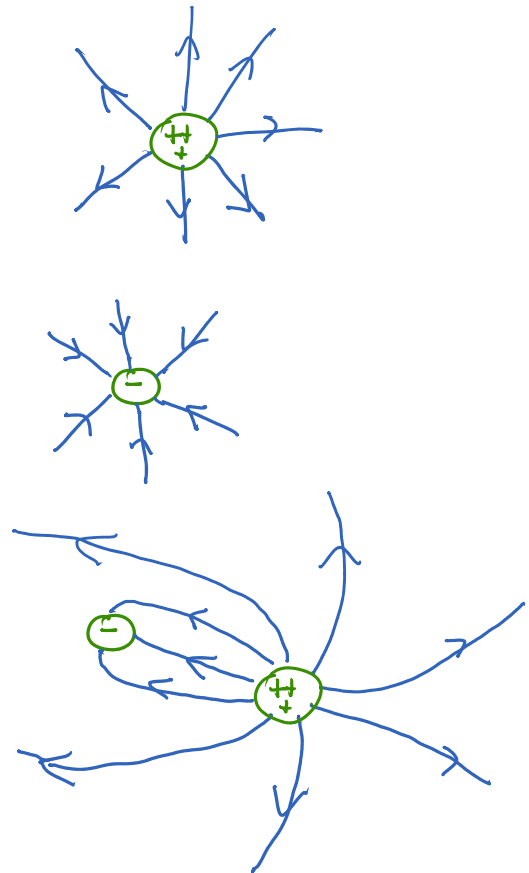
$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right\} \leftrightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

Vale la pena obtenerlos aquí con una adriación.

Cuando primero nos enseñan sobre \vec{E} y \vec{B} , visualizamos

que un imán o un objeto con carga eléctrica tiene (genera) su campo (que lo sigue cuando se mueve), que un segundo objeto tiene similarmente su propio campo, y que cuando ambos objetos están presentes sumamos su 2 campos para obtener el resultado total.

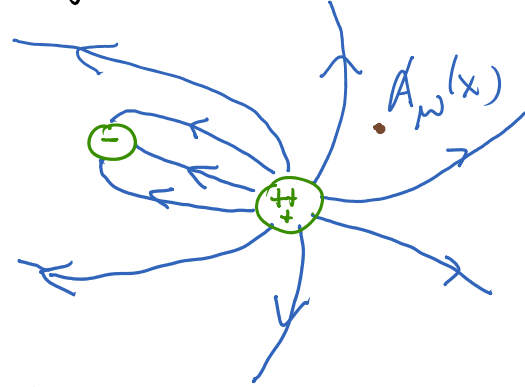
Pero éste NO es una buena manera de pensarlo.



Ya sea que haya uno, dos, muchos o ningún objeto, el campo electromagnético NO es "DE" ninguno de ellos: es un ente que llena siempre todo el espacio, y puede describirse dando 4 números en cada sitio.

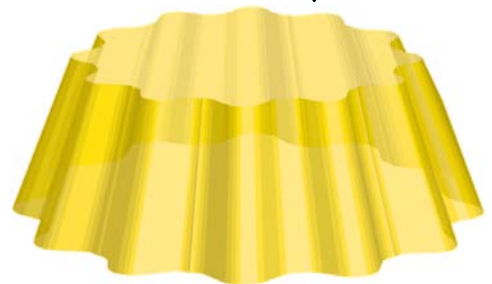
El valor de esos números SÍ depende de los objetos presentes; pero incluso cuando no hay ningún objeto, el campo electromagnético sigue estando ahí — es solo que los números son 0 en todo lugar, el campo está 'apagado'. El campo $A_\mu(x)$ es una propiedad de nuestro universo, preinstalada de fábrica.

Intuitivamente, podemos visualizarlo como una especie de 'gelatina' que llena absolutamente todo el universo y es capaz de vibrar (en un sentido abstracto) y sustentar ondas. Es justamente para describir cómo es que está vibrando que necesitamos especificar números en cada lugar.



$$\bullet A_\mu(x) = 0 \quad \forall x$$

2 El campo existe aún cuando no hay líneas / flechas



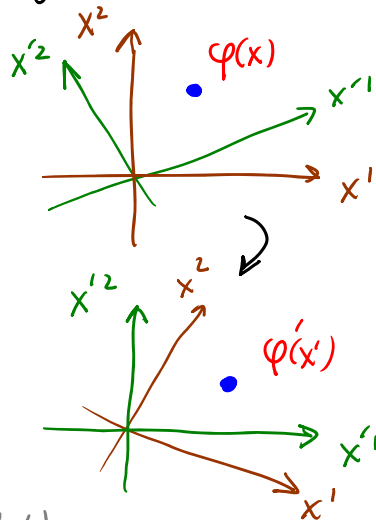
Por simplicidad, consideremos primero el campo más sencillo posible: un solo número real en cada x , que denotaremos $\varphi(x)$ (con $\varphi(x)^* = \varphi(x)$). Nos interesa estudiar campos relativistas (en el sentido de relatividad especial), es decir, con propiedades de transformación específicas bajo transformaciones de Lorentz
 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \equiv 3 \text{ rotaciones} + 3 \text{ empujones}$ ("boosts")
 $\Rightarrow x'_\mu y^\mu = x_\nu y^\nu$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \text{matriz } 4 \times 4 \text{ tal que} \\ \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \end{matrix}$ (que forman el grupo $SO(3,1)$)

Con $\varphi(x)$ solo tenemos un número en cada sitio, así que lo único decente que puede ocurrir cuando giramos nuestra cabeza (rotaciones) o pasamos caminando (empujones) es que ese número No cambie:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x') = \varphi(x)$$

\uparrow Cambia el nombre del punto
 cambi la función matemática

pero el valor en ese punto sigue igual



Esto es lo que se conoce como un campo escalar real.

Describiremos la dinámica de este campo a través de

la acción

$$S[\varphi(x)] \equiv \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

$\int dt$ $\leftarrow dx^0$ por localización
 $\int d^3x$ $\leftarrow dt$ es el mismo pie que \vec{v}
 \mathcal{L} \leftarrow corchetes denotan funcional
 \mathcal{L} Lagrangiano
 $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ densidad Lagrangiana

Justo como en el caso de un sistema con un número finito de grados de libertad, las ecs. de mov. para el campo $\varphi(x)$ se deducen a partir del principio variacional — las soluciones clásicas $\varphi_{cl}(x)$ serán aquellas configuraciones donde la acción es estacionaria:

$$\varphi_{cl}(x) \rightarrow \varphi_{cl}(x) + \delta\varphi(x) \Rightarrow S[\varphi] \rightarrow S[\varphi_{cl} + \delta\varphi] \equiv S[\varphi_{cl}] + \delta S[\varphi_{cl}, \delta\varphi]$$

con $\delta S[\varphi_{cl}, \delta\varphi] = 0$ para cualquier variación $\delta\varphi(x)$ que

satisface condiciones de borde apropiadas en la frontera de la región de integración (normalmente $\int_{t_i}^{t_f} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x$, quizás también con $t_i \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow +\infty$).

Dado que $\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \vec{\nabla})$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x) \Rightarrow \partial_\mu \varphi(x) \rightarrow \partial_\mu \varphi(x) + \underbrace{\partial_\mu \delta\varphi(x)}_{\equiv \delta(\partial_\mu \varphi(x))}$$

$$\delta S[\varphi, \delta\varphi] \equiv S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi]$$

$$= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\varphi(x) + \delta\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x) + \partial_\mu \delta\varphi(x)) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \delta\varphi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \partial_\mu \delta\varphi(x) \right\}$$

$$\stackrel{\text{partes}}{=} \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \right) \right\} \delta\varphi(x),$$

expresión que se anula para $\phi(x)$ arbitrario solo si se satisface la ecuación de movimiento para $\phi(x)$,

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi(x))} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)}$$

Ecuación de Euler-Lagrange

Sabemos que la acción $S[\phi]$ debe ser un número invariante bajo Lorentz, y $d^4x \equiv dx^0 dx^3$ es invariante, así que a partir de $S = \int d^4x \mathcal{L}$ concluimos que la densidad lagrangiana debe ser también invariante, es decir, $\mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu} \phi)$ debe ser una combinación de ϕ y $\partial_{\mu} \phi$ que sea escalar.

Claramente $\partial_{\mu} \phi$ es un vector de 4 \equiv vector covariante \equiv covector, así que no puede aparecer solo: para tener un escalar debemos

$$\text{formar la combinación } \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi \eta^{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi \equiv (\partial \phi)^2$$

transforma como vector
 \equiv vector contravariante

$$= (\partial_t \phi)^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2$$

Si queremos que la ecuación de movimiento sea de segundo orden en las derivadas (que es la situación más común), nuestra densidad lagrangiana debe entonces tomar la forma

↙ elegimos por conveniencia, ajustando la normalización de φ

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)$$

Término "cinético" "Potencial"
 $\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2$

A partir de esta descripción lagrangiana, podemos generar también los ingredientes de la correspondiente descripción hamiltoniana. Definimos primero (la densidad de) el momento canónico conjugado a $\varphi(x)$,

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x) \quad (\text{análogo a } \vec{p}_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n})$$

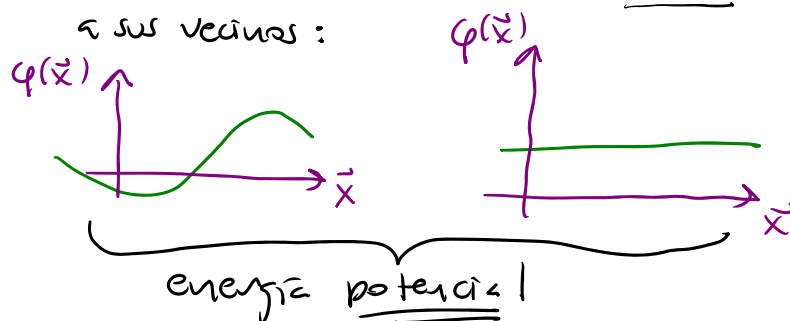
y utilizándolo (la), el Hamiltoniano

$$H \equiv \int d^3x (\pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}) \quad (\text{análogo a } H = \sum_n \vec{p}_n \cdot \dot{\vec{x}}_n - L)$$

$\equiv \mathcal{H}$ Densidad Hamiltoniana

$$= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + V(\varphi) \right]$$

Energía \rightarrow costo energético por variación espacial:
Cinética: cada $\varphi_{\vec{x}}$ está acoplado a sus vecinos:
 costo por encender el campo, incluso si tomamos un valor constante:
 costo por variación temporal



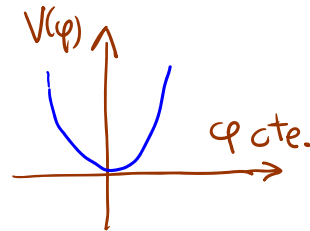
Lo más común es utilizar potenciales polinómicos,

$$V(\varphi) = C_1\varphi + C_2\varphi^2 + C_3\varphi^3 + C_4\varphi^4 + C_5\varphi^5 + \dots$$

↑ podemos cancelar corrientes apropiadamente $\varphi \rightarrow \varphi + \text{cte.}$

Empezaremos estudiando el caso

más sencillo, donde V es cuadrático:



Para que $\varphi=0$ sea un mínimo en

lugar de un máximo (y represente por tanto

$$\nabla_{\varphi}^2 V$$

el valor preferido del campo) necesitamos tener $V''(0) = 2C_2 > 0$,

condición que es más fácil de recordar si adoptamos la

notación $C_2 = \frac{1}{2}m^2$ (con m real), es decir, $m^2 \equiv V''(0)$.

Por razones que entenderemos en breve, un campo (no necesariamente escalar) con potencial cuadrático se

llama un campo libre. El campo escalar libre se

conoce también como campo de Klein-Gordon, y según

hemos visto, su densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_{\mu}\varphi \partial^{\mu}\varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Lagrangiano de
Klein-Gordon

y su densidad hamiltoniana (densidad de energía),

$$\mathcal{H}_{KG} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Hamiltoniano de
Klein-Gordon

La ecuación de movimiento (Euler-Lagrange) es

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \Rightarrow \boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi = 0} \quad \text{Ecuación de Klein-Gordon}$$

$$\underbrace{\quad}_{\equiv \square} \text{D'Alembertiano (Laplaciano)}$$

$$= \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$$

Igual que en el Hamiltoniano, en esta ecuación vemos que cada variable $\psi_{\vec{x}}(t)$ está acoplada a sus

vecinos:

$$\partial_t^2 \psi(\vec{x}, t) - \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t) + m^2 \psi(\vec{x}, t) = 0$$

$$\partial_i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi_{\vec{x} + \epsilon \hat{e}_i}(t) - \psi_{\vec{x}}(t)]$$

↻ vector unitario en dirección i

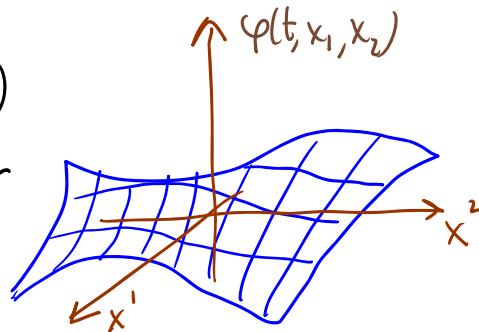
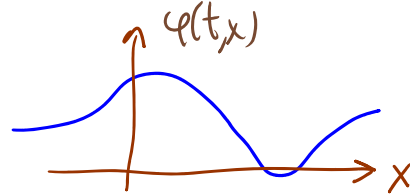
Es solo gracias a este acoplamiento que el campo es capaz de sustentar ondas - de hecho, si ponemos $m^2=0$ lo que tenemos es justamente

la llamada ecuación de ondas,

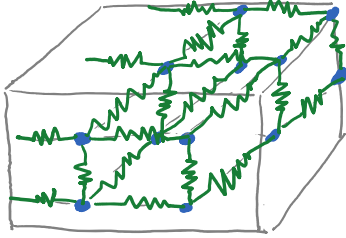
relevante para p.ej. una

cuerda de violín (cuya posición es descrita por un campo en 1+1 dim)

o a la membrana de un tambor (campo en 2+1 dim).



Vemos entonces que nuestro campo en 3+1 dim, $\varphi(t, \vec{x})$, en verdad es análogo a una GELATINA, o lo que es lo mismo,



a una colección de muchas pelotitas conectadas por resortes, en el límite donde el espaciamiento tiende a cero.

Por el acoplamiento entre puntos vecinos, el comportamiento de cada $\varphi_{\vec{x}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{x})$ (como el de cada pelotita) en general NO es sencillo. Pero para lidiar con las derivadas

especificar en la ecuación de movimiento $(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\varphi_{\vec{x}}(t) = 0$, podemos usar un truco familiar (de la cuerda, p.ej.): cambiar de variables por medio de una transformada de Fourier,

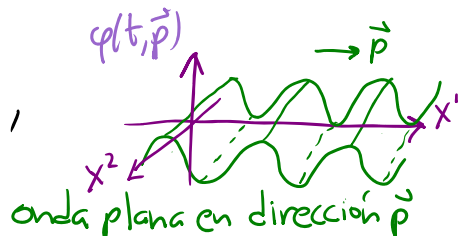
$$\varphi_{\vec{x}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{x}) \rightarrow \varphi_{\vec{p}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(t, \vec{x})$$

$$\left(\leftrightarrow \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(t, \vec{p}) \right),$$

$$\text{con } \varphi(t, \vec{x})^* = \varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi(t, \vec{p})^* = \varphi(t, -\vec{p}).$$

La ec. de mov. $(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = 0$ se convierte en

$$(\underbrace{\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2}_{\equiv E_{\vec{p}}^2})\varphi(t, \vec{p}) = 0,$$



es decir, $\ddot{\varphi}(t, \vec{p}) = -E_{\vec{p}}^2 \varphi(t, \vec{p})$: cada $\varphi(t, \vec{p})$ es un oscilador armónico con frecuencia $\omega = E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$:

$$\varphi_{\vec{p}}(t) = \alpha_{\vec{p}} e^{-i\omega t} + \beta_{\vec{p}} e^{+i\omega t}, \text{ con } \beta_{\vec{p}} = \alpha_{-\vec{p}}^*$$

\hat{L} para tener
 $\varphi_{\vec{p}}^* = \varphi_{-\vec{p}}$

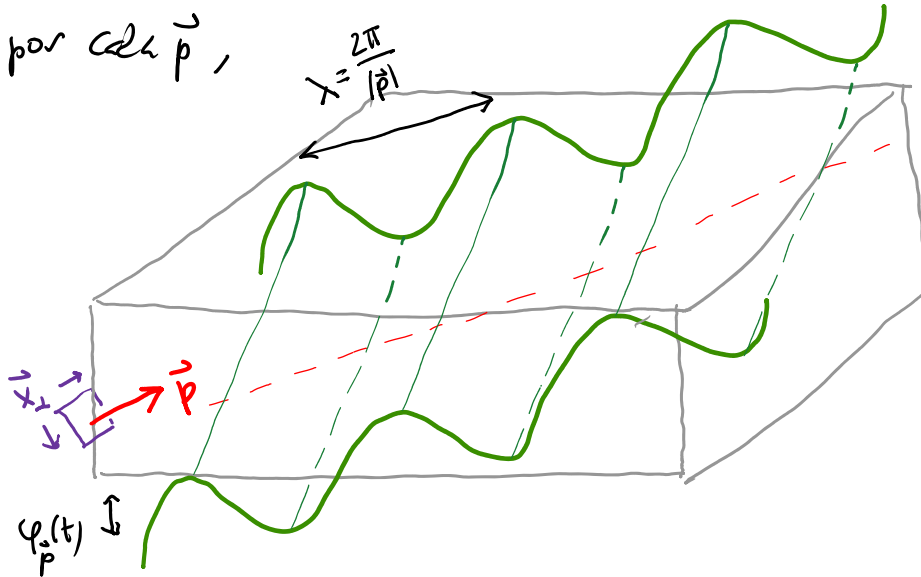
En otras palabras, hemos descubierto que los modos de Fourier son los modos normales del campo (compartimientos colectivos que oscilan armónicamente, tal como en una cuerda o en un sistema de péndulos con resortes), y nuestro campo libre $\varphi(t, \vec{x})$ no es entonces más que una colección infinita ($\varphi_{\vec{p}}(t) \forall \vec{p}$) de osciladores armónicos desacoplados — un sistema completamente análogo a una cuerda de violín, la membrana de un tambor, o una gelatina. El adjetivo "libre" para este campo se refiere justamente a que los modos de Fourier no interactúan entre sí (se superponen sin afectarse), que solo fue posible gracias a que la ec. de mov. es lineal en $\varphi \leftrightarrow \mathcal{L}$ es cuadrático en φ .
 Con esto entendemos perfectamente la manera L
 en que $\varphi(t, \vec{x})$ evolucionará a nivel clásico:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \alpha_{-\vec{p}}^* e^{iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \alpha_{-\vec{p}}^* e^{iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \end{aligned}$$

(números complejos)

que se fijan por condiciones iniciales

es simplemente una superposición de ondas planas viajeras, una por cada \vec{p} ,



Como en cualquier sistema mecánico, existe una conexión muy bonita entre las simetrías de un campo (transformaciones de x y/o de φ que no cambian la acción $S[\varphi]$) y la existencia de cantidades conservadas (es decir, que no cambian en el tiempo). Concretamente,

(cubri
rápido)

la transformación se puede hacer gradualmente

el teorema de Noether afirma que cada simetría continua da lugar a una ley de conservación. El teorema de hecho nos da una fórmula explícita para construir las cantidades conservadas a partir de los campos de la teoría (y sus derivadas).

Ver p.ej. los pp. 163-175 del curso

<http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes>

/indice.html#campos

Mencionaremos aquí solo 2 ejemplos:

- 1) Las 4 simetrías bajo traslaciones en el espaciotiempo, $x^\mu \rightarrow x^\mu + c^\mu$, dan lugar a 4 cargas conservadas,

$$P_\nu \equiv \int d^3x T^0_\nu = \int d^3x \left(\partial_\nu \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_\ell(x))} - \delta^0_\nu \mathcal{L} \right) \quad \begin{matrix} \text{(cuadri-)} \\ \text{Momento} \end{matrix}$$

La carga para $\nu=0$ es la energía total de los campos,

$$P_0 = \int d^3x \left(\partial_0 \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_\ell(x))} - \mathcal{L} \right) = H \quad \begin{matrix} \text{Hamiltoniano} \\ \text{(cf. p. 8)} \end{matrix} \quad \checkmark$$

Densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} \equiv T^0_0$

y las 3 cargas con $\nu=i$ son el momento espacial

$$\vec{P} = - \int d^3x \vec{\nabla} \varphi_\ell \Pi_\ell$$

↑ signo por índice espacial subido: $P^i \equiv \int d^3x T^{0i}$

↙ carga conservada

(Es importante NO confundir a la densidad de momento espacial

$T^{0i}(x)$ con la densidad de momento canónico $\Pi_\ell(x) \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi}_\ell$.)

↙ conjugada al campo

2) En una teoría con 2 campos escalares $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ (no necesariamente libres) que entran en el mismo pie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 - V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

tenemos invariancia bajo la 'rotación' (de los campos, no del

espacio)
$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi'_1(x) \\ \varphi'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix},$$

con θ un ángulo arbitrario (porque $\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$).

A diferencia de las traslaciones y Lorentz que son simétricos espatiotemporales, esta rotación es un ejemplo de lo que llamamos simetrías internas, porque no involucran cambios de las coordenadas x^μ .

Si a partir de φ_1 y φ_2 formamos el campo escalar complejo

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)),$$

← por convención

el lagrangiano se reescribe como

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - V(2\Phi^* \Phi),$$

y la rotación interna toma la forma más sencilla

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{i\theta} \Phi(x),$$

que evidentemente es una simetría.

Esta simetría continua da lugar a la carga conservada

$$Q = \int d^3x (\Phi^* \partial_t \Phi - \Phi \partial_t \Phi^*)$$

Cuando aprendamos cómo acoplar este campo $\Phi(x)$ al campo electromagnético $A_\mu(x)$, veremos que Q es ni más ni menos que la carga eléctrica.

Ahora, para que éste sea un curso de teoría cuántica de campos, ¿cómo cuantizar a nuestras gelatinas?

Sabemos que, para un sistema con un número finito de grados de libertad, la cuantización canónica consiste en promover las variables hamiltonianas básicas a operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert que describe a los estados del sistema, $H = \{|\psi\rangle\}$,

$$q_n(t), p_n(t) \rightarrow \hat{q}_n, \hat{p}_n$$

↑ coordenadas ↑ momentos

operadores independientes de t en el caso de Schrödinger

exigiendo que satisfagan las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{q}_n, \hat{p}_{n'}] = i \delta_{n,n'}, \quad [\hat{q}_n, \hat{q}_{n'}] = 0 = [\hat{p}_n, \hat{p}_{n'}]$$

$\hbar = 1$ ↗ ↖ delta de Kronecker $\equiv \begin{cases} 1 & \text{si } n=n' \\ 0 & \text{si } n \neq n' \end{cases}$

La evolución dinámica de los estados $|\psi(t)\rangle$ es generada por el operador hamiltoniano $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) \equiv H(\hat{q}, \hat{p})$ a través de

la ecuación de Schrödinger $i\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$.

Equivalentemente, podemos pasar al caso de Heisenberg, donde los operadores son los que llevan la dependencia temporal,

$$\hat{q}_n(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{q}_n e^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{p}_n(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{p}_n e^{-i\hat{H}t},$$

las relaciones de conmutación canónicas se imponen a tiempos iguales,

$$[\hat{q}_n(t), \hat{p}_{n'}(t)] = i\delta_{n,n'}, \quad [\hat{q}_n(t), \hat{q}_{n'}(t)] = 0 = [\hat{p}_n(t), \hat{p}_{n'}(t)]$$

(en general $[\hat{q}_n(t), \hat{q}_n(t')] \neq 0$), los estados NO evolucionan con el tiempo ($|\psi\rangle_{\text{Heisenberg}} \equiv |\psi(t=0)\rangle_{\text{Schrödinger}}$ codifica

tal la historia del sistema), y la evolución dinámica de los operadores $\hat{O}(t)$ es generada por \hat{H} a través de la ecuación de Heisenberg

$$\frac{d\hat{O}(t)}{dt} = i[\hat{H}, \hat{O}(t)] + \frac{\partial \hat{O}(t)}{\partial t}$$

← posible dependencia explícita de t
(NO a través de $\hat{q}(t), \hat{p}(t)$)

Para cuantizar a nuestro campo escalar $\varphi(t, \vec{x}) \equiv \varphi_{\vec{x}}(t)$ con lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi)$ (sistema con un

número infinito y no numerable de grados de libertad), aplicamos exactamente la misma receta:

convertimos al campo $\varphi(t, \vec{x})$ ^{← una f en cada \vec{x}} y a su momento canónico conjugado $\Pi(t, \vec{x}) = \dot{\varphi}(t, \vec{x})$ ^{← una p en cada \vec{x}} en operadores en el cuadro de Schrödinger, $\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})$, o en el de Heisenberg,

$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\varphi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t}$, $\hat{\Pi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\Pi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t}$,
^{↑ preferimos, por relatividad}
 e imponemos las relaciones de conmutación habituales:

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\Pi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')] \\ [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')] &= i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}} \quad \begin{array}{l} \text{OJO:} \\ t = t' \end{array}$$

donde la delta de Dirac $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} \infty & \text{si } \vec{x} = \vec{x}' \\ 0 & \text{si } \vec{x} \neq \vec{x}' \end{cases}$ tal que $\int d^3x f(\vec{x}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = f(\vec{x}')$ es el reemplazo natural de la delta de Kronecker que tendríamos para variables discretas.

Se puede mostrar que las ecuaciones de Heisenberg para los operadores $\hat{\varphi}(t, \vec{x})$ y $\hat{\Pi}(t, \vec{x})$ se combinan para implicar que, como esperaríamos, $\hat{\varphi}(t, \vec{x})$ satisface la misma ecuación de movimiento que era satisfecha por el campo $\varphi(t, \vec{x})$ a nivel clásico.

En el caso de un campo escalar real libre, la

ecuación de movimiento es la de Klein-Gordon (p. 10),

$$\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \hat{\varphi}(t, \vec{x}) = 0}$$

lo cual implica, tal como en las pp. 11-12, que los operadores asociados a los modos de Fourier

$$\hat{\varphi}_{\vec{p}}(t) \equiv \hat{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{\varphi}(t, \vec{x})$$

obedecen la ecuación del oscilador armónico

$$\partial_t^2 \hat{\varphi}(t, \vec{p}) = -\omega^2 \hat{\varphi}(t, \vec{p}) \quad \text{con frecuencia } \omega = E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

El punto central aquí es que ya habríamos aprendido que a nivel clásico un campo libre es una colección de osciladores armónicos desplazados (uno por cada \vec{p}), pero es obvio entonces que desde pequeños sabemos cómo cuantizarlo!

Recordemos que para un oscilador armónico es muy útil definir los operadores de ascenso y descenso \hat{a}^\dagger y \hat{a} a través de

$$\hat{x} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger),$$

← reescalé
x y p para
abrir la
masa M (→ 1)

$$\text{de modo que } [\hat{x}, \hat{p}] = i \iff [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$$

$$\text{y } \hat{H} = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \hat{x}^2 = \frac{\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\hat{N}}$
operador de número

Con estos ingredientes es fácil generar el conjunto completo de autoestados (eigenestados) de \hat{H} , es decir, de estados con energía definida:

* El estado base (o fundamental) es

$|0\rangle$ tal que $\hat{a}|0\rangle = 0$, y tiene energía $E = \frac{\omega}{2}$.
 \uparrow operador de descenso \uparrow "energía de punto cero"

* El primer estado excitado es (salvo normalización)

$|1\rangle \equiv \hat{a}^\dagger |0\rangle$, y tiene energía $E = \omega(1 + \frac{1}{2})$.
 \uparrow operador de ascenso

⋮

* El enésimo estado excitado es (salvo normalización)

$|n\rangle \equiv (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$, y tiene energía $E = \omega(n + \frac{1}{2})$.

En otras palabras, $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ ($\hat{H} = \omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$).
 $\uparrow \hat{a}^\dagger \hat{a}$

Regresando a nuestro campo escalar libre real ($\varphi^*(x) = \varphi(x) \Rightarrow \hat{\varphi}^\dagger(x) = \hat{\varphi}(x)$), sabemos que el operador $\hat{\varphi}(t, \vec{p})$ y su momento conjugado $\hat{\pi}(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-ip \cdot \vec{x}} \hat{\pi}(t, \vec{x})$ son los que juegan el papel de \hat{x} y \hat{p} para cada oscilador armónico, así que podemos piratearnos impunemente

La definición de los operadores de ascenso y descenso

$\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$:

$$\hat{\varphi}(\vec{p}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{\chi} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}))$$

↑ campo de Schrödinger
y ↓ (o Heisenberg a $t=0$)

↑ signo tal que $\hat{\varphi}(\vec{p})^{\dagger} = \hat{\varphi}(-\vec{p})$
 $\Rightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})^{\dagger} = \hat{\varphi}(\vec{x})$ (campo real)

$$\hat{\Pi}(\vec{p}) \equiv -i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{p} \equiv -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}))$$

A partir de las relaciones de conmutación para

$\hat{\varphi}(\vec{p})$ y $\hat{\Pi}(\vec{p})$ ($\leftrightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})$ y $\hat{\Pi}(\vec{x})$) es fácil deducir que

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

(análogo a $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}] = \delta_{ij}$)

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}]$$

Tenemos entonces

$$\hat{\varphi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}} + e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}),$$

$$\hat{\Pi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} -i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}} - e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}), \quad \underline{2}$$