Con esto podemos calcular el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\varphi}^2 \right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} E_{\vec{p}} \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \right)$$

← resultado esperado para cada oscilador

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Big(E_{\vec{p}} \underbrace{\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}}_{\equiv \hat{N}_{\vec{p}}} + \frac{1}{2} E_{\vec{p}} \underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}]}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}) = \infty} \Big)$$

nuestro primer infinito

operador de número para el oscilador $\vec{p}$

$$\left(\text{cf. } \hat{H} = \frac{\omega}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) = \omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tfrac{1}{2}) \right)$$

El segundo término en $\hat{H}$ claramente representa la 'energía de punto cero' del oscilador armónico etiquetado por $\vec{p}$, es decir, la energía que tiene ese oscilador cuando se encuentra sin excitar, en su estado base. Sabemos que, en ausencia de la gravedad, solo importan diferencias de energía, por lo que podemos por simplicidad ignorar estas constantes y trabajar con el Hamiltoniano

$$\boxed{:\hat{H}: \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{N}_{\vec{p}}},$$

Σ energía de cada modo de Fourier

que nos da la energía total del sistema medida por encima de la energía que tiene el campo sin excitar. En esta expresión hemos usado el símbolo $: \, :$, que denota lo que se conoce como "ordenamiento normal", el cual consiste en colocar todos los $\hat{a}^\dagger$'s a la izquierda de los $\hat{a}$'s (p.ej., $:\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}: \equiv \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}$, $:\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}: \equiv \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}$,

$:\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}\hat{a}_{\vec{p}'}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}: \equiv \hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}'} = \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}\hat{a}_{\vec{p}'}\hat{a}_{\vec{p}}$, etc.).

De manera similar, se encuentra que el operador de momento espacial asociado al campo (ver p. 14)

$$\hat{\vec{P}} = -\int d^3x \, \vec{\nabla}\hat{\varphi} \, \hat{\Pi}$$

se reduce a

momento espacial de cada modo

$$\boxed{\hat{\vec{P}} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\vec{p}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\vec{p}\,\hat{N}_{\vec{p}}} \, .$$

Conociendo $\hat{H}$, podemos también obtener el operador de campo en el cuadro de Heisenberg,

$$\hat{\varphi}(t,\vec{x}) = \exp(i\hat{H}t)\,\hat{\varphi}(\vec{x})\,\exp(-i\hat{H}t)$$

$$\hat{\varphi}(t,\vec{x}) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\left(\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-iE_{\vec{p}}t+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,e^{+iE_{\vec{p}}t-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right),$$

"frecuencia positiva" "frecuencia negativa"

que podemos resumir usando $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ con $p^0 = E_{\vec{p}}$, "frec. positiva" "frec. negativa"

$$\boxed{\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}} \quad .$$

De hecho, en la p. 13 habíamos visto que, para el campo clásico, la solución más general a la ec. de Klein-Gordon es

$$\varphi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\alpha_{\vec{p}}\, e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \alpha^*_{\vec{p}}\, e^{iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) ,$$

números complejos

así que lo único que ha ocurrido es que al promover $\varphi(x) \to \hat{\varphi}(x)$ tenemos $\alpha_{\vec{p}} \to \hat{\alpha}_{\vec{p}} \equiv \dfrac{\hat{a}_{\vec{p}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}$. ← operador de descenso

Entonces, aunque no lo habían notado, ¡desde antes de venir a este curso ustedes conocían ya la manera de cuantizar un campo libre (= gelatina con ec. de mov. lineal, o también una cuerda o una membrana), y de obtener fácilmente sus estados con energía definida!

Justo como hicimos para 1 oscilador armónico en la p. 20, podemos construir el espacio de autoestados de $:\hat{H}:$ (y $\hat{H}$) usando los operadores de ascenso y descenso. Identificamos primero al estado base (o fundamental) para el campo como aquel en el que todos los osciladores están sin excitar:

$$|0\rangle \equiv \text{"}|0,0,\dots\rangle\text{"} \quad \text{tal que} \quad \hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \ \forall \vec{p}, \ \langle 0|0\rangle = 1.$$

en realidad no podemos hacer una lista exhaustiva (la etiqueta $\vec{p}$ es no denumerable)

Actuando sobre este estado con un solo operador de ascenso, obtenemos los estados con 1 solo oscilador excitado:

$$|\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}}\ \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle \qquad (\equiv \text{"}|0,0,\dots \underset{\text{oscilador número } \vec{p}}{1},0,\dots\rangle\text{"})$$

donde hemos elegido la normalización de tal manera que

$$\langle \vec{p}\,'|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}\,'}}\sqrt{2E_{\vec{p}}}\ \underbrace{(\langle 0|\hat{a}_{\vec{p}\,'})(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle)}_{=\langle 0|\underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}\,'},\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}]}_{(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')}|0\rangle}$$

porque el término $-\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}\,'}$ da cero al actuar sobre $|0\rangle$

$$= (2\pi)^3\ \underbrace{2E_{\vec{p}}\ \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')}_{\text{combinación invariante bajo Lorentz}}.$$

¿Cuál es la energía de estos estados?

Usando $:\hat{H}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}$ vemos que

- $:\hat{H}:|0\rangle \propto \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0,$

  es decir, $|0\rangle$ tiene energía $E=0$ (resultado esperado porque omitimos la energía de punto cero);

- $$:\hat{H}:|\vec{p}\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\, E_{\vec{p}'}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}'} \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}'}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle}_{[\hat{a}_{\vec{p}'},\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}]|0\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')|0\rangle} \sqrt{2E_{\vec{p}}}$$

  ← porque el segundo término da 0

La delta de Dirac sirve para eliminar la integral, así que

$$:\hat{H}:|\vec{p}\rangle = E_{\vec{p}}\, \sqrt{2E_{\vec{p}}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle = E_{\vec{p}}\, |\vec{p}\rangle\,,$$

que es el resultado esperado para el primer nivel excitado de un oscilador con frecuencia $\omega = E_{\vec{p}}$. $\left(E = \omega(1 + \cancel{1/2}) \right)$

Con un cálculo idéntico, usando $\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \vec{p}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\, \hat{a}_{\vec{p}}$ (p.25), podemos obtener

$$\hat{\vec{P}}|0\rangle = 0\,, \qquad \hat{\vec{P}}|\vec{p}\rangle = \vec{p}\,|\vec{p}\rangle\,.$$

Vemos entonces que el estado $|\vec{p}\rangle$ del campo ($\leftrightarrow$ onda plana $\vec{p}$ lo menos energética posible en nuestra gelatina) tiene momento espacial $\vec{p}$ y energía $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ (su cuadrimomento p^μ satisface la "condición de capa de masa" $p^2 = m^2$), ¡¡justamente igual que una partícula relativista libre, con momento $\vec{p}$ y masa m!!

mass shell

Por esta razón llamamos a $|0\rangle$ ($\neq |\vec{0}\rangle$) el "vacío" (= estado sin partículas), y a $|\vec{p}\rangle$ el estado con 1 partícula (de momento $\vec{p}$).

Ahora, hemos visto que $|\vec{p}\rangle$, el estado donde apenas 1 oscilador está en su primer nivel excitado, describe a 1 partícula, ¿pero qué significado tienen los estados donde ese mismo oscilador está en un nivel más alto de excitación, o donde excitamos a más de 1 oscilador?

Si definimos $\underbrace{\text{“}|0,0,\ldots,1,0,\ldots,1,0\ldots\rangle\text{” ó “}|0,0,\ldots,2,0,\ldots\rangle\text{”}}$

$$|\vec{p},\vec{p}\,'\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}}\sqrt{2E_{\vec{p}\,'}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}|0\rangle \qquad (= |\vec{p}\,',\vec{p}\rangle)$$

porque las $\hat{a}^\dagger$'s conmutan

tenemos

$$:\hat{H}:|\vec{p},\vec{p}\,'\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}}\sqrt{2E_{\vec{p}\,'}}\int\frac{d^3p''}{(2\pi)^3}E_{\vec{p}\,''}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,''}\underbrace{\hat{a}_{\vec{p}\,''}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}}|0\rangle$$

$$\underbrace{\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}\,''}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}\,''-\vec{p})\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}$$

$$\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}\hat{a}_{\vec{p}\,''}+\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}\,''-\vec{p}\,')$$

$$= \sqrt{2E_{\vec{p}}}\sqrt{2E_{\vec{p}}}\left(E_{\vec{p}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}|0\rangle + E_{\vec{p}\,'}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle\right)$$

$$= \left(E_{\vec{p}}+E_{\vec{p}\,'}\right)|\vec{p},\vec{p}\,'\rangle,$$

y con un cálculo idéntico, $\hat{\vec{P}}|\vec{p},\vec{p}\,'\rangle = (\vec{p}+\vec{p}\,')|\vec{p},\vec{p}\,'\rangle$.

Es decir, $|\vec{p},\vec{p}\,'\rangle$ es 1 estado con 2 partículas relativistas libres (y en particular, desacopladas entre sí), con masa m, cuyos momentos espaciales son $\vec{p}$ y $\vec{p}\,'$.

Más en general, el punto es que el operador de número $\hat{N}_{\vec{p}} = \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\,\hat{a}_{\vec{p}}$ realmente calcula el nivel de excitación del modo de Fourier $\vec{p}$, y por ello se encuentra que $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle$ es un estado con n partículas idénticas libres con masa m y momentos $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$, cuya energía y momentos totales son

$$E = E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2} + \dots + E_{\vec{p}_n} \quad \text{y} \quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n \,.$$

Un punto que vale la pena resaltar es que nuestro campo/gelatina cuántico/a nos da la posibilidad de hablar de un número cualquiera de partículas.

El espacio de Hilbert asociado,

$$\mathcal{H} = \overset{\text{vacío}}{|0\rangle} \oplus \left\{ \begin{matrix} \text{1 partícula} \\ |\vec{p}\rangle \end{matrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{matrix} \text{2 partículas} \\ |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \end{matrix} \right\} \oplus \dots$$

se conoce por su estructura como "espacio de Fock".

En este contexto, los operadores de ascenso $\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}$ y descenso $\hat{a}_{\vec{p}}$ se conocen respectivamente como operadores de creación y aniquilación, porque sirven precisamente para "crear" o "aniquilar" partículas:

$$\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\,|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \propto |\vec{p}, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \,,$$

$$\hat{a}_{\vec{p}}\,|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \propto |\vec{p}_1, \dots, \cancel{\vec{p}_i}, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad \text{si } \vec{p} = \vec{p}_i$$

$$\left(= 0 \quad \text{si } \vec{p} \notin \{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\} \right) .$$

En resumen, hemos encontrado que los espacios de Hilbert de 2 sistemas que a primera vista parecían muy diferentes, un campo escalar y una colección de un número arbitrario ($n=0,1,2,\ldots$) de partículas sin espín, ¡en realidad coinciden a la perfección!

El acuerdo incluye no solo a los números cuánticos que etiquetan a los estados ($\vec{p}$'s), sino también a las energías, y por tanto, a la evolución temporal.

Los 2 sistemas resultan ser totalmente indistinguibles:

¡¡las partículas relativistas sin espín son en verdad pequeñas excitaciones cuánticas de un campo escalar!!

La misma historia aplica para un campo escalar libre complejo $\Phi(x)$ (p.15 $\longleftrightarrow$ 2 campos reales con las mismas propiedades), misma m

salvo que, al no tener ya la restricción de realidad o hermiticidad del campo ($\hat{\Phi}^\dagger \neq \hat{\Phi}$), para cada $\vec{p}$ obtenemos no 1 sino 2 parejas de operadores de creación y aniquilación: $\neq \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\Phi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\left(\hat{a}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}} \quad = \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2} \\ \hat{\Phi}^\dagger(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\left(\hat{b}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}}\end{aligned}}$$

con $[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{p}'}]$,

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] .$$

Las excitaciones de este campo son entonces de 2 tipos distintos, $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$ y $\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$, aunque corresponden a partículas con la misma masa m. En la p.16 vimos que, asociada a la simetría interna $\Phi(x) \to e^{i\theta}\Phi(x)$, existe una carga conservada $Q \equiv \int d^3x\,(\Phi^*\partial_t\Phi - \Phi\partial_t\Phi^*)$, que al acoplar a A_μ será ni más ni menos que la carga eléctrica. A nivel cuántico Q se convierte en el operador $\hat{Q} = \int d^3x\,(\hat{\Phi}^\dagger\partial_t\hat{\Phi} - \hat{\Phi}\partial_t\hat{\Phi}^\dagger)$, que en términos de operadores de creación/aniquilación toma la forma

$$\boxed{\hat{Q} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}}\right)} .$$

← para el campo real $\hat{b}_{\vec{p}} = \hat{a}_{\vec{p}}$ y $\therefore \hat{Q} = 0$

Con esto vemos que las partículas creadas por $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$ y $\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}$, aunque tienen la misma masa, se distinguen porque tienen carga eléctrica opuesta ($+1$ y -1, respectivamente). Es decir, el campo escalar complejo tiene como excitaciones a partículas cargadas, ¡junto con sus antipartículas!

↖ = partículas si $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^\dagger$ $(\hat{Q} = 0)$

En el mundo real, ejemplos de partículas sin espín, asociadas por tanto a campos escalares, son el bosón de Higgs (¿partícula elemental?) y el pión (estado ligado).

Similarmente, campos NO escalares (aquellos que SÍ cambian de una cierta manera bajo rotaciones y empujones) dan lugar a partículas CON espín (cuyo aspecto SÍ cambia de una manera específica cuando giramos la cabeza o pasamos caminando):

- los fotones (espín 1) son excitaciones del campo electromagnético $A_\mu(x)$, un campo vectorial real.
- los electrones y antielectrones (espín 1/2), son excitaciones del campo del electrón $\psi(x)$ ← índice de espinor oculto: 4 números complejos
  un campo "espinorial" complejo.
- Cada una de las partículas restantes del Modelo Estándar (junto con su antipartícula), es igualmente una excitación en un campo correspondiente (materia ↔ campos espinoriales, fuerzas ↔ campos vectoriales)

Así que, como prometimos desde el principio del curso, ¡¡nuestro universo en verdad está hecho no de partículas, sino de campos (gelatinas)!!