

$$\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger$$

Regresando al caso escalar libre, sabemos que $\hat{\phi}(\vec{p})|0\rangle \propto |\vec{p}\rangle$,
 y podemos encontrar una interpretación física directa para $\hat{\phi}(\vec{x})$
 notando que

$$\hat{\phi}(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger) |0\rangle$$

$$\stackrel{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |\vec{p}\rangle \equiv |\vec{x}\rangle$$

\swarrow combinación invariante de Lorentz
 \nwarrow estados relativistas con posiciones definidas (tanto como es posible)

sería $\cong m$ en caso no relativista \nearrow sería $\langle \vec{p} | \vec{x} \rangle$ en caso no relativista

Es decir, $\hat{\phi}(\vec{x})$ es un operador que crea (o destruye)
una partícula localizada en \vec{x} .

Pasando al cuadro de Heisenberg, se encuentra similarmente
 que $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ crea/destruye una partícula en \vec{x} al tiempo t ,

$$\hat{\phi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |0\rangle \equiv |x\rangle$$

Vale la pena destacar que la aparición de t en
 $|x\rangle \equiv |x^0\rangle = |t, \vec{x}\rangle$ No se debe a que estemos
 hablando de un estado en el cuadro de Schrödinger:

$|x\rangle$ es por definición un estado en el cuadro de Heisenberg, que tiene la propiedad de que, si lo examinamos en t , encontraremos a la partícula en \vec{x} , y es por eso que t figura como parte del nombre del estado.

En el caso de un campo complejo, recordando (p.31) que $\hat{\Phi} \sim \hat{a} + \hat{b}^\dagger$ y $\hat{\Phi}^\dagger \sim \hat{a}^\dagger + \hat{b}$, el enunciado correspondiente es que

$\hat{\Phi}(x)$ destruye una partícula o crea una antipartícula
 ↳ localizada en x ↳

$\hat{\Phi}^\dagger(x)$ crea una partícula o destruye una antipartícula :
 ↳ localizada en x ↳

$$\hat{\Phi}^\dagger(x) |0\rangle \equiv |x, n\rangle, \quad \hat{\Phi}(x) |0\rangle \equiv |x, \bar{n}\rangle.$$

↳ nombre de partícula
(p.ej. π^+)

↳ antipartícula correspondiente
(p.ej. π^-)

Habiendo entendido lo anterior, podemos ahora hacer la única pregunta física que nos falta explorar en esta teoría libre. Dado que las partículas no interactúan, lo único que pueden hacer es propagarse.

libremente de un sitio a otro. Es interesante entonces preguntarnos qué tan probable es que tal cosa ocurra.

Concretamente, si $t' > t$ y sabemos que la partícula está en \vec{x} al tiempo t , ¿cuál es la amplitud de probabilidad de que la encontremos en \vec{x}' al tiempo t' ?

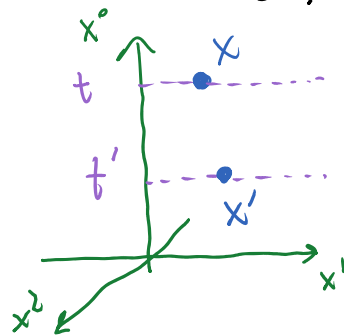
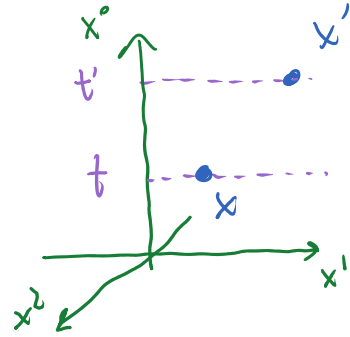
Sabiendo que el primer dato corresponde al estado $|x\rangle$ y el segundo a $|x'\rangle$ (en el axioma de Heisenberg), la respuesta está dada simplemente por el traslate (producto interno) entre ambos estados,

$$\langle x' | x \rangle = \langle 0 | \hat{\varphi}(x') \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle .$$

↑ crea partícula en x
↓ aniquila partícula en x'

Si x fuera en cambio posterior a x' ($t > t'$), en el uso cotidiano del lenguaje nos interesaría la amplitud de propagación de x' a x (y no al revés),

$$\langle x | x' \rangle = \langle 0 | \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') | 0 \rangle = \langle x' | x \rangle^* .$$



Es natural (y útil) definir entonces una amplitud de propagación que pueda referirse a cualquiera de las 2 opciones, según corresponda:

$$G(x', x) \equiv \langle x' | x \rangle \theta(x'^0 - x^0) + \langle x | x' \rangle \theta(x^0 - x'^0)$$

$$= \langle 0 | (\hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) \theta(x'^0 - x^0) + \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \theta(x^0 - x'^0)) | 0 \rangle$$

$$\equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) \} | 0 \rangle$$

↑ orden temporal: ordenar operadores de modo que el tiempo aumente de derecha a izquierda

Esta combinación se conoce como el propagador de Feynman, y es habitual representarlo como una línea que conecta a los eventos x y x' , ahora denotarlo solo esquemáticamente, como puntos que No hacen referencia a un diagrama espaciotemporal específico.



la línea no se refiere a una trayectoria definida: ¡la partícula es cuántica!

La invariancia bajo transformaciones en el espaciotiempo implica que $G(x', x) = G(x - x')$.

El cálculo de este propagador para nuestro campo libre

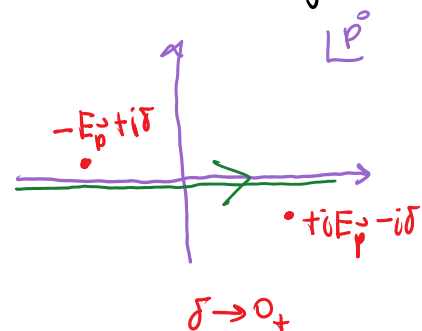
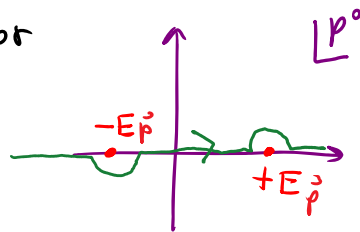
no presenta ninguna dificultad conceptual (¡estamos lidiando solo con osciladores armónicos!); pero no nos detendremos a hacerlo (ver ejercicio 4). El resultado es sencillo y se puede escribir en una forma manifiestamente invariante bajo Lorentz:

$$G(x', x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2}$$

Propagador de Feynman para campo escalar libre (Klein-Gordon)

$$\hookrightarrow (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_p^2$$

donde la novedad integral sobre p^0 significa que los orden planes que tenemos aquí están fuera de la capa de masa (off-shell), $p^0 \neq E_p$ ($p^2 \neq m^2$), y requiere una receta específica para lidiar con los polos simples que el integrando tiene en $p^0 = \pm E_p$, receta indicada en el diagrama de la derecha (equivocar los polos con breves excursiones en el plano complejo para la variable de integración p^0). Esto es equivalente a integrar sobre p^0 real pero desplazar los polos un poquito,



por lo que también es frecuente escribir

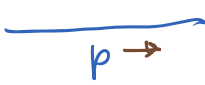
$$G(x', x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0_+$$

($\epsilon \equiv 2E_p \delta$)

Más fácil de recordar, e igualmente útil, es la transformada de Fourier

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad \text{ó} \quad \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Propiedad de Feynman
en espacio de momentos
(para Klein-Gordon)

que es habitual representar como  $p \rightarrow$ ↖ no se indican puntos inicial y final

flecha optativa para indicar el sentido en el que fluye p^M : $p \rightarrow = -p \leftarrow$

En el caso de un campo escalar complejo, definir

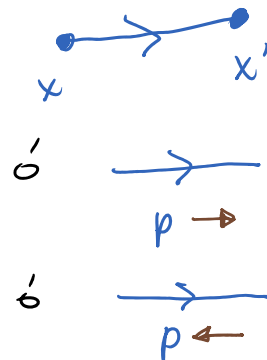
$$G(x', x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}(x') \hat{\Phi}^\dagger(x) \} | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \hat{\Phi}(x') \hat{\Phi}^\dagger(x) | 0 \rangle & \text{si } x' > x \\ \langle 0 | \hat{\Phi}^\dagger(x) \hat{\Phi}(x') | 0 \rangle & \text{si } x' < x \end{cases}$$

↑ crea partícula
↑ crea antipartícula

$$\left(\leftrightarrow G^*(x', x) = \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}^\dagger(x') \hat{\Phi}(x) \} | 0 \rangle \right),$$

y es habitual denotarlo como una línea con flecha que

indica (por convención) la dirección en la que se propagará la partícula (opuesta a la dirección de propagación de la antipartícula).



El resultado para $G(x', x)$ del campo escalar complejo es el mismo que vimos ya para el campo real.

Recordar que nuestro campo tiene además el hecho que describe a un número arbitrario de partículas, podemos interesarnos también calcular la amplitud de probabilidad de empezar con algún número n de partículas en x_1, \dots, x_n y terminar con otro número n' de partículas en $x'_1, \dots, x'_{n'}$. Esta amplitud está codificada en el correlador (o función de correlación, o función de Green) de N puntos

$$G_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x_N) \} | 0 \rangle$$

(con $N = n + n'$ y $x_{n+j} \equiv x'_j$).

← notar que $G(x', x) \equiv G_2(x', x)$

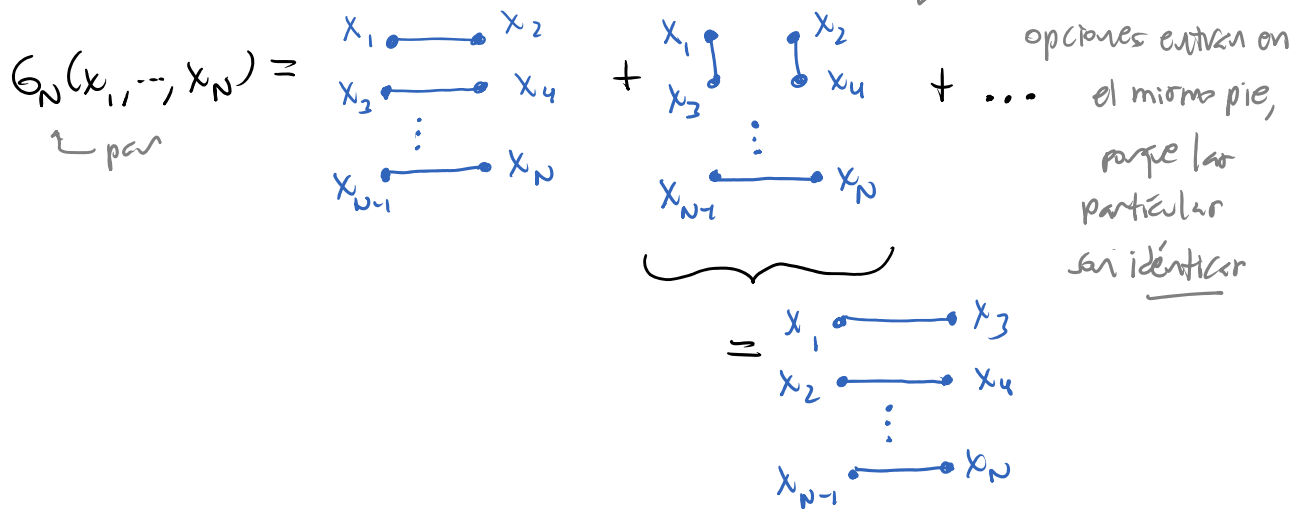
Pero en la teoría libre, las partículas no se crean una a otras, y el número de partículas no cambia ($n = n' \Rightarrow N$ debe ser par), así que conociendo la

amplitud de propagación de 1 partícula tenemos ya toda la información necesaria para el caso general. Usando el llamado "teorema de Wick" (ver ejercicio 5e), es posible mostrar que

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ es } \underline{\text{impar}} \\ G(x_1, x_2) G(x_3, x_4) \dots G(x_{N-1}, x_N) \\ + G(x_1, x_3) G(x_2, x_4) \dots & \text{si } N \text{ es } \underline{\text{par}} \\ + \text{todas las otras permutaciones} \end{cases}$$

que se puede visualizar con dibujitos:

← todas las $\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!}$



= Suma sobre todas las "Diagramas de Feynman"

con N puntos x_1, \dots, x_N conectados por líneas (donde la presencia de más de una línea representa el producto de las G correspondientes)

Hasta ahora hemos hablado de un

campo libre \leftrightarrow \mathcal{L} cuadrático (ec. de mov. lineal)

\leftrightarrow Modos de Fourier desacoplados

\leftrightarrow Partículas no interactuantes

Si agregamos a \mathcal{L} términos cúbicos en φ o más altos,

la ec. de mov. para φ ya no será lineal, y los modos

de Fourier $\varphi(t, \vec{p})$ no estarán ya desacoplados (\therefore no serán modos normales). La situación se vuelve bastante

confusa porque este cambio no solo hace que las

partículas interactúen entre sí, sino que modifica

incluso la definición misma de lo que es una partícula

$|\vec{p}\rangle$ (y \therefore también del vacío $|0\rangle$). El punto clave es

que al permitir que las viejas partículas (\leftrightarrow modos de

Fourier) interactúen una con otra, inevitablemente

acaban también interactuando consigo mismos.

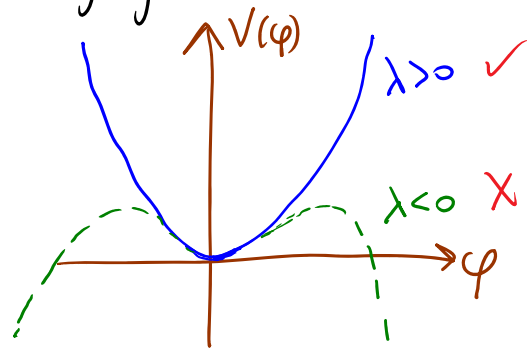
La relación entre el campo y las partículas

será mucho más sutil.

Para la teoría libre, descubrimos/entendimos la relación entre el campo $\tilde{\varphi}(x)$ y las partículas asociadas (sus "cuantos" básicos \leftrightarrow excitaciones más pequeñas posibles) solo después de resolver de forma exacta la ecuación de Klein-Gordon. Y para el caso de un campo interactuante, no seremos capaces de semejante proeza, porque la ecuación de movimiento es no lineal.

Para ser más concretos, consideremos la teoría de un campo escalar real con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2}_{\text{Término Cinético}} - \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv -V(\varphi) \text{ Energía Potencial}}$$



El parámetro λ , que determina la intensidad de las interacciones, se conoce como constante de acoplamiento, o simplemente acoplamiento.

El momento canónico conjugado a $\varphi(x)$ sigue siendo

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x), \quad \text{y el proceso}$$

de cuantización involucrará por supuesto el reemplazo

$$\varphi(x), \pi(x) \longrightarrow \hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x) \quad (\text{en el cuadro de Heisenberg})$$

con las reglas de conmutación usuales

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \underbrace{\hat{\pi}(t, \vec{x}')}_{\dot{\hat{\varphi}}(t, \vec{x}')}] &= i \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}), \\ [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] &= 0 = [\hat{\pi}, \hat{\pi}]. \end{aligned}}$$

Pero la ec. de Heisenberg para $\hat{\varphi}(x)$ (que coincide con la ec. de mpv. clásica)

$$(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi}(x) = -\frac{\lambda}{3!}\hat{\varphi}^3(x)$$

es No lineal, y $\therefore \hat{\varphi}(x)$ No puede ya expresarse como una combinación lineal de ondas planas con coeficientes

$$\hat{a}_p \text{ y } \hat{a}_p^\dagger.$$

\equiv teoría débilmente acoplada

Por otro lado, si las interacciones son débiles ($\Leftrightarrow \lambda \ll 1$),

esperaríamos que la dinámica del campo se pueda aproximar

con una expansión perturbativa en potencias de λ , que tengamos como punto de partida al campo libre ($\lambda=0 \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kb}}$).

Notando que podemos separar el Hamiltoniano

$$H = \underbrace{\int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right]}_{\equiv H_0 \leftarrow \text{libre}} + \underbrace{\int d^3x \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv H_{\text{int}} \leftarrow \text{interacción}},$$

nos conviene definir un cuadro en donde el operador de campo (y todos los operadores) evolucionen no con \hat{H} sino con \hat{H}_0 .

Es decir, en lugar del cuadro de Schrödinger,

$$\hat{O}_S, \quad |\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S,$$

o el de Heisenberg,

$$\hat{O}_H(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t}, \quad |\psi\rangle_H \equiv e^{i\hat{H}t} |\psi(t)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_S,$$

usaremos el llamado cuadro de interacción (o de Dyson, o de Tomonaga)

$$\hat{O}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0^s t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0^s t} = e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}t} \hat{O}_H(t) e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}_0^s t},$$

$$|\psi(t)\rangle_I \equiv e^{i\hat{H}_0^s t} |\psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_H.$$

En este cuadro tenemos, por construcción, que la ec. de evolución para los operadores involucra solo al Hamiltoniano libre,

$$i\partial_t \hat{O}_I(t) = [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^s] \quad (+ i\partial_t \hat{O}_I(t))$$

$$= [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^I]$$

↖ si hay dependencia explícita de t

(donde para la segunda igualdad hemos usado el hecho de que

$$\hat{H}_0^I \equiv e^{i\hat{H}_0^s t} \hat{H}_0^s e^{-i\hat{H}_0^s t} = \hat{H}_0^s = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}_I^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\phi}_I)^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}_I^2 \right]).$$

Esto es cierto en particular para $\hat{\phi}_I(x)$, que satisface entonces la ec. de mov. libre,

$$\boxed{(\partial^2 + m^2) \hat{\phi}_I(x) = 0} \quad \text{Klein-Gordon.}$$

Podemos entonces desarrollar como antes

$$\hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(e^{-ip \cdot x} \hat{a}_p + e^{ip \cdot x} \hat{a}_p^\dagger \right) \Big|_{p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

independientes de t

y las relaciones de conmutación implican necesariamente que

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad [\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = 0.$$

Además, tenemos evidentemente que

$$:\hat{H}_{\mathbb{I}}: = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p.$$

Todo esto resulta muy reconfortante, ¡pero hasta ahora, parece que solo estamos jugando a olvidarnos de \hat{H}_{int} !

Como habíamos dicho, el efecto de las interacciones se ve ahora en la evolución de los estados,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_{\mathbb{I}} &= e^{i\hat{H}_0^s t} |\psi(t)\rangle_s = e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}(t-t')} |\psi(t')\rangle_s \\ &= e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^s t'} |\psi(t')\rangle_{\mathbb{I}} \\ &\equiv \hat{U}_{\mathbb{I}}(t, t') \end{aligned}$$

Operador de evolución

(en el cuadro de interacción)

Felizmente, este objeto aparentemente horrendo puede ser reescrito puramente en términos de $\hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x)$: