

8. Ecuaciones de Schwinger-Dyson e Identidades de Ward

Sabemos ya cuantizar cualquier teoría de campos por cuantización canónica y por integral funcional, aunque en general solo somos capaces de hacer cálculos explícitos si la teoría es débilmente acoplada (\Leftrightarrow ec. aprox. lineal \Leftrightarrow integral aprox. gaussianas).

Como hemos dicho varias veces, el objetivo primario es siempre determinar todas las funciones de correlación, funciones de Green o correladores

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

operadores en el cuadro de Heisenberg

vacío interactuante

que contienen toda la información física de la teoría.

Sabemos que en teorías libres representan directamente la amplitud de propagación de partículas entre puntos del espaciotiempo, mientras que en teorías interactuantes su transformada de Fourier contiene (a través de LSZ) las amplitudes de dispersión.

Vale la pena además destacar que en cualquier teoría tienen también un significado físico inmediato. Recordemos que en el vacío

el campo no tiene un valor definido en cada punto: $\hat{\varphi}(x)|\Omega\rangle \notin |\Omega\rangle$.

Por lo general, su valor esperado es cero, $\langle \Omega | \hat{\varphi}(x) | \Omega \rangle = 0$,

lo cual muestra que tiene igual propensión a tomar valores positivos o negativos. Pero entonces, el hecho de que

$$\underbrace{\langle \Omega | \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) | \Omega \rangle}_{\neq 0} \neq \langle \Omega | \hat{\varphi}(x_1) | \Omega \rangle \langle \Omega | \hat{\varphi}(x_2) | \Omega \rangle = 0$$

= $\langle \Omega | T\{\hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2)\} | \Omega \rangle$ para $x_1 > x_2$, "función de Wightman"

nos indica que en el vacío, el comportamiento (el patrón de indecisión) del campo en x_1 y en x_2 está correlacionado, es decir, $|\Omega\rangle$ es un estado entrelazado. Similarmente, el correlador de N puntos

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T\{\hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \dots \hat{\varphi}(x_N)\} | \Omega \rangle \neq 0$$

($\neq \sum_{p:(1, \dots, N) \rightarrow (j_1, \dots, j_N)} G_2(x_{j_1}, x_{j_2}) G_2(x_{j_3}, x_{j_4}) \dots G_2(x_{j_{N-1}}, x_{j_N})$ si hay interacciones)

expresa correlaciones/entrelazamiento multipartita en el estado $|\Omega\rangle$.

De hecho, el llamado teorema de Reeh-Schlieder afirma que el patrón de entrelazamiento en $|\Omega\rangle$ es tal que, actuando sobre él solo con operadores locales restringidos a una región acotada cualquiera, podemos obtener una aproximación arbitrariamente buena de cualquier

estado en el espacio de Hilbert completo \mathcal{H} . Por ejemplo, actuando sobre el vacío solo dentro de este salón, ¡podemos, a la EPR, crear el sol!

En años recientes se ha descubierto que es muy útil entender a una teoría de campos desde el punto de vista del entrelazamiento. P.ej., la cantidad de entrelazamiento presente en un estado parece una cota a la magnitud de todos los correladores [Wolff et al., 0704.3906].

Al día de hoy, esta sigue siendo un área de investigación muy activa

[ver p.ej. Calabrese y Cardy quant-ph/0505193, 0905.4013;

Casini y Huerta 0905.2562; Nishida, Ryu y Takayanagi 0905.0932].

Regresando a nuestro objetivo de determinar los correladores, normalmente somos capaces de hacer cálculos explícitos solo en el régimen de acoplamiento débil. Pero en este capítulo del curso

veremos que existen familias infinitas de restricciones no

perturbativas sobre los correladores de cualquier teoría, asociadas a las ecuaciones de movimiento (\Rightarrow "ecuaciones de Schwinger-Dyson") y/o a la existencia de simetrías (\Rightarrow "identidades de Ward").

La ruta más sencilla para deducir estas restricciones nos la da la cuantización por integral de trayectoria.

A nivel clásico, vimos que el teorema de Noether asocia a cada simetría continua una corriente que se conserva como consecuencia de la ecuación de movimiento para el campo. En cuantización canónica, el operador de campo $\hat{\varphi}(x)$ obedece esta misma ecuación, y tenemos por lo tanto la misma ley de conservación (salvo posibles violaciones de la simetría debidas a efectos cuánticos —las llamadas 'anomalías').

En el formalismo de la integral funcional, el campo $\varphi(x)$ es, como en el caso clásico, una función ordinaria, pero, al ser nuestra variable de integración, no está restringido a satisfacer la ecuación de movimiento.

¿En qué sentido entonces se satisface esta ecuación (y las posibles leyes de conservación asociadas a ella)?

Sabemos que, clásicamente, la ecuación de movimiento proviene de pedir que la acción $S[\varphi]$ sea invariante

bajo una variación arbitraria

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x).$$

Si consideramos esto como un cambio de variables en la integral de trayectoria, tenemos

$$\int D\varphi e^{iS[\varphi]} \stackrel{\text{renombrar}}{=} \int D\varphi' e^{iS[\varphi']} \quad \text{porque } \varphi \text{ es solo una variable de integración}$$

$$\stackrel{\text{cambio de variables}}{\rightarrow} \underbrace{D\varphi} \equiv S[\varphi] + \int d^4x' \delta\varphi(x') \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x')},$$

es decir,

$$\int D\varphi e^{iS[\varphi]} = \int D\varphi e^{iS[\varphi]} \left\{ 1 + i \int d^4x' \delta\varphi(x') \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x')} + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \right\}$$

o lo que es lo mismo,

$$0 = i \int d^4x' \delta\varphi(x') \int D\varphi e^{iS[\varphi]} \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x')}.$$

Dado que la variación $\delta\varphi(x)$ es arbitraria, concluimos que el valor esperado

$$\left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \right\rangle \equiv \int D\varphi e^{iS[\varphi]} \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = 0, \quad \text{p. 545}$$

recomendar que $\langle \text{SUT} \{ \delta(x) \dots \} | \Omega \rangle = \frac{\langle \delta(x) \dots \rangle}{\langle 1 \rangle}$

es decir, la ecuación de movimiento

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \right) = 0$$

se satisface en promedio.

Por ejemplo, para el campo de Klein-Gordon tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\partial^2 + m^2) \varphi(x) \rangle = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} (\partial^2 + m^2) \varphi(x) \\ &= (\partial^2 + m^2) \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \varphi(x). \end{aligned}$$

$\uparrow \partial_x^2$

En el lenguaje canónico, esto (dividido entre $Z[0] = \langle 1 \rangle$) dice simplemente que la función de correlación de 1 punto satisface

$$(\partial^2 + m^2) \langle \Omega | \hat{\varphi}(x) | \Omega \rangle = 0,$$

como era de esperarse.

Podemos notar que nuestro anterior procedimiento en esencia se reduce a la observación de que la integral funcional de una derivada funcional total es cero, y por tanto

$$\begin{aligned}
 0 &= \int \mathcal{D}\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left(e^{iS[\varphi]} \right) \\
 &= \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} i \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \\
 &= i \left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

el posible término de superficie en $\mathbb{T} \int_x^{\infty} \mathcal{D}\varphi_x$ se anula porque $e^{iS[\varphi]} \xrightarrow{\varphi \rightarrow \pm\infty} 0$ (evidente en versión euclidiana e^{-S_E})

Usando esta misma idea, podemos rápidamente deducir que

$$\begin{aligned}
 0 &= \int \mathcal{D}\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left\{ e^{iS[\varphi]} \varphi(x') \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \left[i \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \varphi(x') + \delta^{(4)}(x-x') \right],
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{1}{\langle 1 \rangle} \left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \varphi(x') \right\rangle = i \delta^{(4)}(x-x').$$

En el ejemplo de Klein-Gordon, esto dice que

$$\frac{1}{\langle 1 \rangle} \left\langle -(\partial_x^2 + m^2) \varphi(x) \varphi(x') \right\rangle = i \delta^{(4)}(x-x')$$

$$\underbrace{- (\partial_x^2 + m^2) \langle \varphi(x) \varphi(x') \rangle}_{\text{}}$$

$$(c) \partial_x^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

que en el formalismo canónico corresponde a

$$\underbrace{-(\partial_x^2 + m^2)}_{\Delta_x} \underbrace{\langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \} | \Omega \rangle}_{\Delta^{-1}(x, x')} = i \overset{(4)}{\delta}(x-x') \quad \checkmark$$

↑ proviene de $\Delta_x \theta(t-t')$

Utilizando exactamente el mismo procedimiento en el caso con N inserciones de φ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left\{ e^{iS[\varphi]} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \left\{ i \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \right. \\ &\quad \left. + \overset{(4)}{\delta}(x-x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_N) + \dots + \varphi(x_1) \dots \overset{(4)}{\delta}(x-x_N) \right\} \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$\left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \right\rangle = \sum_{n=1}^N \left\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{n-1}) i \overset{(4)}{\delta}(x-x_n) \varphi(x_{n+1}) \dots \varphi(x_N) \right\rangle.$$

Vemos entonces que, tanto en la integral funcional como en el formalismo canónico, la ecuación de movimiento

es válida dentro de las funciones de correlación, excepto por los 'términos de contacto' que figuran en el lado derecho de la igualdad, es decir, términos con deltas de Dirac localizadas en puntos específicos del espaciotiempo. Desde el punto de vista canónico, las deltas de Dirac aparecen al actuar con Δ_x sobre las funciones escalón $\Theta(x^0 - x_n^0)$ que implementan el orden temporal en el correlador $\langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \} | \Omega \rangle$.

Las ecuaciones que recién dedujimos se conocen como ecuaciones de Schwinger-Dyson. Para una teoría arbitraria, constituyen un conjunto infinito de igualdades no perturbativas que relacionan entre sí las funciones de correlación.

Podemos resumir formalmente estas ecuaciones en términos de la funcional generatriz $Z[J]$, observando que

$$\begin{aligned}
0 &= \int \mathcal{D}\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left\{ e^{iS[\varphi] + \int d^4x J(x)\varphi(x)} \right\} \\
&= \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi] + \int d^4x J\varphi} \left\{ i \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} + J(x) \right\} \\
&= \left\{ i \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) + J(x) \right\} \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi] + \int d^4x J\varphi} .
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z[J] = i J(x) Z[J]} .$$

Desarrollando esta ecuación en potencias de $J(x)$ y empotando los coeficientes, obtenemos de vuelta la serie infinita de ecuaciones de Schwinger-Dyson.

P.ej., para $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$,

tenemos

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} = -(\partial^2 + m^2)\varphi(x) - \frac{\lambda}{3!} \varphi^3(x) ,$$

y la ecuación de Schwinger-Dyson para $Z[J]$ dice que

$$= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{M!} \int d^4 y_1 \dots d^4 y_M J(y_1) \dots J(y_M) \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(y_1) \dots \hat{\varphi}(y_M) \} | \Omega \rangle$$

$$-(\partial_x^2 + m^2) \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J] - \frac{\lambda}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J(x)^3} Z[J] = i J(x) Z[J].$$

Se puede ver fácilmente que a $\mathcal{O}(J^N)$ (es decir, tomando $\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_N)} [\text{" }]_{J=0}$), esto coincide con la ec. de S-D original,

$$-(\partial_x^2 + m^2) \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle$$

$$- \frac{\lambda}{3!} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}^3(x) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^N \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots i \delta^{(4)}(x-x_n) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle.$$

L4: 11/02/19

Podemos reescribir esto integrando $\int d^4 x \Delta^{-1}(x,y)$:

$$i \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(y) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle$$

$$= \frac{\lambda}{3!} \int d^4 x \Delta^{-1}(x,y) \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}^3(x) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle$$

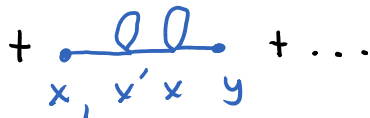
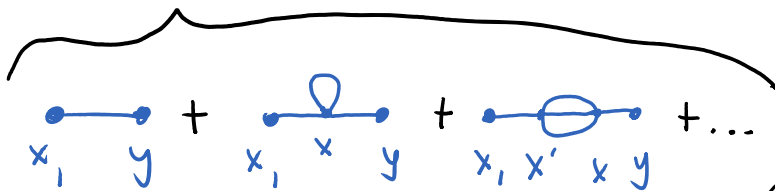
$$+ \sum_{n=1}^N \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots i \Delta^{-1}(x_n,y) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle.$$

Como ejemplo podemos tomar el caso $N=1$,

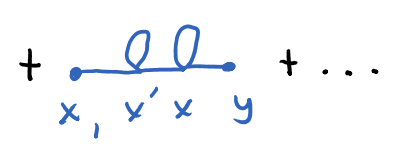
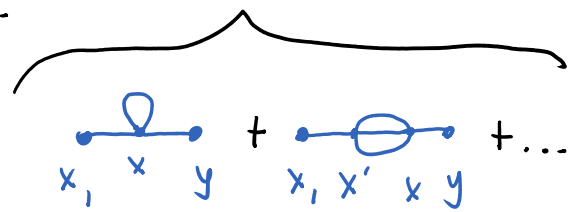
$$\langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(y) \hat{\varphi}(x_1) \} | \Omega \rangle = \Delta^{-1}(x_1, y)$$

$$-i \frac{\lambda}{3!} \int d^4x \Delta^{-1}(x, y) \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}^3(x) \hat{\varphi}(x_1) \} | \Omega \rangle,$$

que diagramáticamente dice que



p.414



Con este ejemplo vemos entonces que las ecuaciones de Schwinger-Dyson son relaciones entre las funciones de correlación que se reducen a identidades 'obvias' cuando las analizamos en términos de diagramas de Feynman, pero tienen la gran virtud de ser enunciados No perturbativos.

Si lográramos resolver este conjunto infinito de ecuaciones diferenciales acopladas, habríamos resuelto la teoría, puesto que conoceríamos todos los correladores de manera exacta. Evidentemente, esto en general NO es fácil, y normalmente se recurre a truncamientos. Ver pej., Bashir et al., arXiv:1201.3366. 12:15/08/17 _____

Regresando a la discusión general, consideremos ahora el caso de una transformación infinitesimal

$$\varphi_\ell(x) \rightarrow \varphi'_\ell(x) = \varphi_\ell(x) + \underbrace{\delta\varphi_\ell(x)}_{\substack{\text{parámetro infinitesimal} \\ (\text{uno a la vez})}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{OJO: variación} \\ \text{funcional / total} \\ (\text{ver p. 164}) \end{array}$$

$$\delta\varphi_\ell(x) = \omega \underbrace{\Phi_\ell(x)}_{\substack{\text{forma de} \\ \text{variación}}}$$

que es una simetría de nuestro sistema, es decir,

$$S[\varphi'] = S[\varphi].$$

La transformación

$$\varphi_\ell(x) \rightarrow \varphi'_\ell(x) = \varphi_\ell(x) + \underbrace{\omega(x) \Phi_\ell(x)}_{\delta\varphi_\ell(x)} \quad (\star)$$

induce entonces

$$S[\varphi] \rightarrow S[\varphi'] = S[\varphi] + \int d^4x \underbrace{J^\mu(x)} \partial_\mu \omega(x).$$

δS debe tener esta forma, porque $\delta S = 0$ cuando $\partial_\mu \omega = 0$.

$J^\mu(x)$ es la corriente de Noether asociada a la simetría en cuestión: si ahora usamos las ecuaciones de movimiento,

entonces $\delta S = 0$ bajo una variación arbitraria, así que

integrando por partes tenemos la ley de conservación

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Este es un atajo para demostrar el teorema de Noether

Para extraer las consecuencias de la simetría a

nivel cuántico, consideremos (\star) como un cambio de variables en la integral funcional con N inserciones:

$$\begin{aligned} \int D\varphi e^{iS[\varphi]} \varphi_{l_1}(x_1) \dots \varphi_{l_N}(x_N) &\stackrel{\text{renombrar}}{=} \int D\varphi' e^{iS[\varphi']} \varphi'_{l_1}(x_1) \dots \varphi'_{l_N}(x_N) \\ &= \int D\varphi e^{iS[\varphi]} \left\{ \varphi_{l_1}(x_1) \dots \varphi_{l_N}(x_N) + i \int d^4x \partial_\mu \omega(x) J^\mu(x) \varphi_{l_1}(x_1) \dots \varphi_{l_N}(x_N) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \varphi_{l_1}(x_1) \dots \underbrace{\omega(x_n) \Phi_{l_n}(x_n)}_{\int d^4x \omega(x) \Phi_{l_n}(x) \delta^{(4)}(x-x_n)} \dots \varphi_{l_N}(x_N) \right\} \end{aligned}$$

cambio de variables

Dado que $\omega(x)$ es arbitraria, esto implica que

$$\langle \partial_\mu J^\mu(x) \varphi_{l_1}(x_1) \cdots \varphi_{l_N}(x_N) \rangle = -i \sum_{n=1}^N \langle \varphi_{l_1}(x_1) \cdots \Phi_{l_n}(x_n) \delta^{(4)}(x-x_n) \cdots \varphi_{l_N}(x_N) \rangle$$

relaciones conocidas como identidades de Ward (-Takahashi).

Como hemos visto, estas ecuaciones son simplemente las ecuaciones de Schwinger-Dyson que expresan la conservación de la corriente de Noether $J^\mu(x)$.

Apliquemos este razonamiento en el caso de QED, llevando a cabo la transformación

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) \equiv e^{i\int \theta(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) \equiv e^{-i\int \theta(x)} \bar{\psi}(x) \end{aligned} \right\} \text{ con } \theta(x) \text{ infinitesimal.}$$

Esta transformación sería una simetría de la teoría si θ fuera constante (o si transformamos también el campo de norma, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x)$), pero no siendo así, tenemos

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \rightarrow i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \underbrace{\mp\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{\equiv J^\mu(x)}\partial_\mu\theta(x)$$

corriente eléctrica
esperada ✓

y por lo tanto $\mathcal{L}_{\text{QED}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{QED}} - J^\mu(x) \partial_\mu \theta(x)$.

Interpretando esto como un cambio de variables en la integral de trayectoria con inserciones $\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)$, vemos entonces que

$$\begin{aligned}
 & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu e^{iS_{\text{QED}}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \\
 & \quad \text{renombrar} \\
 & \quad \downarrow \\
 & = \int \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}A_\mu e^{iS_{\text{QED}}[\psi', \bar{\psi}', A_\mu]} \psi'(x_1) \bar{\psi}'(x_2) \\
 & \quad \text{cambio de variables} \\
 & \quad \downarrow \\
 & = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu e^{iS_{\text{QED}}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]} \left\{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \right. \\
 & \quad \left. + i \int d^4x \left[-J^\mu(x) \partial_\mu \theta(x) \right] \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) + i \int d^4x \theta(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \right\} \\
 & \quad \left. + \theta(x) \partial_\mu J^\mu(x) \right\} \\
 & \quad \left. + i \int d^4x \theta(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \right\} \\
 & \quad \left. - \left[\delta^{(4)}(x-x_1) - \delta^{(4)}(x-x_2) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

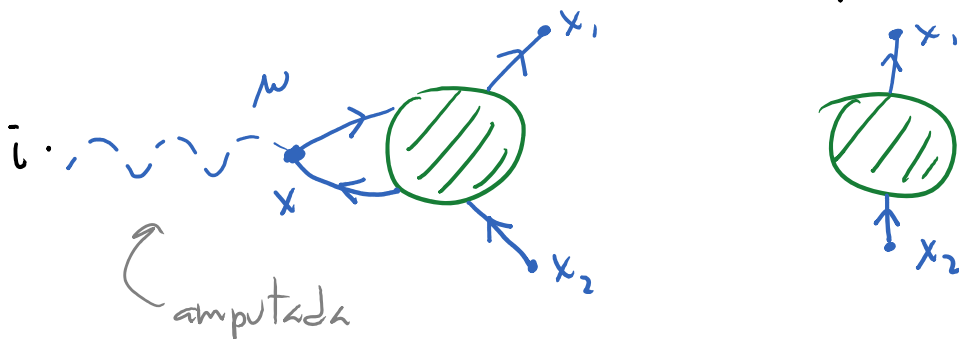
Como $\theta(x)$ es arbitrario, esto implica que

$$\begin{aligned}
 \langle \partial_\mu J^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle &= -\int d^4x \delta^{(4)}(x-x_1) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \\
 &+ \int d^4x \delta^{(4)}(x-x_2) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle,
 \end{aligned}$$

o, en lenguaje canónico (dividiendo entre $\langle 1 \rangle = Z[0]$),

$$\partial_\omega \langle \Omega | T \{ \hat{J}^\omega(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle = \mathcal{F} [-\delta^{(4)}(x-x_1) + \delta^{(4)}(x-x_2)]$$

$$\underbrace{\mathcal{F} \hat{\psi}(x) \delta^\omega \hat{\psi}(x)}_{\text{cf. } -i \hat{\psi} \delta^\omega \hat{\psi} \hat{A}_\omega \Rightarrow \text{wavy line} = -i \mathcal{F} \delta^\omega} \cdot \langle \Omega | T \{ \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle$$



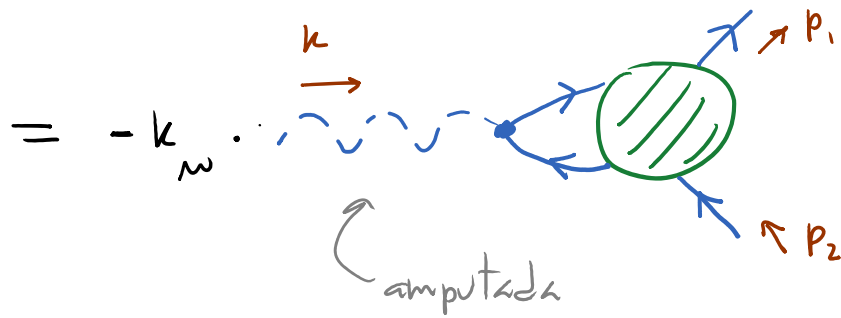
Tomando la transformada de Fourier

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} \int d^4x_1 e^{ip_1 \cdot x_1} \int d^4x_2 e^{-ip_2 \cdot x_2}$$

obtenemos una relación entre funciones de correlación en espacio de momentos. Demostrando

$$\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{-ik \cdot x + ip_1 \cdot x_1 - ip_2 \cdot x_2} \partial_\omega \langle \Omega | T \{ \hat{J}^\omega(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle$$

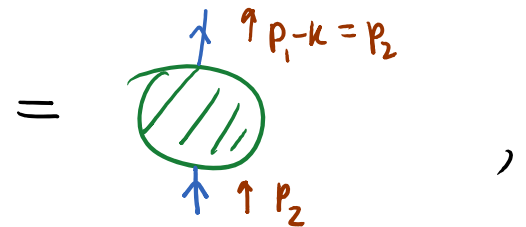
$$\equiv -k_\omega (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - k) i \mathcal{M}^\omega(p_1, p_2)$$



y

$$\int d^4x_1 d^4x_2 e^{-ik \cdot x + ip_1 \cdot x_1 - ip_2 \cdot x_2} \delta^{(4)}(x-x_1) \langle \Omega | T \{ \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle$$

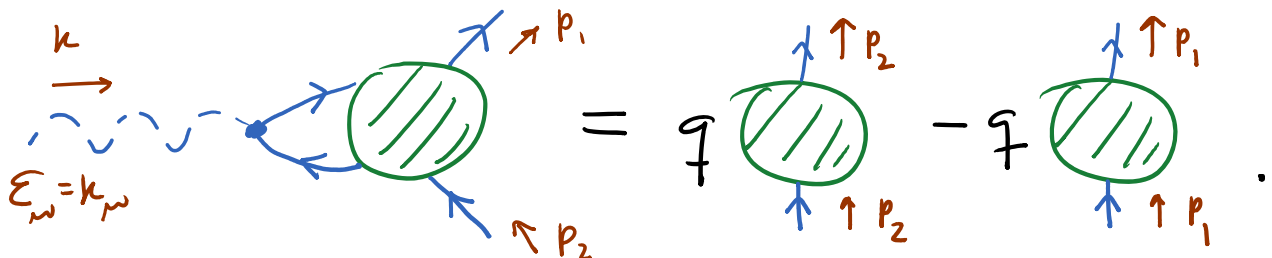
$$= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i(k-p_1) \cdot x_1 - ip_2 \cdot x_2} G_2(x_1, x_2) \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - k) \tilde{G}_2(p_2)$$



tenemos (satisfaciendo $p_1 = p_2 + k$)

$$-k_\mu iM^\mu(p_1, p_2) = -g \tilde{G}_2(p_2) + g \tilde{G}_2(p_1)$$

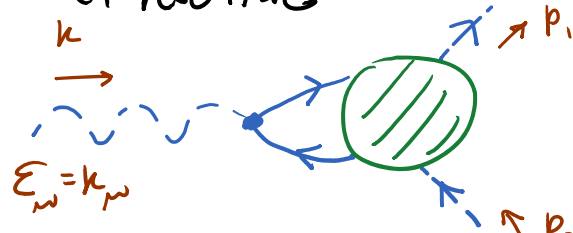
o, diagramáticamente,



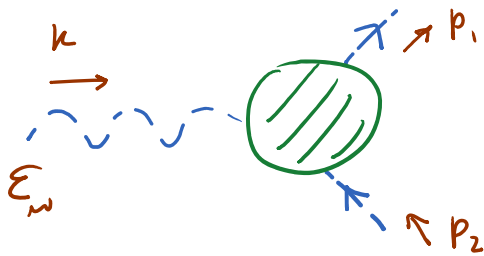
Esta es la relación que demostró Takahashi y se conoce por tanto como identidad de Ward-Takahashi.

(se puede generalizar al caso con $2N$ fermiones y n fotones extra, partiendo de $\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}A e^{iS_{\text{QED}}} \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \dots \Psi(x_{2N-1}) \bar{\Psi}(x_{2N}) A(y_1) \dots A(y_n)$.)

En el lab izq., el propagador (libre) del fotón ha sido ya amputado, así que podemos obtener el elemento de matriz invariante iM (\leftrightarrow amplitud de dispersión) si amputamos también los propagadores fermiónicos ($\tilde{G}_2(p_1)$ y $\tilde{G}_2(p_2)$) y después vamos a la capa de masa. Pero en este caso, los diagramas del lab derecho no contribuyen, porque ninguno tiene un polo en $p_1^2 = m^2$ y otro en $p_2^2 = m^2$. Tenemos entonces el resultado

$$iM(k, p_2 \rightarrow p_1) = \text{diagrama} = 0,$$


es decir, la amplitud de dispersión



se anula si el fotón está polarizado longitudinalmente, $\epsilon_\mu = k_\mu$.

Esta es la identidad de Ward original, que había aparecido ya en pp. 498-99, presentada como consecuencia de invariancia de norma (que en efecto implica la conservación de $J^\mu(x)$).

9. Correcciones Radiativas y Renormalización

Al cuantizar una teoría libre, como Klein-Gordon,

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2,$$

tenemos una interpretación muy sencilla y directa de las excitaciones en términos de partículas, que nos permite en particular identificar el parámetro m^2 que aparece en \mathcal{L}_{KG} como la masa física de las partículas (\Leftrightarrow ubicación del polo en $\tilde{G}_2^{(0)}(p) = \tilde{K}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}$).

Pero sabemos que al agregar interacciones, p.ej. $-\frac{\lambda}{4!} \varphi^4$, la situación se complica: la noción de partícula cambia (ahora las partículas físicas se identifican en los estados asintóticos, y a través de la fórmula de reducción LSZ corresponden a polos en los correladores - ver pp. 427-448). En cuanto incorporamos diagramas con lazos (\equiv "correcciones radiativas"), m^2 No tiene ya por qué coincidir con la masa física de las partículas, medible experimentalmente.

Es decir, para determinar la masa física en el caso libre fue necesario hacer una uenta, que hace falta repetir entonces al agregar interacciones. Lo mismo es cierto para los otros parámetros en el Lagrangiano.

P.ej., $-i\lambda = iM(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4)$ solo al orden más bajo en la expansión perturbativa. Conviene entonces adaptar notación que enfatiza nuestra ignorancia inicial, reescribiendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi_0^4$$

↖
↑
↑
}

campo desnudo
masa desnuda
constante de acoplamiento desnuda
variable y parámetros abstractos, que definen la teoría

A partir de esto, obtenemos los reglas de Feynman habituales. P.ej., en espacio de momentos,

$$\text{---} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \quad \times = -i\lambda_0$$

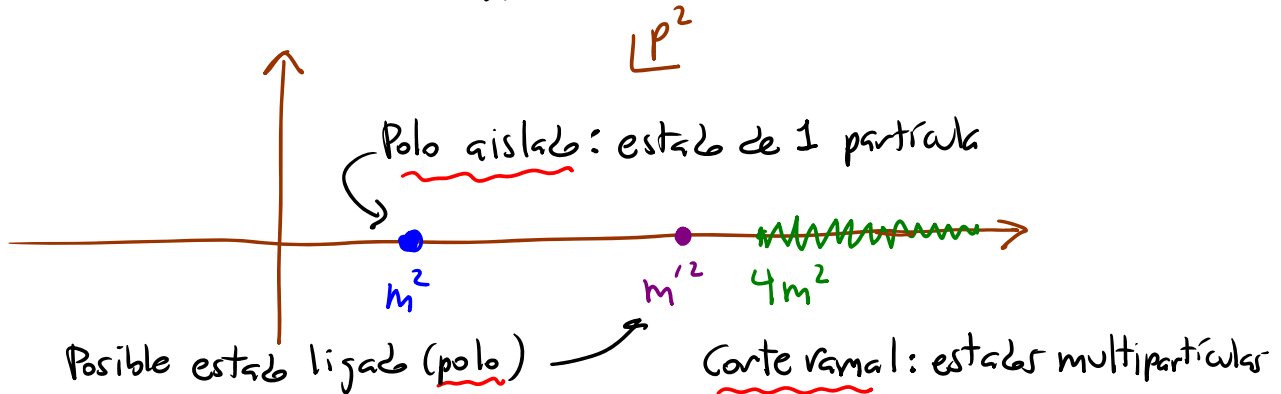
Recordemos ahora (de la p. 432 del curso anterior) el resultado no perturbativo de Källén-Lehmann para la función de 2 puntos,

función de correlación desnuda

$$\tilde{G}_2(p^2) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_0(x) \hat{\varphi}_0(0) \} | \Omega \rangle$$

$$= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \underbrace{\int_{\sim 4m^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}}_{\equiv \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \delta(M^2 - m_{\epsilon}^2) |\langle \epsilon_0 | \hat{\varphi}_0(0) | \Omega \rangle|^2}$$

densidad espectral: probabilidad de que $\hat{\varphi}_0(0)$ cree estados con "masa" M^2



Aquí m^2 es la masa física, o "renormalizada", de la partícula, y

$$Z \equiv |\langle \vec{p} | \hat{\varphi}_0(0) | \Omega \rangle|^2 = |\langle 0 | \hat{\varphi}_0(0) | \Omega \rangle|^2 < 1$$

es la constante de renormalización del campo. "de la función de onda"

Recordemos también (p.435) que el polo en la masa física m^2 se puede entender como resultado de la suma sobre un número infinito de diagramas en la expansión perturbativa:

$$\tilde{G}_2(p^2) = \text{diagrama con un círculo hachurado}$$

$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \text{diagrama con bucle} + \text{diagrama con bucle} + \text{diagrama con bucle} + \text{otros diagramas con polo doble en } p^2 = m_0^2$$

$$\equiv \text{diagrama con un círculo etiquetado como } \Gamma_1(p)$$

suma sobre diagramas "irreducibles por 1 partícula" (amputados)

$$\equiv -i \Delta m^2(p^2) \sim \mathcal{O}(\lambda)$$

(en muchos libros $\Gamma_1(p)$ incluye a amputado)

$$+ \text{diagrama con 2 bucles} + \text{diagrama con bucle y bucle} + \text{diagrama con bucle y bucle} + \text{otros diagramas con polo triple en } p^2 = m_0^2$$

+ ...

$$= \text{diagrama con } \Gamma_1(p) \text{ en serie} + \dots$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_2(p^2) &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[(-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right] \\
&\quad + \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[(-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right]^2 + \dots \\
&= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[\frac{1}{1 - (-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}} \right] \\
&= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) + i\epsilon} \quad (\text{p. 436}) .
\end{aligned}$$

Comparando esto con el resultado exacto

$$\tilde{G}_2(p^2) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

dedujimos que

$$\begin{aligned}
& m^2 = m_0^2 + \Delta m^2(m^2) \\
& \text{y } Z = \frac{1}{1 - \Delta m^2'(m^2)} \quad \left(\text{donde } \Delta m^2' \equiv \frac{d}{dp^2} \Delta m^2 \right)
\end{aligned}$$

$\Delta m^2(p^2)$ comúnmente se denota $\Pi(p)$ ó $\Sigma(p)$,
y se conoce como la autoenergía de la partícula
(sin espín) asociada al campo $\varphi(x)$.

Claramente, el hecho de que, en general,

$$m^2 \neq m_0^2, \quad Z \neq 1,$$

y de manera similar

$$\lambda \neq \lambda_0 \quad (\text{donde aún nos falta definir$$

acoplamiento \rightarrow
entre partículas

acoplamiento \rightarrow
del campo desnudo)

con precisión el lado izquierdo)

es resultado inevitable de la existencia de interacciones.

Estas provocan entonces que se pierda la conexión directa entre los parámetros del Lagrangiano y los correspondientes parámetros físicos medibles m^2 y λ .

13: 17/08/17

Naturalmente, nos interesará siempre expresar nuestras predicciones para cantidades físicas en términos de estos parámetros físicos y No de los parámetros desnudos m_0^2 y λ_0 . A este cambio de parámetros se le conoce como renormalización.

Pero, ¿por qué se asocia entonces el concepto de "renormalización" con la cancelación de infinitos?

Si la teoría de campos en cuestión ha de tener sentido (por lo menos a nivel de la expansión perturbativa),

sus predicciones deben ser sensatas, y en particular, ifinitas! Pero los diagramas con lazos frecuentemente divergen por contribución de las partículas virtuales con momentos arbitrariamente grandes (las cuales exploran interacciones a distancias arbitrariamente pequeñas).

P.ej., la autoenergía a un lazo en la teoría φ^4 :

$$\begin{aligned}
 -i \Delta m^2(p^2) &= \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---}}_{\substack{\text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---}}} + \dots \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} (-i \lambda_0)}_{\text{factor de simetría}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \dots \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\sigma(\Lambda^2) \rightarrow \infty} \quad \left(\Lambda \leftarrow \text{parámetro de corte } (\Lambda \rightarrow \infty) \right)
 \end{aligned}$$

Notamos/recordamos aquí, por cierto, que estas divergencias ultravioleta (UV) se originan del hecho de que el campo $\varphi(x)$ es un sistema con un número infinito de grados de libertad (número infinito de modos de Fourier $\tilde{\varphi}_{\vec{k}} \leftrightarrow$ número infinito de $\varphi_{\vec{x}}$).

Para que la teoría tenga sentido, lo que tiene que pasar entonces es que la renormalización cancela estas divergencias ($f_0(\lambda_0, m_0)$ vs. $f(\lambda, m)$). P.ej., debemos tener (p.642)

$$\begin{array}{c}
 \text{divergente} \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{ finita} \\
 m^2 = m_0^2 + \Delta m^2(m^2) \\
 \uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\
 \mathcal{O}(\Lambda^0) \quad \mathcal{O}(\Lambda^2) \quad \mathcal{O}(\Lambda^2)
 \end{array}$$

En otras palabras, la masa desnuda tomará el valor que tenga que tomar (incluso si es divergente) para que la masa física coincida con el número finito que podemos medir experimentalmente. Ajustamos m_0^2 como parte de la definición de L .

Es aquí donde aparece la conexión entre renormalización y divergencias UV, y por tanto, la utilidad evidente de la primera. Vale la pena enfatizar, sin embargo, que de entrada la necesidad de renormalizar No está intrínsecamente relacionada con la existencia de infinitos, y estaría igualmente presente incluso si la teoría fuera finita desde un principio (como es

el caso para ciertas teorías supersimétricas).

La renormalización se refiere simplemente al paso indispensable de expresar nuestros resultados en términos de cantidades medibles en lugar de los parámetros abstractos que figuran en el lagrangiano.

Para llevar a cabo este cambio de enfoque de manera eficiente, conviene reordenar desde un principio la expansión perturbativa, expresando las reglas de Feynman directamente en términos de m^2, λ, φ .

Para ello, definiremos primero el campo renormalizado

$$\varphi(x) \equiv \frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{Z}}, \quad Z \equiv |\langle \vec{p} | \hat{\varphi}_0(0) | \Omega \rangle|^2$$

de tal manera que $|\langle \vec{p} | \hat{\varphi}(0) | \Omega \rangle|^2 = 1$ y

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(p^2) &\equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(0) \} | \Omega \rangle && \text{correlador} \\ & && \text{renormalizado} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_0(x) \hat{\varphi}_0(0) \} | \Omega \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \tilde{G}_2(p^2)_0, \end{aligned}$$

con lo cual $\tilde{G}_2(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$

Y más en general, $\tilde{G}_N = \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^N \tilde{G}_N$,

con lo cual la fórmula de LSZ (p. 444) toma la forma

$$\langle p'_1 \dots p'_N, j^- | p_1 \dots p_N, j^+ \rangle = \lim_{\substack{p'_1 \rightarrow m^2 \\ \dots \\ p'_N \rightarrow m^2}} \frac{p_1'^2 - m^2}{i} \dots \frac{p_N'^2 - m^2}{i} \tilde{G}_{N+N'}(p'_1 \dots p'_N, j^-, p_1 \dots p_N, j^+)$$

Recordando que físicamente z es la probabilidad de que el operador de campo desnudo $\hat{\varphi}_0(x)$ cree un estado de 1 partícula, sabemos que, en la teoría exacta, necesariamente $0 \leq z \leq 1$ (con $z=1$ en el caso libre, pero $z < 1$ en presencia de interacciones). Desde esta perspectiva, reescalar

$\varphi_0 \rightarrow \varphi \equiv \frac{\varphi_0}{\sqrt{z}}$ no parece un paso muy creativo o importante.

Pero en términos de la expansión perturbativa,

tendremos $z = 1 + \delta z$, con δz de $\mathcal{O}(\lambda_0)$

¡pero infinito! La razón por la cual esto no

contradice el hecho de que $0 \leq Z \leq 1$ es que todas las correcciones perturbativas subsecuentes son igualmente divergentes, y la serie completa está tratando de representar a una cantidad finita

$$Z = \frac{1}{1 - \Delta m^2 / m^2} \quad (\text{que puede ser, p.ej. cero}).$$

No hay entonces ningún problema de principio, pero como en la práctica solo trabajamos dentro del esquema perturbativo hasta un cierto orden, el hecho de que φ_0 difiera de φ por un factor (aparentemente) infinito sí se vuelve importante.

Es por esta razón que (aunque el operador de campo mismo no es una cantidad medible) preferimos trabajar con el campo renormalizado φ en lugar del campo desnudo φ_0 . La distinción importante entre ambas es que la condición $|\langle \vec{p} | \hat{\varphi}(x) | \Omega \rangle|^2 = 1$

garantiza que en cualquier paso intermedio $\hat{\varphi}(x)$ es el operador que crea 1 partícula con "probabilidad" finita ($< \infty$ y > 0).

En términos del campo renormalizado $\varphi \equiv \frac{\varphi_0}{\sqrt{Z}}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_0 \partial^\mu \varphi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \varphi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 \varphi_0^4 \\ &= \frac{1}{2} Z \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m_0^2 Z \varphi^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 Z^2 \varphi^4, \end{aligned}$$

que nos conviene reescribir como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4$$

misma forma que \mathcal{L} completo, pero usando campo y parámetros renormalizados $\equiv \mathcal{L}_{\text{ren}}$

$$+ \frac{1}{2} (\underbrace{Z-1}_{\equiv \delta Z}) (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\underbrace{Z m_0^2 - m^2}_{\equiv \delta m^2}) \varphi^2 - \frac{1}{4!} (\underbrace{Z^2 \lambda_0 - \lambda}_{\equiv \delta \lambda}) \varphi^4$$

↑ no confundir con $\Delta m^2(p^2) \equiv \text{IP1}$


controtérminos $\equiv \mathcal{L}_{\text{ct}}$

OJO: $\delta Z, \delta m^2, \delta \lambda$ NO son infinitesimales!

A partir de \mathcal{L} escrito en esta nueva forma, y

considerando a todos los contraterminos (incluidos los cuadráticos) como interacciones, podemos fácilmente leer las nuevas reglas de Feynman. Primero en espacio de posición:

• de $\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2$

 = $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-x')} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \Delta^{-1}(x, x'; m^2)$,

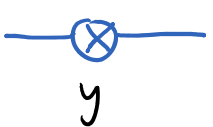
\uparrow masa física \uparrow

• de $-\frac{1}{4!} \lambda \varphi^4$

 = $-i \lambda \int d^4 y$,

\uparrow acoplamiento físico (por definir)

• de $\frac{1}{2} \delta z \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \delta m^2 \varphi^2$

 = $i \int d^4 y (\delta z \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}^\mu - \delta m^2)$

(porque $\underbrace{\hspace{10em}}$ de expansión en Taylor de $e^{iS_{int}}$ p. 560

$\int D\varphi \dots \left(i \int d^4 y \frac{\delta z}{2} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y^\mu} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_\mu} \right) \dots \exp \left[i \int d^4 x \left\{ \frac{1}{2} \varphi \Delta_x \varphi \right\} + \int d^4 x J \varphi \right]$


$\swarrow -\partial^2 - m^2$

$= \dots i \frac{\delta z}{2} \int d^4 y \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left(\frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \frac{\partial}{\partial y_\mu} \left(\frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \dots \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 x' J(x) \Delta^{-1}(x, x') J(x') \right]$

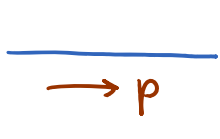
\swarrow pp. 552, 560


$= \dots i \frac{\delta z}{2} \int d^4 y \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Delta^{-1}(\cdot, y) \frac{\partial}{\partial y_\mu} \Delta^{-1}(y, \cdot) \dots$,

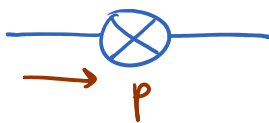
• de $-\frac{1}{4!} \delta \lambda \varphi^4$


 = $-i \delta \lambda \int d^4 y$.

En espacio de momentos, esto equivale a

 = $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

 = $-i \lambda$

 = $i (\delta Z p^2 - \delta m^2)$

 = $-i \delta \lambda$

$\int d^4 x \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$
 $= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \int d^4 x e^{i(p+p') \cdot x} (ip) \cdot (ip') \tilde{\varphi}_p \tilde{\varphi}_{p'}$

conservando el momento en cada vértice, e integrando $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$ sobre momentos indeterminados

Es importante tener claro a qué orden en la expansión perturbativa en potencias de la constante de acoplamiento física λ contribuye cada contra término. De la p. 642 sabemos que

$$m^2 = m_0^2 + \underbrace{\Delta m^2(m^2)}$$

$$\text{---} \textcircled{\text{IP1}} \text{---} = \text{---} \textcircled{\text{0}} \text{---} + \dots = \mathcal{O}(\lambda_0) ,$$

$$Z = \frac{1}{1 - \Delta m^2(m^2)} = 1 + \mathcal{O}(\lambda_0) ,$$

y queremos escoger una definición de λ tal que

$$\lambda = \lambda_0 + \mathcal{O}(\lambda_0^2) \leftrightarrow \lambda_0 = \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) .$$

L6: 18/02/19

Tenemos entonces

$$\delta Z \equiv Z - 1 = \mathcal{O}(\lambda) ,$$

$$\begin{aligned} \delta m^2 &\equiv Z m_0^2 - m^2 = (1 + \mathcal{O}(\lambda))(m^2 + \mathcal{O}(\lambda)) - m^2 \\ &= \mathcal{O}(\lambda) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \lambda &\equiv Z^2 \lambda_0 - \lambda = (1 + \mathcal{O}(\lambda))(\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)) - \lambda \\ &= \mathcal{O}(\lambda^2) , \end{aligned}$$

de modo que

$$\text{---} \textcircled{\otimes} \text{---} = i(\delta Z p^2 - \delta m^2) \sim \mathcal{O}(\lambda) ,$$

$$\text{---} \textcircled{\otimes} \text{---} = -i \delta \lambda \sim \mathcal{O}(\lambda^2) .$$

Esto muestra (de manera consistente con el propio argumento) que al hacer cálculos al orden más bajo en la expansión perturbativa es válido ignorar los contratérminos — es decir, tenemos $m^2 = m_0^2$, $\lambda = \lambda_0$, como usamos antes. A partir del orden que sigue, las reglas de Feynman que habíamos dado antes en términos de los parámetros desnudos m_0^2 , λ_0 siguen siendo válidas, pero lo que deja de ser cierto es que estos coincidan con los parámetros físicos o "renormalizados" m^2, λ .

Historicamente, en muchas de las discusiones originales sobre renormalización se consideraba a los contratérminos \mathcal{L}_{ct} como términos que se añaden a mano al lagrangiano original \mathcal{L} , elegidos a mano para cancelar los infinitos. Pero en la perspectiva moderna, en realidad No hemos agregado nada, simplemente hemos separado cada término de \mathcal{L} en 2 partes,

una de las cuales se refiere más directamente a cantidades físicamente medibles:

$$L = L_{ren} + L_{ct} .$$

Las nuevas reglas de Feynman que hemos obtenido con este procedimiento dan lugar a lo que se conoce como la expansión perturbativa renormalizada. De ahora en adelante utilizaremos este método, que resulta más práctico, aún cuando sería igualmente posible utilizar la expansión perturbativa original, en términos de los parámetros desnudos (y sin contatérminos explícitos), y solo renormalizar —es decir, cambiar a los parámetros físicos— al final, una vez que se tengan los resultados. Pero claramente podremos dormir más tranquilos si nuestra serie de Taylor es en potencias de λ , que es finita, ¡y no de λ_0 , que es divergente!

Para que la separación $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{ct}$ sea precisa, debemos dar una definición explícita de los parámetros renormalizados m^2 , λ y el factor de escala de φ (lo cual a su vez definirá δm^2 , $\delta \lambda$ y δZ).

Como habíamos dicho ya, si queremos que m sea la masa física de la partícula, debemos identificar a m^2 como la ubicación del polo en la función de 2 puntos. La normalización de φ quedó también especificada de manera natural al pedir que

$$\tilde{G}_2(p) = \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \text{términos no singulares en } p^2 = m^2 \quad (1)$$

Después de esto, solo nos falta elegir una definición de λ .

Dado que sabemos que la amplitud de dispersión $2 \rightarrow 2$

$$iM(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) = \text{diagram with a green cross-hatched circle and four external lines labeled } p_1, p_2, p_3, p_4$$

en términos de la expansión perturbativa desnuda da (p.455)

$$\underbrace{\text{cross}}_{-i\lambda_0 = -i\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)} + \underbrace{\text{loop diagrams}}_{\mathcal{O}(\lambda^2) \sim \mathcal{O}(\lambda^2)} + \dots$$

es decir,

$$iM(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) = -i\lambda + \lambda^2 f(\lambda, p_1, p_2, p_3, p_4),$$

resulta natural también definir λ pidiendo que

$$iM(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) = -i\lambda \quad (\text{i.e., } f(\lambda, p_1, \dots, p_4) = 0)$$

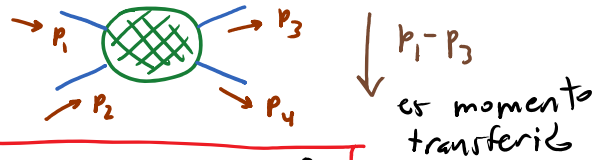
para una elección conveniente de p_1, \dots, p_4 ,

como, p.ej.,

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}_3 = \vec{p}_4 = 0$$

o, en lenguaje covariante bajo Lorentz,

$$iM(s=4m^2, t=0) = -i\lambda, \quad (2)$$



donde $s \equiv (p_1 + p_2)^2$, $t \equiv (p_1 - p_3)^2$, $u \equiv (p_1 - p_4)^2$

son las variables de Mandelstam que ya conocíamos del curso anterior (Tarea 5), y satisfacen $s + t + u = 4m^2$. si $p_n^2 = m^2$

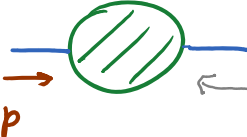
Con esta definición, λ representa la intensidad de la interacción $Z \rightarrow Z$ a bajas energías ($s \rightarrow 4m^2$) y a separaciones grandes en el espaciotiempo ($t \rightarrow 0$).

Las definiciones (1) y (2) son nuestro primer ejemplo de lo que se conoce como condiciones de renormalización, que son convenciones para la traducción a variables físicas.

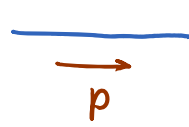
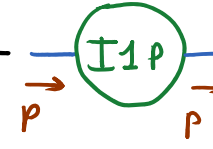
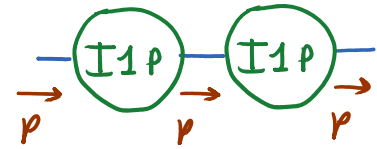
Estas condiciones claramente No son únicas.

P.ej., podríamos haber elegido definir λ a otra escala de momento. La manera en que esto cambiaría a λ y a los otros parámetros se codifica en el llamado "grupo de renormalización", al cual regresaremos en capítulos más adelante.

Notemos que con estas nuevas reglas de Feynman sigue siendo cierto que

$\tilde{G}_2(p) =$


ahora incluyen diagramas con vértices de contra términos

$=$

 $+$

 $+$

 $+ \dots$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{-i\Delta m^2(p^2)}$


$= \frac{i}{p^2 - m^2 - \Delta m^2(p^2) + i\epsilon}$

así que nuestra condición de renormalización (1) equivale a

$$\Delta m^2(m^2) = 0, \quad \Delta m^2'(m^2) = 0 \quad (1')$$

Veamos ahora cómo se implementan estas condiciones, a orden de un lazo en la expansión perturbativa.

Tenemos

$$-i\Delta m^2(p^2) \equiv$$


$$\begin{aligned}
 -i \Delta m^2(p^2) &= \text{---} \overset{\vec{k}}{\circ} \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
 &= -i\lambda \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + i(\delta^2 p^2 - \delta m^2) + \dots
 \end{aligned}$$

induce ~~⊗~~

Sabemos que la integral es (cuadráticamente) divergente en el UV, así que para hacerla manejable tenemos primero que modificar la teoría de alguna manera que la vuelva finita. A este paso se le conoce como regularización.

La manera más directa es simplemente reemplazar

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \longrightarrow \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d^4 k,$$

es decir, imponer un corte "de fuerza bruta" o "abrupto" o "duro"

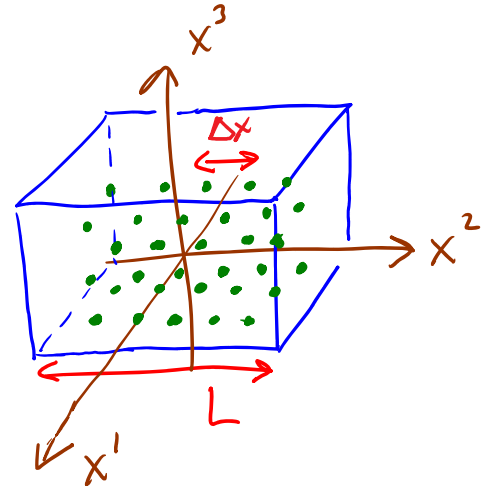
(Inglés: brute-force / sharp / hard cutoff), teniendo en mente que al final del cálculo estaremos interesados en tomar el límite donde el parámetro de corte $\Lambda \rightarrow \infty$, para recuperar

la teoría original.

L4: 22/08/17

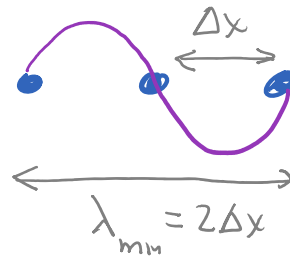
Podemos notar que este tipo de regularización es cercano en espíritu a una segunda posibilidad que resulta quizás más intuitiva: recordando el origen físico de las divergencias UV, es natural eliminarlas definiendo la teoría sobre un espaciotiempo discretizado \equiv **retícula**

(Como hicimos p.ej. para formular la integral de trayectoria). En esta regularización por retícula, el parámetro



de corte es la distancia Δx ($\rightarrow 0$) entre puntos vecinos de la retícula, que en espacio de momentos se traduce en particular en un corte

$$\Lambda = |p_x^{\max}| = \frac{\pi}{\Delta x}$$



En otras palabras, el hecho de que la función

$$\tilde{\varphi}(p) \equiv \sum_n \varphi(x_n) e^{ip \cdot x_n}$$

\uparrow $n \Delta x$

es periódica con periodo $\frac{2\pi}{\Delta x}$ implica que la transformada de Fourier inversa está cuantizada,

$$\varphi(x) = \left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)^4 \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} d^4 p \tilde{\varphi}(p) e^{-ip \cdot x}$$

mas es familiar esta conexión dicha al revés: si x es periódica, \mathbb{R} p es discreta. $p_n = \frac{n}{R}$

En este sentido, entonces, imponer un corte de fuerza bruta en los momentos es similar a regularizar por retícula. Pero en el segundo caso hay un efecto adicional: al ser la acción no ya una integral $\int d^4 x$ sino una suma \sum_{x_n} , el propagador en espacio de momentos se modifica, y las expresiones que aparecen en cálculos perturbativos se complican.

Por esta razón, usaremos por ahora un corte de fuerza bruta. (Aunque, por otro lado, la regularización por retícula permite en ciertos teorías, como QCD, calcular la integral funcional numéricamente, para

obtener resultados No perturbativos.)

Existen por supuesto muchas maneras distintas de regularizar; mencionaremos al menos otras 2 más adelante. Conceptualmente, se puede considerar cada método de regularización como una propuesta diferente para la física a distancias muy pequeñas — pues no tenemos por qué creer ciegamente que el espaciotiempo es un continuo perfecto. Como veremos, bajo condiciones apropiadas, las predicciones experimentales que obtendremos serán independientes de los detalles de esta propuesta.

Volvamos a nuestra integral $\int d^4k \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$,
queremos entonces imponer una restricción del tipo

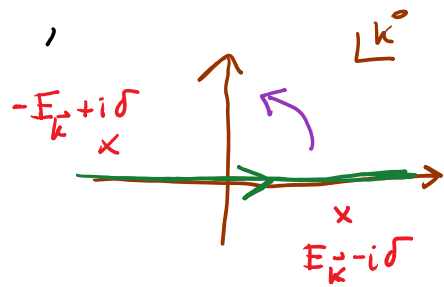
$$0 \leq |k^\mu| \leq \Lambda \quad \forall \mu.$$

Pero notamos que esta condición no es invariante de Lorentz (define un marco preferencial). Parecería mejor entonces acotar la norma de k^μ ,

$0 \leq |k^2| \leq \Lambda^2$; pero el problema es que, por tener simetría lorentziana, una condición de este tipo no restringe el valor de las componentes individuales de k^μ (puesto que $k^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2$).

Podemos notar sin embargo que si nos fijamos primero en la integral sobre k^0 en $\int_{-\infty}^{\infty} dk^0$,

$$I \equiv \int \frac{dk^0 d^3\vec{k}}{\underbrace{(k^0 - E_{\vec{k}} + i\delta)(k^0 + E_{\vec{k}} - i\delta)}_{k^2 - m^2 + i\epsilon}}$$



La ubicación de los polos (debida a $i\epsilon$) nos permite hacer una rotación de Wick, dejando que

$$k^0 = iK^4, \quad \vec{k} = \vec{K} \quad (\Rightarrow k^2 = -K^2),$$

para obtener

$$I = \int \frac{i dK^4 d^3\vec{K}}{-(K^4)^2 - \vec{K}^2 - m^2} \quad (\text{más en general, } \int d^4k f(k^2 + i\epsilon) = i \int d^4K f(-K^2))$$

que sí puede rotarse entonces las direcciones pidiendo simplemente que $K^2 \equiv (K^1)^2 + \dots + (K^4)^2 \leq \Lambda^2$.

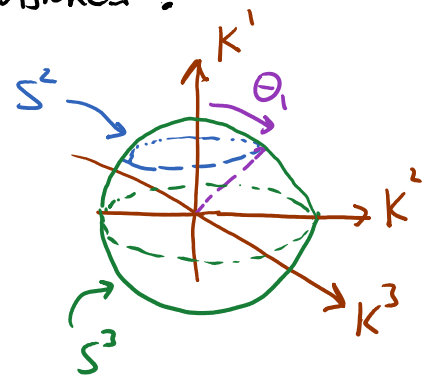
Tenemos entonces

$$\int_{\vec{p}} \frac{1}{-K^2 - m^2} = -i\lambda \frac{1}{2} \int_{K^2 \leq \Lambda^2} \frac{i d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{-K^2 - m^2} = -\frac{i\lambda}{2(2\pi)^4} \int_{K^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 K}{K^2 + m^2}$$

En vista de que el integrando y la región de integración dependen solo de la distancia radial en el espacio de momentos euclideo 4-dimensional, conviene cambiar a coordenadas esféricas en 4 dimensiones:

$$\begin{pmatrix} K^1 \\ K^2 \\ K^3 \\ K^4 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{pmatrix}$$

↑ coord. radial



con $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$, $0 \leq \theta_3 < 2\pi$

↑ ángulos polares ↑ ángulo azimutal

coord. angulares sobre S^3

$$\Rightarrow d^4 K = K^3 dK \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv d\Omega_3} \text{ elemento de volumen sobre } S^3$$

LF: 20/02/19

con lo cual

$$\int_{K^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 K}{K^2 + m^2} = \int d\Omega_3 \int_0^\Lambda \frac{K^3 dK}{K^2 + m^2}$$

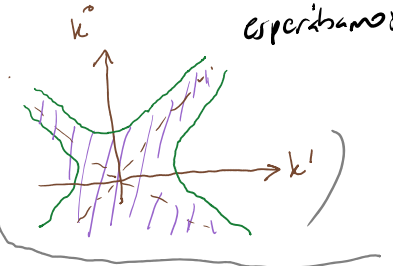
$$\int_0^{2\pi} d\theta_3 \int_0^\pi d\theta_2 \sin\theta_2 \int_0^\pi d\theta_1 \sin^2\theta_1 \left[\frac{K^2}{2} - \frac{m^2}{2} \ln(K^2 + m^2) \right]_0^\Lambda$$

$$= 2\pi^2 \equiv \Omega_3 \quad \frac{\Lambda^2}{2} - \frac{m^2}{2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\Lambda^2)$$

volumen de S^3 unidad

como esperamos

(A posteriori, integral lorentziana en $|k^i| < \Lambda^2$ también es finita:



A un lazo, concluimos entonces que

$$-i\Delta m^2(p^2) = -\frac{i\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \right] + i(\delta Z p^2 - \delta m^2).$$

Imponiendo nuestras condiciones de renormalización (1'),

podemos ahora deducir que, a este orden, $\left\{ \begin{array}{l} \Delta m^2(m^2) = 0 \\ \Delta m^2(m^2) = 0 \end{array} \right.$

$$\delta Z = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

propiedad específicas de teoría φ^4

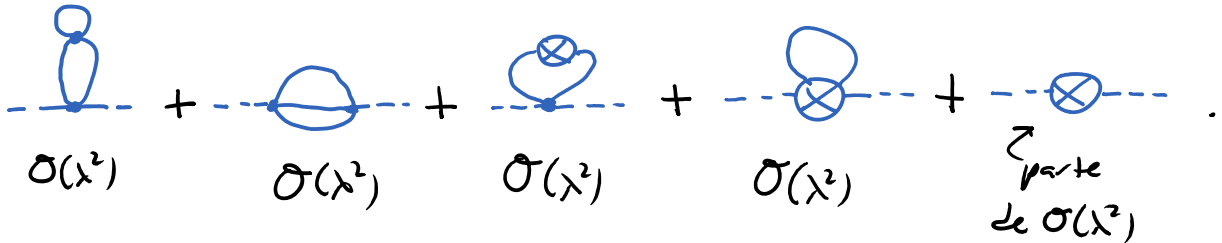
$$\delta m^2 = -\frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

a partir de lo cual obtenemos la autoenergía

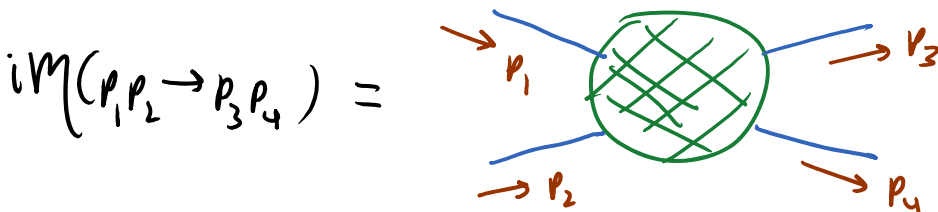
$$-i\Delta m^2(p^2) = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2), \text{ que es } \underline{\text{finita}} \text{ (}\delta m^2 \text{ canceló divergencia).}$$

OJO: "solo porque algo es infinito, no significa que sea cero".

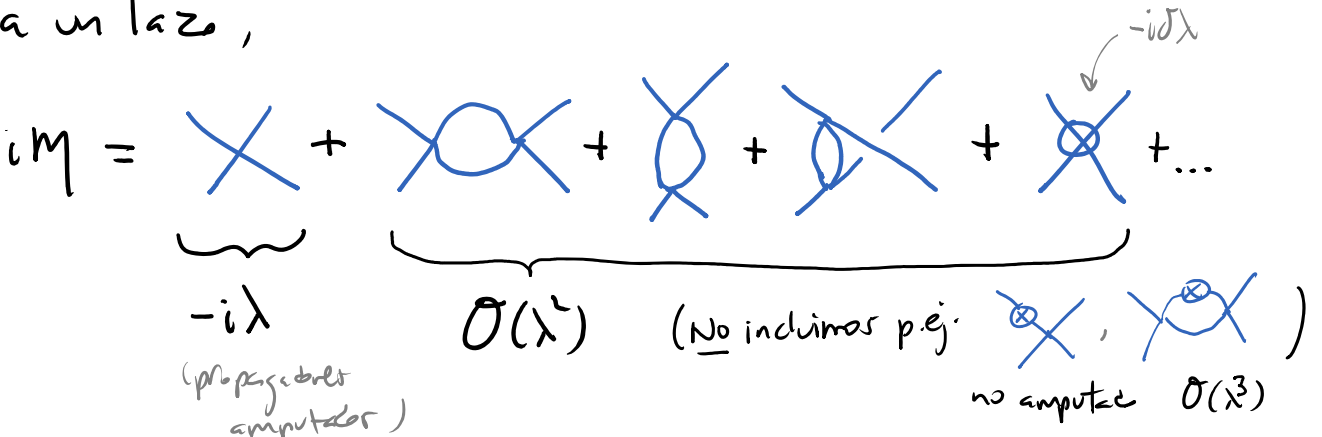
Las primeras contribuciones no nulas a $\Delta m^2(p^2)$ y δZ provienen del cálculo al siguiente orden,



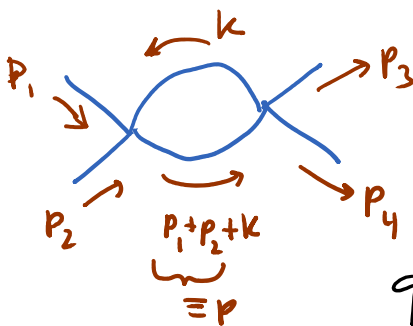
Evidentemente, consideremos ahora la amplitud de dispersión que figura en nuestra otra condición de renormalización,



a un lazo,



Tenemos entonces que hacer varias integrales, empezando por



$$= (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda^4}{\lambda^4}\right),$$

que es logarítmicamente divergente en el UV.

Para procesar esta integral, conviene combinar los 2 factores del denominador en una sola expresión cuadrática, a través de la introducción de un "parámetro de Feynman" x .

$$\text{Usando } \int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)},$$

es fácil ver que

$$\int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)A + xB]^2} = \frac{1}{AB}$$

(y más en general,

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n}$$

[ver p.ej. Peskin p. 190]),

que podemos usar para reescribir (omitendo coeficiente $\frac{\lambda^2}{2}$)

$$I(s) \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \overset{A}{\leftarrow} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \overset{B}{\leftarrow}$$

\uparrow variable de Mandelstam $s \equiv p^2 = (p_1 + p_2)^2 = E_{cm}^2$

en la forma

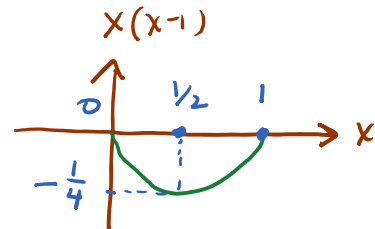
$$(1-x)A + xB = (1-x)[k^2 - m^2 + i\epsilon] + x \underbrace{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]}_{p^2 + 2p \cdot k + k^2}$$

$$I(s) = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\underbrace{[k^2 + 2xk \cdot p + xp^2 - m^2 + i\epsilon]}_{(k+xp)^2 + (x-x^2)p^2}}^2$$

$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \mu^2 + i\epsilon]^2}$$

con $l \equiv k + xp$

$$\mu^2 \equiv m^2 + \underbrace{(x^2 - x)p^2}$$



Llevando a cabo la rotación de Wick $l^0 = iL^4$, $\vec{l} = \vec{L}$,

$$I(s) = \int_0^1 dx \int \frac{i d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{1}{[L^2 + \mu^2]^2}$$

Notar que $\mu^2 > 0 \quad \forall \quad 0 \leq x \leq 1$ si $s \equiv p^2 < 4m^2$, que No es la región física para el proceso de dispersión ($s = E_{cm}^2 \geq 4m^2$); pero sí es la región euclídea, donde llevamos a cabo la integral: $p^2 = -P^2$.
Pasando a coordenadas esféricas e imprimiendo

nuestro corte de fuerza bruta Λ ,

$$I(s) = \int_0^1 dx \ i \frac{\overbrace{(2\pi^2)}^{\Omega_3}}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda \frac{L^3 dL}{(L^2 + \mu^2)^2}$$

nota que $L \leq \Lambda$
 No es exactamente
 lo mismo que
 $K = |L-xP| \leq \Lambda$,
 aunque esperamos
 que para $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\left[\frac{\mu^2}{2(L^2 + \mu^2)} + \frac{1}{2} \ln(L^2 + \mu^2) \right]_0^\Lambda$$

es decir,

$$I(s) = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} + 1 \right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \mu^2} \right]$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $m^2 + (x^2 - x)p^2 \quad \quad \quad \mu^2$

Las integrales involucradas son (omitiedo coeficiente $\pm \frac{i}{16\pi^2}$)

$$I_1(s) \equiv \int_0^1 dx \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + (x^2 - x)p^2} + 1 \right)$$

$$= \left[\frac{(-4m^2 + p^2) \tan^{-1} \left(\frac{p(2x-1)}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right)}{p \sqrt{4m^2 - p^2}} + \frac{\sqrt{4\Lambda^2 + 4m^2 - p^2}}{p} \tan^{-1} \left(\frac{p(2x-1)}{\sqrt{4\Lambda^2 + 4m^2 - p^2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m^2 + (x^2 - x)p^2}{\Lambda^2 + m^2 + (x^2 - x)p^2} \right) + x \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2 + p^2(x^2 - x)} \right) \right]_0^1$$

o lo que es lo mismo,

$$I_1(s) = \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \frac{2}{p} \sqrt{4m^2 - p^2} \tan^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}}\right) \\ + \frac{2}{p} \sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2} \tan^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}}\right),$$

donde vemos en el primer término la divergencia logarítmica (para $\Lambda \rightarrow \infty$) que esperábamos (a partir de $\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{k^4}$),

$$e \\ I_2(s) \equiv \int_0^1 dx \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2 + (x^2 - x)p^2} = \left[\frac{2\Lambda^2 \tan^{-1}\left(\frac{p(2x-1)}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}}\right)}{p \sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}} \right]_0^1 \\ = \frac{4\Lambda^2 \tan^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}}\right)}{p \sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}},$$

que no es divergente ($I_2(s) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{4\Lambda^2 \left(\frac{p}{2\Lambda}\right)}{p 2\Lambda} = 1$).

Juntamos ambos resultados tenemos

$$I(s) = \frac{i}{16\pi^2} \left[I_1(s) - I_2(s) \right]$$

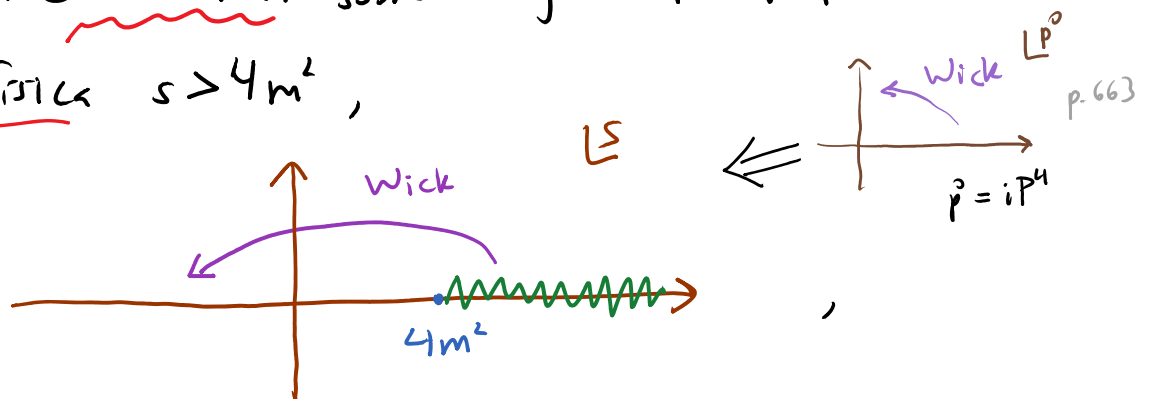
$$I(s) = \frac{i}{16\pi^2} \left[\ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{2}{p} \sqrt{4m^2 - p^2} \tan^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{4\Lambda^2 + 2(4m^2 - p^2)}{p\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}} \tan^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}} \right) \right].$$

Podemos notar aquí que, debido al segundo término en $I(s)$, la amplitud de dispersión

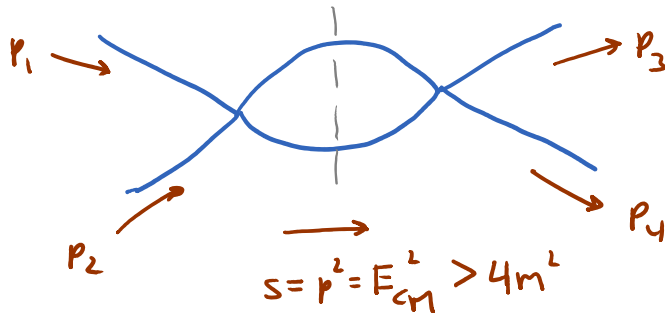
$$i\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) \equiv i\mathcal{M}(s, t, u) \quad \left(\begin{array}{l} \text{con} \\ s+t+u=4m^2 \end{array} \right) \\ = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} I(s) + \dots,$$

considerada como función de $s \equiv p^2 = (p_1 + p_2)^2 \in \mathbb{C}$,

tiene un corte ramal sobre el eje real en la región física $s > 4m^2$,



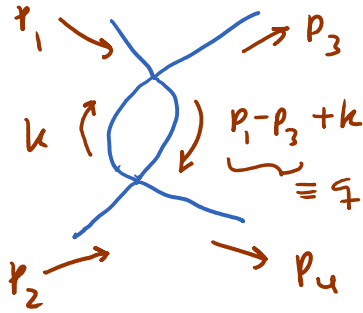
que se origina del estado intermedio de 2 partículas
cuando éstas van a la capa de masa (haciendo
 contacto en nuestra discusión del teorema óptico
 generalizado en las pp. 469-70):



La amplitud de dispersión física se obtiene a partir
 del resultado euclideo por rotación de Wick inversa,
 haciendo una continuación analítica a la región que
 está por arriba del corte rama, es decir,

$$\text{tomando } \sqrt{4m^2 - p^2} = +i\sqrt{p^2 - 4m^2} .$$

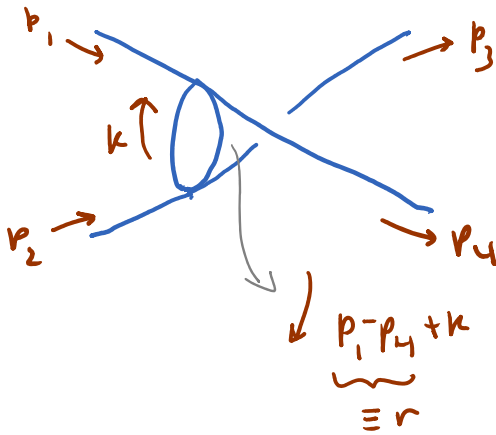
Es fácil ver que los diagramas restantes con un lazo
 involucran exactamente las mismas integrales:



$$= (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(\xi + k)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$-I(t)$
 ↗ variable de Mandelstam
 $t \equiv \xi^2 = (p_1 - p_3)^2$

y de manera similar,



$$= (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} [-I(u)]$$

↖ variable de Mandelstam
 $u \equiv r^2 \equiv (p_1 - p_4)^2$

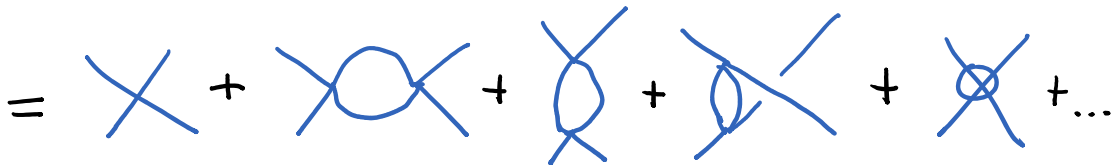
Para imponer nuestra condición de renormalización (2),

evaluamos

$$u = 4m^2 - s - t \text{ siempre}$$

$$i\mathcal{M}(s=4m^2, t=0) = -i\lambda$$

$$i\mathcal{M}(s=4m^2, t=0, u=0) \text{ (no es independiente)}$$



$$i\eta(s=4m^2, t=0, u=0)$$

$$= -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \left[\mathcal{I}(4m^2) + \mathcal{I}(0) + \mathcal{I}(0) \right] - i\delta\lambda + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

e igualamos a $-i\lambda$, de donde podemos deducir que

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= -\frac{i\lambda^2}{2} \left[\mathcal{I}(4m^2) + 2\mathcal{I}(0) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ &= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[\left\{ \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \frac{\Lambda}{m} \tan^{-1}\left(\frac{m}{\Lambda}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left\{ \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} \right\} \right] + \mathcal{O}(\lambda^3). \end{aligned}$$

Para $\Lambda \gg m$, esto se simplifica a

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[2 \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) + 1 + 2 \left\{ 2 \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - 1 \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ &= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[6 \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - 1 + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3). \end{aligned}$$

Simplificando de la misma manera

$$\begin{aligned}
 I(s) &= \frac{i}{16\pi^2} \left[\ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \frac{2}{p} \sqrt{4m^2 - p^2} \tan^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4\Lambda^2 + 2(4m^2 - p^2)}{p\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}} \tan^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}}\right) \right] \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \left[2\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{2}{\sqrt{s}} \sqrt{4m^2 - s} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4m^2 - s}}\right) \right. \\
 &\quad \left. + 1 + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Juntando nuestros resultados, podemos obtener una expresión final para la amplitud de dispersión $2 \rightarrow 2$ en un lazo en momentos arbitrarios:

$$i\mathcal{M}(s,t) = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} [I(s) + I(t) + I(u)] - i\delta\lambda + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}(s,t) = & -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\cancel{6 \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)} + 3 \right] \leftarrow \text{de } I(s)+I(t)+I(u) \\
 & - \frac{2}{\sqrt{s}} \sqrt{4m^2-s} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4m^2-s}}\right) \leftarrow \text{de } I(s) \\
 & - \frac{2}{\sqrt{t}} \sqrt{4m^2-t} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{4m^2-t}}\right) \leftarrow \text{de } I(t) \\
 & - \frac{2}{\sqrt{u}} \sqrt{4m^2-u} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{4m^2-u}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \leftarrow \text{de } I(u)
 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow e^{-i\delta}$

$$- \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\cancel{6 \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)} - 1 + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

es decir,

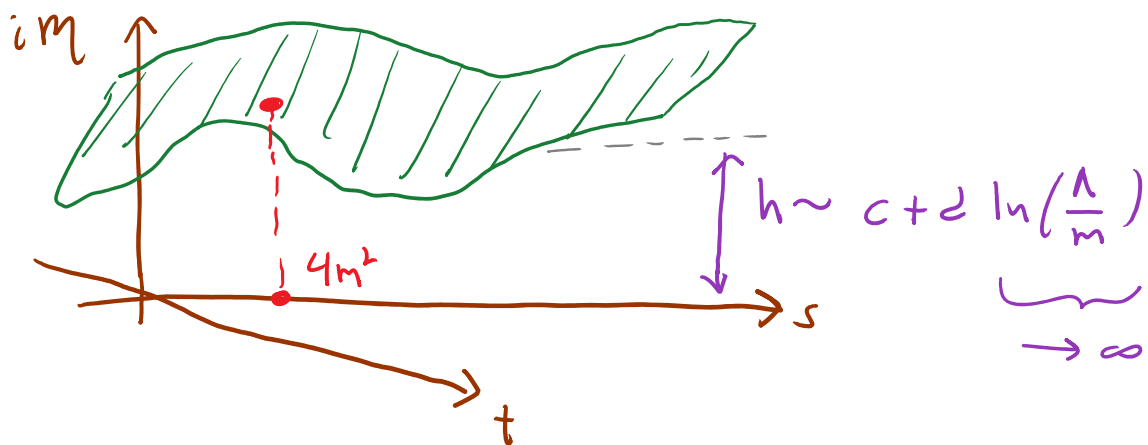
$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}(s,t) = & -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \left[\sqrt{\frac{4m^2}{s}-1} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{s}-1}}\right) \right. \\
 & \left. + \sqrt{\frac{4m^2}{t}-1} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{t}-1}}\right) + \sqrt{\frac{4m^2}{u}-1} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{u}-1}}\right) - 2 \right].
 \end{aligned}$$

L5: 24/08/17

Esta expresión que puede reescribirse en la región física $s > 4m^2$ usando la identidad $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$.

Lo más importante de este resultado es que es finito aún cuando $\Lambda \rightarrow \infty$: nuestra definición de λ (\leftrightarrow condición de renormalización (2)) obligó a $i\mathcal{M}(s,t)$ a ser finita para $s=4m^2, t=0$, y esto garantiza que sea finita $\forall s, t$.

Esquemáticamente, tenemos



y al pedir $i\mathcal{M} = -i\lambda$ en un punto, obligamos a $d=0$, con lo cual $i\mathcal{M}$ debe ser independiente de Λ en todos lados.

Podemos notar también que nuestros resultados

$$\tilde{\Gamma}_4(p_1, p_2, -p_3) \equiv \text{Diagram} = iM_{2 \rightarrow 2}(s, t),$$

sirven para determinar δZ , δm^2 y $\delta \lambda$ (y por tanto Z , m^2 y λ_0) en términos de m^2 , λ y Λ .
 Y vimos también que, al menos a un lazo, el resultado sirve para hacer que $\tilde{\Gamma}_2$ y $\tilde{\Gamma}_4$ sean finitas. Las divergencias UV fueron absorbidas en δZ , δm^2 y $\delta \lambda$ (automáticamente, no a mano).

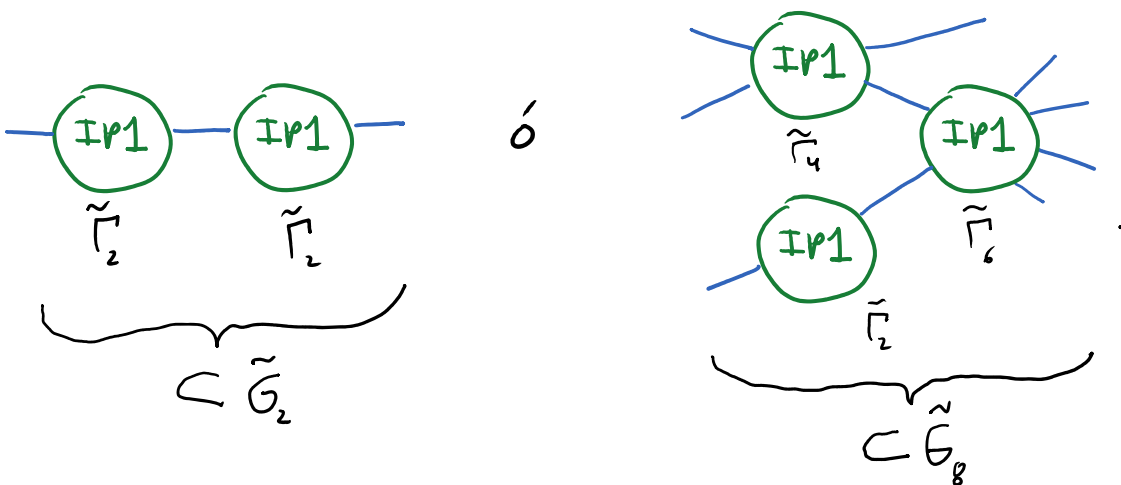
Surgen entonces naturalmente 2 preguntas:

- i) Dado que a un lazo No tenemos ya más parámetros disponibles para renormalizar (que puedan por tanto absorber nuevas divergencias), ¿qué sucede cuando calculamos a un lazo $\tilde{G}_{N>4}$?

ii) ¿Qué sucede con todas las funciones de correlación a 2 lazos y más allá?

Antes de proceder, conviene notar que, en el análisis de posibles divergencias UV en cualquier teoría, basta concentrarse en las funciones de correlación $IP1$, $\tilde{\Gamma}_N$, porque las funciones de correlación genéricas \tilde{G}_N siempre se pueden escribir como combinaciones de $\tilde{\Gamma}_N$.

Conectadas por propagadores aislados, que son justamente los sitios donde uno puede cortar el diagrama ~~$IP1$~~ para desconectarlo. P.ej.,

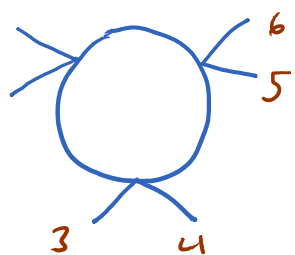


Y un punto importante es que, al armar \tilde{G}_N a partir de funciones propias $\tilde{\Gamma}_N$, no pueden aparecer nuevas divergencias UV, porque no estamos agregando ningún lazo = No hay integrales $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ adicionales.

Ahora, para responder la pregunta i), notemos primero que la simetría de la teoría φ^4 bajo $\varphi \rightarrow -\varphi$ implica que si N es impar, $\tilde{G}_N \propto \langle \Omega | T\{\hat{\varphi}_1 \dots \hat{\varphi}_N\} | \Omega \rangle = (-1)^N \tilde{G}_N = 0 \Rightarrow \tilde{\Gamma}_N = 0$.

(Estamos asumiendo aquí que no hay "rompimiento espontáneo de simetría", es decir, que el vacío preserva la invariancia bajo $\varphi \rightarrow -\varphi$ y por lo tanto tenemos en particular $\langle \Omega | \hat{\varphi}(x) | \Omega \rangle = 0$.)

El primer caso $N > 4$ a considerar es entonces

$$\tilde{\Gamma}_6(p_1, \dots, p_5) = \underbrace{\left(\begin{array}{c} \text{diagrama de un círculo con 6 patas externas} \\ \text{permutaciones de las patas externas} \end{array} \right)}_{\mathcal{O}(\lambda^3)} + \mathcal{O}(\lambda^4).$$


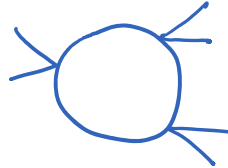
El diagrama muestra un círculo azul con seis líneas azules que se extienden hacia afuera, etiquetadas con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en color naranja. Las patas 1 y 2 están en la parte superior izquierda, las 3 y 4 en la parte inferior, y las 5 y 6 en la parte superior derecha.

(Notar por cierto que

$$i\mathcal{M}_{2 \rightarrow 4} = \text{Diagram 1} + \text{permutaciones}$$

$\mathcal{O}(\lambda^2)$


+

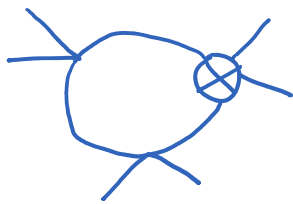


+ permutaciones

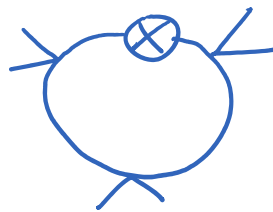
$\mathcal{O}(\lambda^3)$

$$\neq \tilde{\Gamma}_6 .$$

Es preocupante que aquí tenemos diagramas de 1 lazo que no están acompañados por diagramas con contraterminos para cancelar posibles divergencias UV, porque no existe , y p.ej.

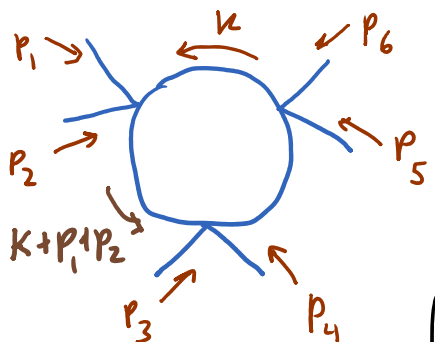


y



son de $\mathcal{O}(\lambda^4)$.

Pero podemos notar que, de hecho,



$$= (-i\lambda)^3 \frac{1}{3}$$

$$\cdot \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p_1+p_2)^2 - m^2} \frac{i}{(k+p_1+p_2+p_3+p_4)^2 - m^2}$$

con $i\epsilon$ sobreentendidos

$$\sim \int \frac{d^4 k}{k^6} \sim \Lambda^{-2}$$

¡es finito sin necesidad de emplear contra términos!

Más en general, un diagrama con L lazos e I líneas internas (\leftrightarrow propagadores) puede ser proporcional a

$$\int d^4 k_1 \dots d^4 k_L \underbrace{\frac{i}{k_1^2} \dots \frac{i}{k_1^2} \dots \frac{i}{k_L^2} \dots \frac{i}{k_L^2}}_I \sim \Lambda^{4L-2I}$$

por la región de la integral múltiple donde todos los $k_n \propto \Lambda \rightarrow \infty$ al mismo tiempo.

Llamamos por lo tanto a

$$D \equiv 4L - 2I$$

el grado de divergencia superficial (o primitivo) del diagrama. Si $D \geq 0$, esperaríamos que el diagrama tenga una divergencia UV $\propto \Lambda^D$ ($D=0$ corresponde a una posible divergencia logarítmica). Para $L=1$, como en el ejemplo que hicimos en $\tilde{\Gamma}_6$, hay una sola variable de integración k_1 , así que D determina por completo si el diagrama es finito o no. Para $L > 1$, $k_n \propto \Lambda \rightarrow \infty \forall n$ no es la única región de posible divergencia, así que la situación es un poco más complicada, como veremos más adelante.

Notemos ahora que (ver p. 421 del curso anterior)

$$L = I - V + 1$$

↖ # de vértices (↔ deltas de Dirac)

↗ # de integrales sobre momentos

↖ # de partículas virtuales

↖ deltas de Dirac que implementa conservación del momento total (condición sobre patas externas)

(pej., , , )

$L = 3 - 2 + 1 = 2$ ✓ $L = 1 - 1 + 1 = 1$ ✓ $L = 4 - 3 + 1 = 2$ ✓

y por otro lado, en φ^4



$$4V = E + 2I,$$

↖ # de patas externas (que en $\tilde{\Gamma}_N$ estabamos llamando N)

porque los vértices en esta teoría son de 4 patas, y terminan en un vértice simbol extremos de cada línea interna pero solo un extremo de cada línea externa. Así que podemos reexpresar

$$\begin{aligned} D &= 4L - 2I \\ &= 4(\overbrace{I - V + 1}) - 2I = \underbrace{2I - 4V + 4}_{4V - E} \\ &= \cancel{4V} - E - \cancel{4V} + 4 \end{aligned}$$

Es decir, el grado de divergencia superficial de un diagrama,

$$D = 4 - E$$

es independiente de L (o de $V = L + \frac{E}{2} - 1$).

Concluimos entonces que, en la teoría φ^4 , $D \geq 0$

solo si $E \leq 4$, y por lo tanto solo los diagramas

que figuran en $\tilde{\Gamma}_2$ y $\tilde{\Gamma}_4$ son superficialmente (o primitivamente) divergentes.

En particular, a 1 lazo todos los diagramas con $E > 4$ resultan ser finitos, así que con nuestros resultados para $\tilde{\Gamma}_2$ y $\tilde{\Gamma}_4$ hemos logrado que, a este orden, todos las funciones de correlación (IIP o no), y por tanto todos las amplitudes, sean ya finitas. Esto responde la pregunta i) (de la p. 679).

Ahora consideremos la pregunta ii): ¿qué pasa al calcular más allá de 1 lazo?

Conviene desglosar

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{---} \otimes \text{---} \\ \uparrow p \end{array} \equiv \underbrace{\text{---} \otimes_1 \text{---}}_{i(\delta z_1 p^2 - \delta m_1^2)} + \underbrace{\text{---} \otimes_2 \text{---}}_{i(\delta z_2 p^2 - \delta m_2^2)} + \dots \\
 \quad \quad \quad \uparrow \sigma(\lambda) \quad \quad \quad \uparrow \sigma(\lambda^2)
 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagrama con } \otimes \\
 \equiv \\
 \underbrace{\text{Diagrama con } \otimes_1}_{-i\delta\lambda_1} + \underbrace{\text{Diagrama con } \otimes_2}_{-i\delta\lambda_2} + \dots
 \end{array}$$

\leftarrow subíndices hacen referencia al orden en la expansión en lazos en el que estos vértices contribuyen

$\uparrow \sigma(\lambda^2) \quad \uparrow \sigma(\lambda^3)$

Notar que $[\delta z] = [\delta \lambda] = M^0$, $[\delta m^2] = M^2$ y

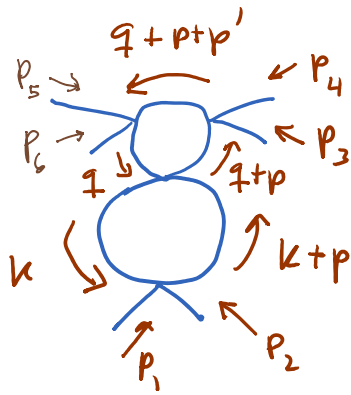
$\delta z \equiv z - 1$, $\delta m^2 \equiv z m_0^2 - m^2$, $\delta \lambda \equiv z \lambda_0^2 - \lambda$ son constantes.

Las condiciones de renormalización (1') y (2), aplicadas a 2 lazos, debieran determinar

~~Diagrama con \otimes_2~~ y ~~Diagrama con \otimes_2~~ ; la pregunta crucial es si el resultado nuevamente implica la cancelación de todas las divergencias a este orden.

Una novedad importante es que, en cálculos de 2 lazos en adelante, incluso un diagrama superficialmente convergente ($D < 0$) puede de hecho incluir una divergencia UV.

Pej., en $\tilde{\Gamma}_6$ a 2 lazos encontramos el diagrama

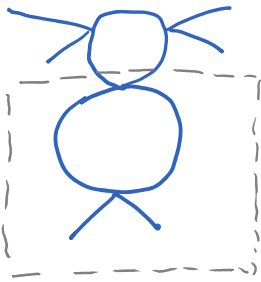


$$\propto \lambda^4 \int d^4 k d^4 q \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+p)^2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q+p)^2} \frac{1}{(q+p+p')^2}$$

$$p \equiv p_1 + p_2, \quad p' \equiv p_3 + p_4$$

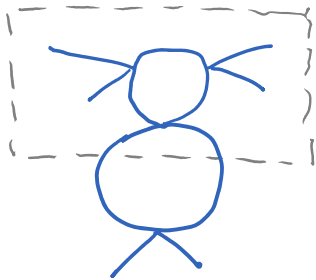
Su grado de divergencia superficial es $D = 4 - E = -2$, así que la región de la integral donde $k \sim \Lambda$ y al mismo tiempo $q \sim \Lambda$ da lugar a un comportamiento $\propto \Lambda^{-2}$, y es por tanto convergente. Sin embargo, la región donde $k \sim \Lambda$ con q fijo da lugar a un comportamiento $\Lambda^{4-2 \cdot 2} = \Lambda^0$, es decir, una divergencia logarítmica!

Pero la razón es clara: el diagrama de 6 patas que estamos considerando incluye un subdiagrama de 1 lazo con $E = 4$,



, que como habíamos visto antes tiene $D=0$ y da lugar por tanto a una divergencia logarítmica. El mantener q fijo mientras $k \sim \Lambda \rightarrow \infty$ equivale

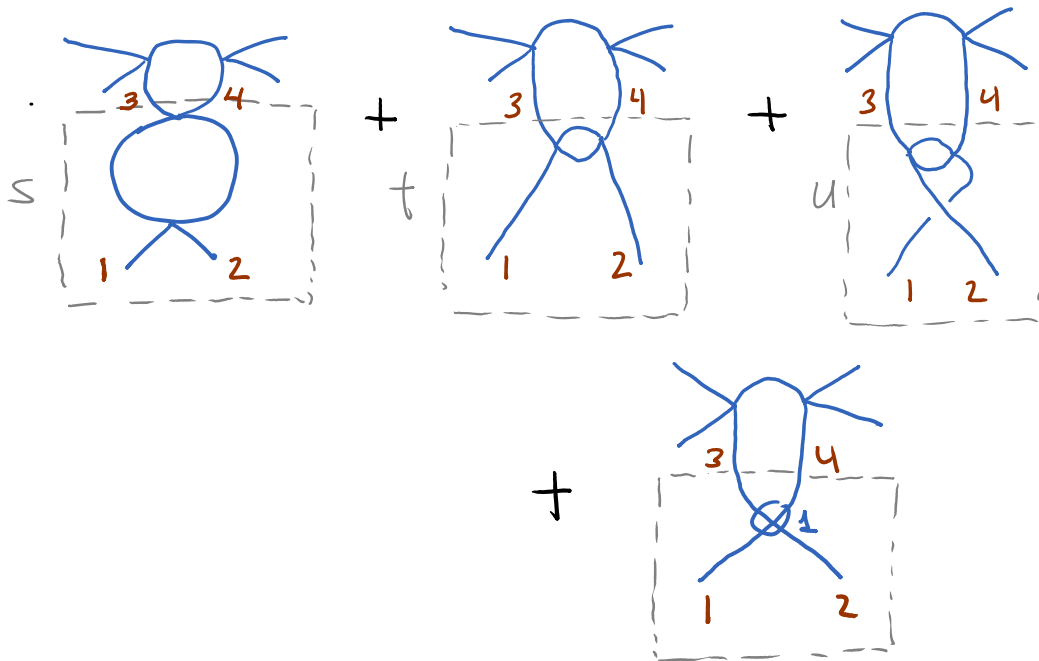
a tratar a las 2 líneas internas cortadas por el recuadro rayado como si fueran partes externas, así que nos deja justamente en el comportamiento UV del subdiagrama. Similarmemente, si consideramos



$q \sim \Lambda \rightarrow \infty$ en k fijo, tenemos el mismo comportamiento UV que en el subdiagrama indicado a la izquierda, el cual apareció en $\tilde{\Gamma}_6$ a 1 lazo, y es por tanto convergente.

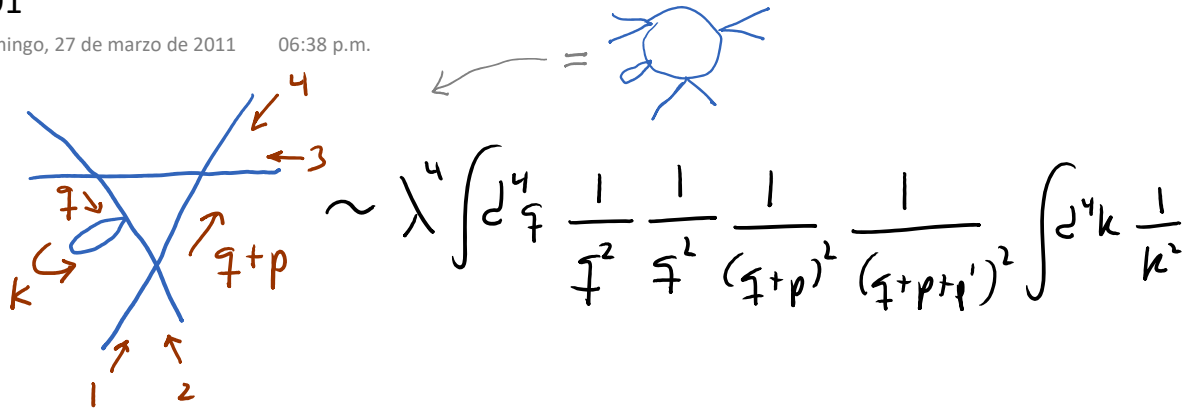
Recordando (de las pp. 666-673) que el subdiagrama en divergencia logarítmica era apenas uno de 3 diagramas divergentes en $\tilde{\Gamma}_4$ a 1 lazo (el asociado a la variable de Mandelstam s , si lo leemos

verticalmente), sospecharíamos que la suma de diagramas



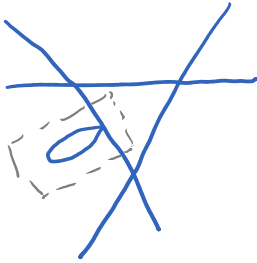
que contribuyen todos a $\tilde{\Gamma}_6$ a $\mathcal{O}(\lambda^4)$, es finita. Y esto resulta ser cierto: las regiones $k \sim \eta \sim \Lambda \rightarrow \infty$ y $\eta \sim \Lambda$ con k fijo ya eran finitas en los diagramas s, t y u por separado, y la combinación de estos 3 con el que involucra a $\delta\lambda_1$ habíamos visto ya anteriormente (pp. 675-677) que es finita en la región restante $k \sim \Lambda \rightarrow \infty$ con η fija.

Otro ejemplo de 'subdivergencias' es



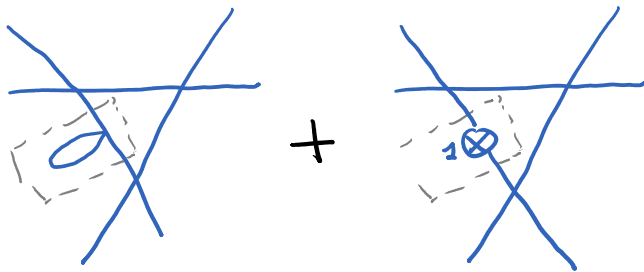
$$\sim \lambda^4 \int d^4 \tilde{q} \frac{1}{\tilde{q}^2} \frac{1}{\tilde{q}^2} \frac{1}{(\tilde{q}+p)^2} \frac{1}{(\tilde{q}+p+q')^2} \int d^4 k \frac{1}{k^2}$$

que, a pesar de tener nuevamente $D=4-6=-2$ (y ser por tanto finito cuando $\tilde{q} \sim k \sim \Lambda \rightarrow \infty$), contiene una divergencia cuadrática que proviene de la región donde $k \sim \Lambda \rightarrow \infty$ con \tilde{q} fijo. Esta subdivergencia está



evidentemente asociada a subdiagramas indicados a la izquierda (que encontramos en $\tilde{\Gamma}_2$ a 1

1a2a), y por tanto desaparece al sumar

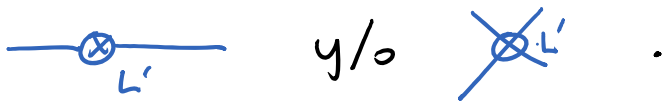


(que figuran ambos en $\tilde{\Gamma}_6$ a $\mathcal{O}(\lambda^4)$).

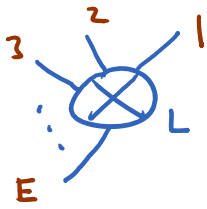
Esta es una idea general: se puede mostrar que

un diagrama es (absolutamente) convergente si su grado de divergencia superficial, así como el de todos sus posibles subdiagramas, es negativo. Este es el llamado teorema de Weinberg.

Las posibles divergencias en $\tilde{\Gamma}_{E>4}$ a $L \geq 2$ lazos siempre se originan de subdiagramas con 2 ó 4 patas externas y $L' < L$ lazos, por lo que es natural esperar que estas divergencias desaparezcan al incluir los otros términos ya conocidos



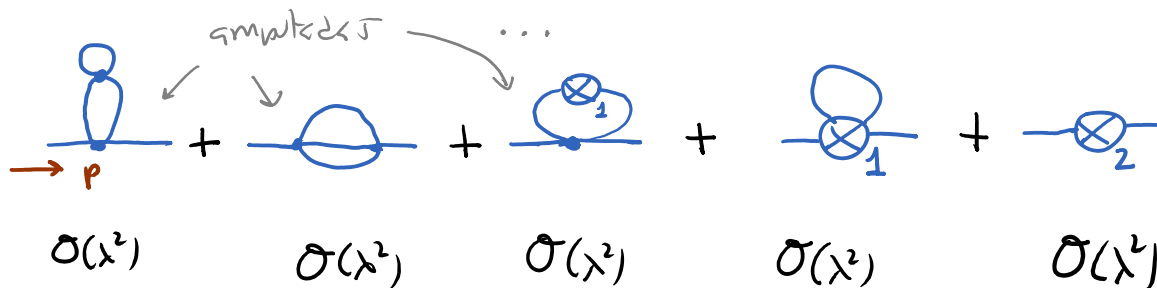
El que las divergencias en $E > 4$ aparezcan solo en subdiagramas correspondientes a $\tilde{\Gamma}_2$ o $\tilde{\Gamma}_4$ es crucial para que puedan eliminarse, puesto que de existir divergencias genuinamente nuevas en $\tilde{\Gamma}_{E>4}$ a L lazos, su cancelación hubiera requerido nuevos contra términos en E patas,



, que no están presentes en L .

El paso importante sigue siendo entonces renormalizar los correladores propios primitivamente divergentes $\tilde{\Gamma}_2$ y $\tilde{\Gamma}_4$. P.ej., a 2 lazos,

$\tilde{\Gamma}_2(p) = -i \Delta m^2(p^2)$ consiste de



Después nuevamente imponer las condiciones de renormalización (1'), determinando con ello el nuevo ingrediente

$$\text{Diagram with tadpole on loop} = i(\delta z_2 p^2 - \delta m_2^2)$$

y después comprobar que el resultado es justamente lo que se necesita para eliminar todas las posibles divergencias de $\tilde{\Gamma}_2(p)$ a este orden.

L9: 27/02/19 (-10 min) L6: 27/08/17

Es importante notar que esto no es trivial:

con $\text{---}\otimes_2\text{---} = i(\delta z_2 p^2 - \delta m_2^2)$ podremos eliminar solamente divergencias del tipo (por análisis dimensional)

$$\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) p^2, \Lambda^2, m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right),$$

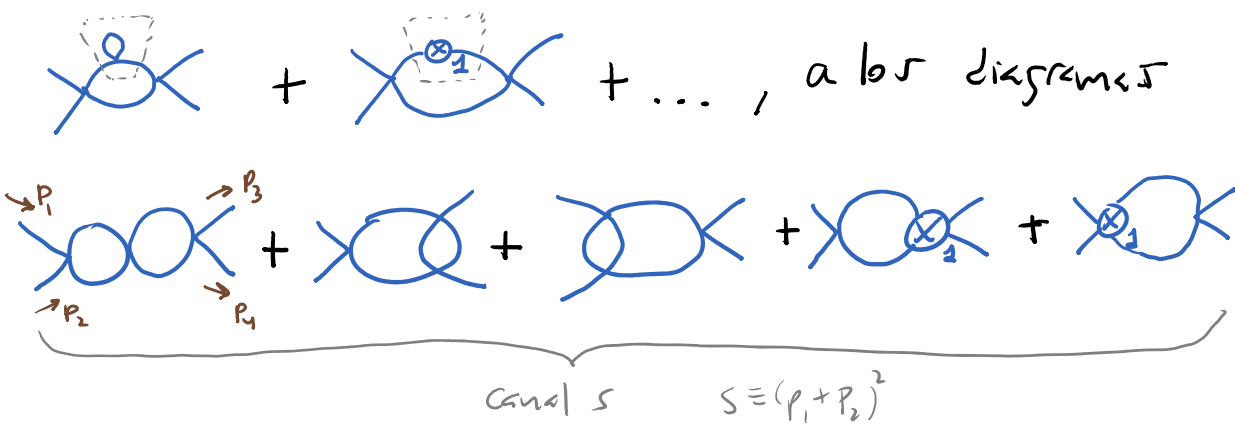
corrección a Λ^2 de orden $\frac{m^2}{\Lambda^2}$

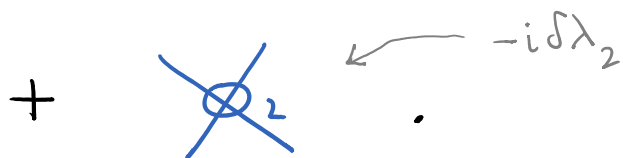
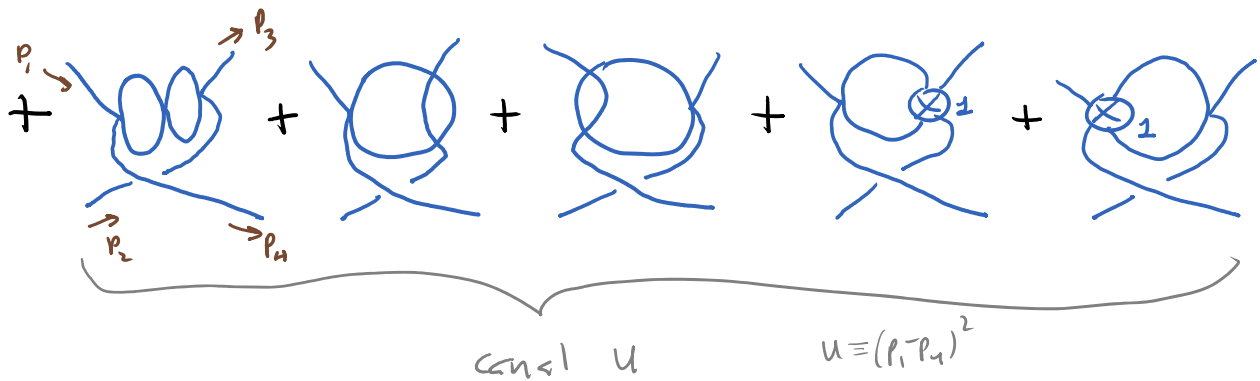
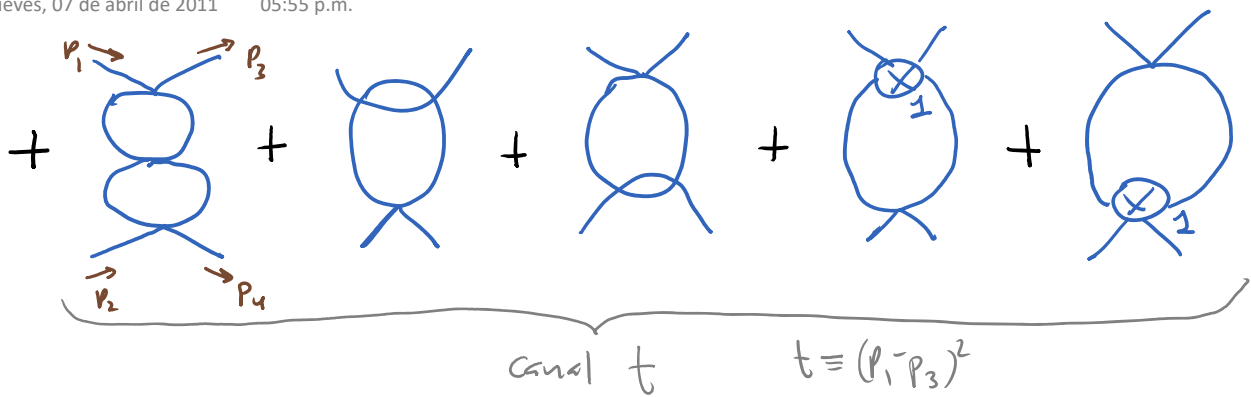
que llamamos "divergencias locales", porque corresponden a deltas de Dirac en espacios de posiciones, tal como los contraterminos contenidos en nuestro $\mathcal{L} \sim (\partial\phi_0^2 - \phi_0^2 - \phi_0^4)$ local. Pero No, p.ej.:

$$\Lambda^2 \ln\left(\frac{p^2}{m^2}\right),$$

que es una divergencia No local ¡y claramente no podría venir de ningún contratermino local en \mathcal{L} !

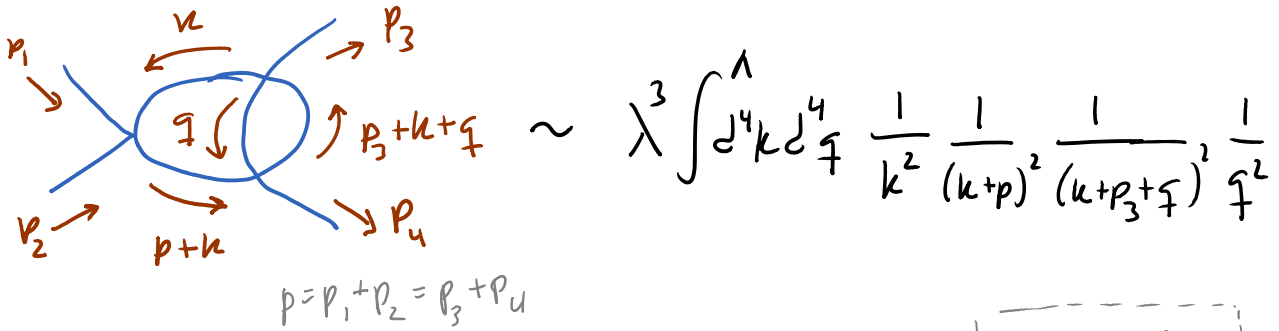
De manera similar, en $\tilde{\Gamma}_4$ a 2 lazos tenemos, además de correcciones al primer lazo como





Este último controtérmino solo nos permitirá cancelar divergencias independientes de p_1, p_2, p_3, p_4 (es decir, de s, t, u) !

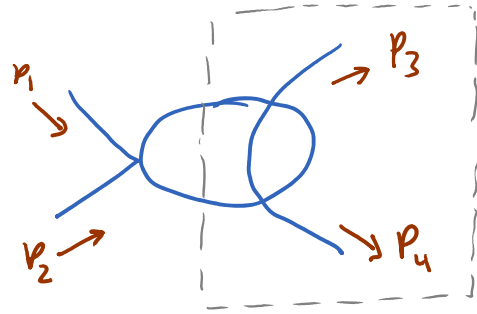
Por aún, podemos ver que los diagramas individuales si contienen divergencias UV con la dependencia de p no deseada. P.ej.,



$$\sim \lambda^3 \int d^4k d^4q \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+p)^2} \frac{1}{(k+p_3+q)^2} \frac{1}{q^2}$$

$p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$

incluye en particular la región de integración $q \sim \Lambda$ con k fijo, que corresponde al subdiagrama

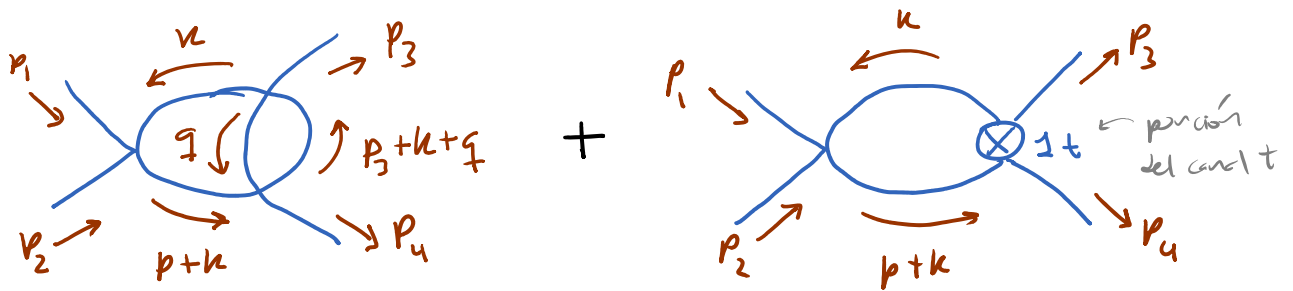


que se muestra a la derecha, y que ya calculamos en las pp. 666-671: sabemos que da lugar a una subdivergencia $\sim \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)$. Combinando con la integral sobre $k \sim p$, obtenemos entonces el comportamiento $\sim \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \ln\left(\frac{p^2}{m^2}\right)$, que es una de las temidas divergencias no locales.

Pero la clave es que este resultado para el diagrama en cuestión solo fue posible por la existencia de la subdivergencia indicada, que

ya habíamos encontrado en nuestros cálculos a 1 lazo, y sabemos que se canceló con ~~1~~.

Esperaríamos entonces que la combinación

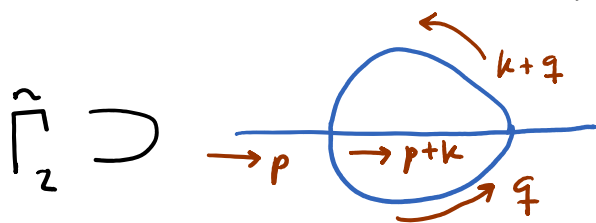


No contenga ya la subdivergencia para $\eta \sim \Lambda$ con k fijo, que daba lugar a la dependencia problemática $\sim \ln \Lambda \ln p^2$.

Si en verdad resulta ser el caso que los contra-
términos obtenidos hasta L lazos logren cancelar
todos las subdivergencias en diagramas con $L+1$
lazos, de manera que solo quede por eliminar la
posible divergencia superficial de cada diagrama,
entonces podemos convencernos de que solo tendremos
la dependencia de p permitida.

Para ver esto, recordemos primero que los diagramas que contribuyen a $\tilde{\Gamma}_2$ y $\tilde{\Gamma}_4$ a $L+1$ lazos tienen $D=4-2=2$ y $D=4-4=0$, respectivamente.

La clave ahora es notar que, si diferenciamos el diagrama en cuestión con respecto a alguno de los momentos externos p_n^μ , entonces hacemos que su grado de divergencia superficial decrezca por 1, así que después de diferenciar $D+1$ veces, el resultado será finito. P.ej.,



$$(D=2)$$

$$\propto \lambda^2 \int d^4 k d^4 q \frac{1}{q^2 - m^2} \frac{1}{(k+q)^2 - m^2} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2} \sim \Lambda^{8-6},$$

tomando
 $k \sim \Lambda, q \sim \Lambda$

así que

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[\text{diagram} \right] \sim \lambda^2 \int d^4 k d^4 q \frac{1}{q^2} \frac{1}{(k+q)^2} \frac{(p+k)_\mu}{[(p+k)^2 - m^2]^2} \sim \Lambda^{9-8}$$

tiene $D=1$,

$$\frac{\partial}{\partial p^\nu} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[\text{Diagrama} \right] \sim \lambda^2 \int d^4 k \int d^4 q \frac{1}{q^2} \frac{1}{(k+q)^2}$$

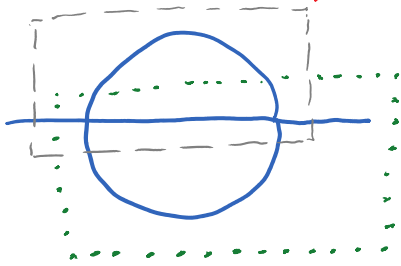
$$\frac{-4(p+k)_\mu (p+k)_\nu + \eta_{\mu\nu} [(p+k)^2 - m^2]}{[(p+k)^2 - m^2]^3} \sim \Lambda^{10-10}$$

tiene $D=0$, y similarmente

$$\frac{\partial}{\partial p^\lambda} \frac{\partial}{\partial p^\nu} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[\text{Diagrama} \right] \text{ tiene } D=-1.$$

Esta última expresión será entonces absolutamente convergente si ya anteriormente se han eliminado sus subdivergencias utilizando los contratérminos calculados a 1 lazo. Se puede verificar que dicha cancelación de subdivergencias efectivamente ocurre, aún cuando resulta menos obvia para este diagrama que para los ejemplos anteriores, debido a la

existencia de "divergencias traslapantes":



[ver p.ej. Collins, Weinberg].

El anterior procedimiento de diferenciación implica entonces que en

$$\left[\text{Diagrama con un bucle} + \text{diagramas con contra términos}_1 \right] \text{ que cancelan } \underline{\text{subdivergencias}}$$

el coeficiente de cualquier término divergente es a lo más una expresión cuadrática en p^μ . Por invariancia de Lorentz, debe ser del tipo $a p^2 + b$,

← NO sería cierto si regularización violara Lorentz

¡justo como necesitábamos para que pueda cancelarse

$$\text{con } \textcircled{\otimes}_2 = i(\delta_{\mu\nu} p^2 - \delta m^2) !$$

De manera similar, cualquier diagrama en $\tilde{\Gamma}_4$ (con sus subdivergencias ya canceladas) tiene $D=0$ y por tanto se vuelve finito al diferenciar 1 vez

Con respecto a cualquiera de los 4 momentos externos, así que la divergencia UV debe ser independiente de p , ¡justo como necesitamos para que se cancele con ~~\otimes_2~~ $= -i\delta\lambda_2$!

Para mayor claridad, el argumento que hemos dado aquí es análogo a afirmar que

$$I(p) \equiv \int_0^{\infty} \frac{dk}{k+p} = \ln(k+p) \Big|_0^{\infty} = a - \ln p \quad y$$

$$J(p) \equiv \int_0^{\infty} \frac{k dk}{k+p} = [k - p \ln(k+p)]_0^{\infty} = b + cp + p \ln p ,$$

con a, b y c divergentes, debido a que son finitos

$$\frac{\partial I}{\partial p} = - \int_0^{\infty} \frac{dk}{(k+p)^2} = \frac{1}{k+p} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p}$$

y

$$\frac{\partial^2 J}{\partial p^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{k dk}{(k+p)^3} = \left[-\frac{2k+p}{(k+p)^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p} .$$

La demostración rigurosa de que las divergencias se cancelan a todo orden en la expansión perturbativa, basada en este mismo tipo de argumentación, fue desarrollada por Bogoliubov y Parasiuk, Hepp, y Zimmermann \equiv BPHZ. Los 3 primeros (BPH) inventaron un procedimiento recursivo para generar los contratérminos requeridos, y el último (Z) dio una solución explícita (la llamada "fórmula del bosque"). (Ver, p.ej., Collins).

Cabe mencionar que BPHZ implementan (por conveniencia para su cálculo) condiciones de renormalización diferentes a (1') y (2),

pidiendo que

$$\tilde{\Gamma}_2(p=0) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{\Gamma}_2(p=0) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \tilde{\Gamma}_2(p=0) = 0,$$

\uparrow \uparrow \uparrow

y $\tilde{\Gamma}_4(p_1=p_2=p_3=p_4=0) = -i\lambda$.

\uparrow

$$\frac{0}{D=2}$$

$$\frac{0}{D=4}$$

Más en general, se pide que, **en momento cero**, cada diagrama de lazo en $D \geq 0$ y sus primeras D derivadas con respecto a momento externo sean cero. Este esquema de renormalización, también conocido como sustracción a momento cero, permite implementar la renormalización diagrama por diagrama, a través de una expansión en Taylor del integrando en cuestión, antes de hacer las integrales, y por tanto No requiere de un corte explícito.

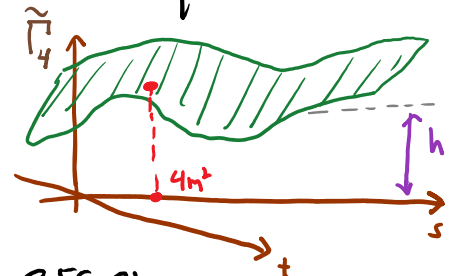
Bajo el esquema BPHZ, los parámetros renormalizados son distintos de los que nosotros hemos empleado hasta ahora, en lo que se conoce como el esquema de renormalización de la capa de masa, o esquema físico. P.ej., nuestra condición (1') exigirá que

$$\tilde{\Gamma}_2(p^2 = m^2) = 0 = \frac{d}{dp^2} \tilde{\Gamma}_2(p^2 = m^2) = 0,$$

así que la " m^2 " que usan BPHZ No es la masa física

(\leftrightarrow ubicación del polo) : $m_{\text{BPHZ}} \neq m_{\text{fis}}$.

Esto sirve para **enfaticar la gran libertad** que tenemos al **definir los parámetros renormalizados**. Aún cuando la conexión entre m_{BPHZ} , λ_{BPHZ} y las cantidades físicas medidas es un poco menos directa que en el esquema de capa de masa, lo importante es que estos parámetros son finitos, y su relación con sus contrapartes en cualquier otro esquema de renormalización se puede determinar y NO involucra al corte Λ . Poca diferencia hace si le reportamos a nuestro amigo experimental que $iM_4(s=4m^2, t=0) = -i\lambda$ ó, p.ej., $-i(3\lambda + \sqrt{s}\lambda^3)$.



La utilidad del esquema BPHZ es que facilita la demostración de un teorema de cancelación de todas las divergencias UV. Logra esto además con un método que, como ya mencionamos, no requiere de un corte explícito, y por tanto enfatiza además la independencia de la regularización elegida.

Pero, en la práctica, no es necesario (ni conveniente) usar este esquema de renormalización, que es apenas una entre un número infinito de opciones.

En particular, podemos notar que, si bien conceptualmente resulta lógico:

① separar $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{ct}$,

② fijar parámetros renormalizados a través de condiciones de renormalización (\leftrightarrow datos experimentales),

③ verificar que esto basta para cancelar infinitos, en la práctica es frecuentemente más fácil:

① restar infinitos a mano (asegurándose de que sean locales), p.ej. $\frac{0}{\rightarrow p} = -\frac{i\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \right]$

② interpretar sustracción en términos de un \mathcal{L}_{ct} , p.ej. $\frac{0}{\otimes 1} = -i\delta m^2$ con $\delta m^2 = -\frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) + c \right]$
constante arbitraria \uparrow

③ inferir las condiciones de renormalización a las cuales corresponde nuestra sustracción elegida.

Tenemos libertad porque $\infty - \infty = \text{cualquier cosa}$.

Muchos libros presentan así la renormalización.

[7: 31/08/17]

Habiendo entendido ya el caso de la teoría φ^4 , pensemos ahora bajo qué condiciones será posible eliminar los infinitos en una teoría arbitraria, en dimensión d , con campos e interacciones de varios tipos, que enumeraremos con las letras "c" e "i", respectivamente.

El propagador del campo tipo c se comporta como

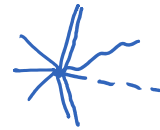
$$\Delta_c^{-1}(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} k^{2s_c - 2},$$

con

$$s_c = \begin{cases} 0 & \text{si } c = \text{escalar o vector } \underline{\text{No}} \text{ masivo} \leftarrow \frac{1}{k^2 - m^2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } c = \text{espinor} \leftarrow \frac{1}{k - m} = \frac{k + m}{k^2 - m^2} \\ 1 & \text{si } c = \text{vector masivo} \leftarrow \frac{\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}}{k^2 - m^2} \end{cases}$$

(así que s_c es prácticamente el espín de la partícula asociada).

Para los vértices, denotaremos



$n_{ic} \equiv$ número de patas del campo tipo c
en el vértice que corresponde al término
de interacción número i

y

$d_i \equiv$ número total de derivadas actuando
sobre los campos del vértice i ($\neq \frac{\partial}{\partial x^i}$)

Consideremos ahora el correlador IIP con
 E_c patas externas de cada campo c , $\tilde{\Gamma}(E_1, E_2, \dots)$,
y fijemos nuestra atención en un
diagrama específico con I_c líneas internas de
cada campo c y V_i vértices de cada tipo i .
El número de lazos (y por tanto, de integrales
remnentes $\int d^d k_\ell$) en tal diagrama es

$$L = \underbrace{\sum_c I_c}_{\equiv I} - \underbrace{\sum_i V_i}_{\equiv V} + 1$$

número total de propagadores (\leftrightarrow integrales) número total de vértices (\leftrightarrow deltas)

igual que en p. 684

por delta de Dirac que corresponde a la conservación del momento externo total

Además, el número de patas externas e internas de un campo dado se relaciona con el número de vértices que involucran a ese campo a través de

$$\underbrace{E_c + 2I_c}_{\text{número de extremos conectados a vértices}} = \underbrace{\sum_i n_{ic} V_i}_{\text{número de lugares de conexión disponibles en el diagrama}} \quad \text{cf. p. 685}$$

Usando estas 2 ecuaciones, podemos expresar el grado de divergencia superficial del diagrama

(que por definición es la potencia total de los momentos k_n que fluyen en los k_2 s),

$$D \equiv d \cdot L + \sum_i V_i \partial_i + \sum_c I_c (2s_c - 2)$$

\uparrow integrales $\int d^d k_n$
 $d =$ dimensión del espaciotiempo
 \uparrow vértices (por derivadas)
 contribución más divergente posible
 \uparrow propagadores $\sim k^{2s_c - 2}$

en la forma

L p.708

$$D = d \left(\sum_c I_c - \sum_i V_i + 1 \right) + \sum_i V_i \partial_i + \sum_c I_c (2s_c - 2)$$

$$= \sum_c (d + 2s_c - 2) I_c + \sum_i V_i (\partial_i - d) + d$$

$$\frac{1}{2} \left[\sum_i n_{ic} V_i - E_c \right] \quad \text{p.708}$$

que se puede resumir como

$$D = d - \sum_c E_c \mathcal{D}_c - \sum_i V_i \mathcal{D}_i, \quad \text{donde}$$

$$\mathcal{D}_c \equiv \frac{d}{2} + s_c - 1$$

y

$$\mathcal{D}_i \equiv d - \partial_i - \sum_c n_{ic} \mathcal{D}_c$$

L10: 04/03/19

son dimensiones características del campo c y la interacción i , respectivamente.

(P.ej., para φ^4 en $d=4$ tenemos

$$D_\varphi = \frac{d}{2} + s_\varphi - 1 = 2 + 0 - 1 = 1$$

y

$$D_{\varphi^4} = d - \partial_i - \sum_c n_{ic} D_c = 4 - 0 - 4 \cdot 1 = 0,$$

así que recuperamos el resultado obtenido en la p. 685,

$$D = 4 - E \cdot 1 - V \cdot 0 = 4 - E. \quad \checkmark$$

De hecho, este mismo resultado se puede deducir por simple análisis dimensional, sin considerar la estructura detallada del diagrama. Si

el propagador

$$\tilde{\Delta}_c^{-1} \equiv \int d^d x e^{ik \cdot (x-0)} \Delta_c^{-1}(x, 0)$$

$$\equiv \int d^d x e^{ik \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_c(x) \hat{\varphi}_c^\dagger(0) \} | \Omega \rangle^{(0)}$$

tiene dimensión $2s_c - 2$, entonces el campo φ_c

tiene dimensión (en unidades de masa)

$$[\varphi_c] = \frac{1}{2} (2s_c - 2 + d) = \frac{d}{2} + s_c - 1,$$

que coincide precisamente con \mathcal{D}_c . ✓ Es además justo lo necesario para que la acción libre

$$\int d^d x \varphi_c^* \Delta_x^c \varphi_c \quad \text{sea } \underline{\text{adimensional}}.$$

$$\begin{aligned} \uparrow \\ [\Delta_x^c] + [\Delta_c^{-1}] = [\delta^{(d)}(x)] = d \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2s_c - 2 + d} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\Delta_x^c] = -2s_c + 2$$

Y como consecuencia de esto, el término en la acción que corresponde al tipo de interacción i ,

$$\int d^d x \lambda_i \underbrace{\partial_\mu \dots \partial_\nu}_{\partial_i} \underbrace{\varphi_1 \dots \varphi_2 \dots}_{n_{i1} \quad n_{i2} \quad \dots},$$

para ser adimensional, debe incluir una constante de acoplamiento λ_i con

$$[\lambda_i] = d - \partial_i - \sum_c n_{ic} \mathcal{D}_c$$

\nearrow para cancelar $[\mathcal{D}^d_x]$
 \nearrow para cancelar $[(\frac{\partial}{\partial x})^{\partial_i}]$
 \nearrow para cancelar $[\prod_c \varphi_c^{n_{ic}}]$

que es exactamente \mathcal{D}_i . ✓

(P.ej., en \mathcal{L}_{φ^4} , $[\lambda] = 4 - 0 - 4 \cdot 1 = 0$.)
 $\int d^4x \lambda \varphi^4$

Tomando en cuenta además que

$$\int d^d x_1 \dots d^d x_{E_1} \dots e^{i k_i x_i} \dots \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_{E_1}) \dots \} | \Omega \rangle$$

$$\supset \delta^{(d)}(k_1 + \dots) \tilde{\Delta}_1^{-1}(k_1) \dots \tilde{\Gamma}_{(E_1, \dots)}(k_1, \dots)$$

\uparrow partes externas (amputadas en $\tilde{\Gamma}$)

veamos que la función de corrección propia tiene dimensión

$$[\tilde{\Gamma}_{(E_1, \dots)}] = \sum_c E_c \underbrace{(-d + \mathcal{D}_c - 2s_c + 2)}_{-\mathcal{D}_c} + d$$

por $\int d^d x$
 por $\hat{\varphi}(x)$
 por $\tilde{\Delta}^{-1}$
 por $\delta^{(d)}$

$\mathcal{D}_c \equiv \frac{d}{2} + s_c - 1$

En un diagrama con V_i vértices de cada tipo i , esto debe coincidir con

$$\left[\tilde{\Gamma}_{(E_i, \dots)} \right] = \underbrace{\sum_i V_i D_i}_{\text{contribución de las } \lambda_i \text{'s}} + D \quad ,$$

↑ resultado total
integrales $\sim \Lambda^D$

de donde recuperamos nuestra fórmula anterior

$$D = d - \sum_c E_c D_c - \sum_i V_i D_i \quad . \quad \checkmark$$

El diagrama será superficialmente convergente si $D < 0$.

Recordemos ahora que, en la teoría φ^4 en 3+1 dimensiones, encontramos que solamente

$$\tilde{\Gamma}_2 = \text{---} \textcircled{\text{IP1}} \text{---} \quad \text{y} \quad \tilde{\Gamma}_4 = \text{---} \textcircled{\text{IP1}} \text{---}$$

tienen $D \geq 0$ y son por lo tanto superficialmente divergentes; pero se vuelven finitos gracias a los contra términos



y

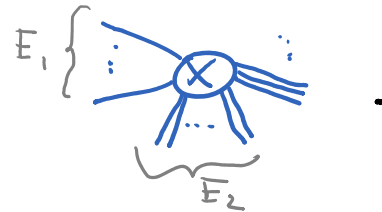


Más en detalle, dentro de $\tilde{\Gamma}_2$ encontramos diagramas divergentes en cada nuevo orden de la expansión perturbativa, que se fueron cancelando sucesivamente con $\text{---} \otimes_1 \text{---}$, $\text{---} \otimes_2 \text{---}$, etc. lo mismo para $\tilde{\Gamma}_4$.

De manera similar, si en una teoría arbitraria encontramos una divergencia superficial en

$$\tilde{\Gamma}_{(E_1, E_2, \dots)} \approx E_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \text{IP1} \\ \vdots \end{array} \right. \text{ , para absorberla}$$

necesitamos un contra término



De $D = d - \sum_c E_c D_c - \sum_i V_i D_i$ vemos que si la teoría

es tal que $D_i \geq 0 \quad \forall i$ (es decir, todas

las constantes de acoplamiento tienen dimensión

no negativa), entonces definitivamente

$$D \leq d - \sum_c E_c D_c \quad ,$$

y dado que

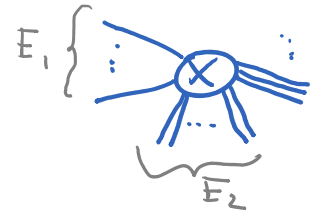
$$D_c = \frac{d}{2} + s_c - 1 > 0 \quad \forall c \quad \text{si } d > 2,$$

esto implica que solo un número finito de correladores propios (aquellos con un número suficientemente pequeño de patas externas) son superficialmente divergentes, justo como sucedió con φ^4 en $d=4$.

Si no nos preocupamos por subdivergencias (que como vimos, debían haber sido ya atendidas en la cuenta a un número menor de lazos), entonces diferenciando el diagrama con respecto a los momentos externos p_1, p_2, \dots , podemos volver a argumentar (pp. 698-701) que los términos divergentes constituyen un polinomio de orden D en los p_n . Es decir, las divergencias UV son locales, y pueden por tanto ser eliminadas

renormalizando los acoplamientos λ_j de varias interacciones j que involucren $n_{jc} = E_c$ potes del campo c y $0 \leq \partial_j \leq D$ derivadas. Estas interacciones tendrán

$$D_j = [\lambda_j] = d - \partial_j - \sum_c E_c D_c$$



$$\stackrel{\omega}{\leq} d = d - \sum_c E_c D_c - \sum_i V_i D_i$$

$$\geq d - (d - \sum_c E_c D_c - \sum_i V_i D_i) - \sum_c E_c D_c$$

$$\geq 0$$

y son por tanto consistentes en nuestra suposición inicial de que $D_i \geq 0 \forall i$.

Llamamos por tanto interacción (superficialmente)

renormalizable a aquella que tiene $D_i \geq 0$, ← no confundir con $D < 0$

y teoría renormalizable (superficialmente, o "por conteo de potencias") a aquella que incluye

solo interacciones renormalizables. Estas teorías tienen

un número finito de correladores propios superficialmente divergentes, y requieren un número finito de contraterminos.

Debemos notar que, para que las divergencias UV puedan en verdad ser canceladas, es importante que el lagrangiano completo \mathcal{L} incluya desde un principio a todas las interacciones que correspondan a las partes divergentes de los correladores, de modo que estén presentes en la teoría los contra-terminos necesarios. Por supuesto, las posibles interacciones están restringidas por las simetrías de la teoría, pero estas simetrías restringen igualmente las posibles divergencias, siempre y cuando utilicemos un método de regularización que preserve a estas simetrías. Pej., en φ^4 vimos (p. 700) que la invariancia de Lorentz nos permitió argumentar que las divergencias en $\tilde{\Gamma}_2(p)$ siempre son del tipo $A p^2 + B$, y por tanto pueden ser absorbidas por el contra-termino

$$\text{---} \otimes \text{---} = i(\delta^{\mu\nu} p^2 - \delta_{\mu\nu} m^2).$$

En el caso de una teoría general, no hay ninguna otra limitación sobre la forma que pueden tomar las divergencias UV, así que \mathcal{L} debe incluir todos los términos renormalizables compatibles con las simetrías de la teoría que son preservadas por el esquema de regularización utilizado.

En el ejemplo de φ^4 , si nuestro parámetro de corte no hubiera preservado la invariancia de Lorentz, entonces en $\tilde{\Gamma}_2$ tendríamos términos divergentes con la estructura cuadrática más general

$A p^2 + C_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + D_\mu p^\mu + B$, que para ser eliminados requerirían la presencia adicional de términos $\alpha_0^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_0 \partial_\nu \varphi_0$ y $\beta_0^\mu \partial_\mu \varphi_0$ en $\mathcal{L}_{ct} \subset \mathcal{L}$, que no habíamos incluido antes precisamente porque invocamos Lorentz. Aún en este caso, estaríamos por supuesto en posibilidad de imponer

condiciones de renormalización tales que los parámetros renormalizados $\alpha^{uv} = 0 = \beta^w$, de tal modo que nuestros resultados físicos sí sean covariantes bajo Lorentz. Vemos así nuevamente que distintos métodos de regularización pueden conducir a los mismos resultados finales.

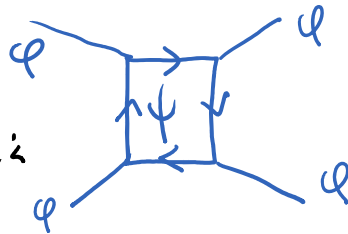
Otro ejemplo sería una teoría con acoplamiento tipo Yukawa, en $d=3+1$ dimensiones,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 + \bar{\Psi}_0 (i \not{\partial} - M_0) \Psi_0 - g_0 \phi_0 \bar{\Psi}_0 \Psi_0,$$

$\nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow$
 $\mathcal{D}_\phi = [\phi] = 1 \quad \mathcal{D}_\Psi = [\Psi] = \frac{3}{2} \quad \mathcal{D}_g = [g_0] = 0$
renormalizable

donde el diagrama \rightarrow

tiene grado de divergencia



superficial

$$D = 4 - \underbrace{4 \mathcal{D}_\phi}_{\sum E_i \mathcal{D}_i} - \underbrace{4 \cdot 0}_{\sum V_i \mathcal{D}_i} = 0$$

$\nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow$
 $d \quad E_\phi \quad V_{\phi\bar{\psi}\psi}$

\Rightarrow divergencia logarítmica.

Así que para tener una teoría renormalizable, necesariamente debemos incluir en \mathcal{L} la interacción adicional $-\frac{\lambda_0}{4!} \varphi^4 = -\frac{\lambda}{4!} \varphi^4 - \delta\lambda \varphi^4$, con λ_0 divergente, de manera que el contra término asociado ~~λ_0~~ $= -i\delta\lambda$ puede absorber las divergencias en $\tilde{\Gamma}^{\varphi\varphi\varphi\varphi}$ a $L \geq 1$ lazos. Notamos que $\lambda_0 \varphi^4$ en efecto es renormalizable y compatible con las simetrías, así que a priori era un término que nos faltaba (no es el único). Por supuesto, si así lo deseamos/necesitamos, podemos ajustar $\lambda = 0$ (en cualquiera que sea la definición que hayamos adoptado para λ), aún cuando esta claramente no es la opción más natural. Nos referimos a este tipo de condición (donde un número es artificialmente pequeño) como un "ajuste fino" (en inglés, "fine tuning").

Regresando a la dispersión general, podemos notar también que si una interacción $i=j$ tiene no solo $\mathcal{D}_j \geq 0$ sino $\mathcal{D}_j > 0$, entonces

$$D = d - \sum_c E_c \mathcal{D}_c - \sum_i V_i \mathcal{D}_i$$

implica que, al agregar suficientes vértices de tipo j , podemos lograr que el grado de divergencia superficial de cualquier correlador $\tilde{\Gamma}(E_1, \dots)$ sea negativo. En otras palabras, la situación mejora al ir a órdenes cada vez más altos en la expansión perturbativa.

Esta subclase de interacciones renormalizables se conoce por tanto como interacciones súper-renormalizables. Cuando queremos hacer esta distinción, la subclase restante de interacciones renormalizables —aquellas con $D_i = 0$ — se llaman estrictamente renormalizables, categoría donde se ubican ϕ^4 y todas las interacciones del Modelo Estándar. Interacciones de este tipo dan lugar a nuevos infinitos, y por tanto, a nuevas contribuciones a los contraterminos, en cada orden sucesivo en la expansión perturbativa, puesto que D no cambia al

agregar más vértices de esta categoría.

En una teoría donde todas las interacciones son súper-renormalizables, solo habrá un número finito de diagramas (no solamente correcciones)

superficialmente divergentes, ¡y es posible por tanto terminar de eliminar todas las divergencias UV en un número finito de pasos!

A la inversa, si una interacción tiene $D_i < 0$, entonces agregando suficientes vértices del tipo i podemos lograr que cualquier amplitud $\tilde{\Gamma}_{(E_i, \dots)}$ sea superficialmente divergente. Solo esos excepcionales (p.ej., la supersimetría puede dar lugar a cancelaciones especiales entre distintos diagramas), necesitaremos entonces un número infinito de términos en \mathcal{L} , en E_c arbitrariamente altas, para (a tener de los ^{↑ restringido por simetrías}

entre términos E_1 (correspondientes) poder eliminar todas las divergencias al renormalizar (aunque si a cada orden nos topamos solo con un número finito de ellas). Esto a su vez implica que EN TOTAL necesitaríamos un número infinito de condiciones de renormalización, y por tanto de datos experimentales, para poder fijar las correspondientes constantes de acoplamiento renormalizadas, situación que claramente no es muy afortunada!

Llamamos a tales interacciones / teorías no renormalizables. Es importante tener claro que sí se pueden renormalizar, pero al precio de ajustar un número infinito de parámetros, después de lo cual en principio aún podríamos hacer predicciones —en particular, las partes no analíticas de las amplitudes.

Si en una teoría incluímos solo un número finito

de interacciones no renormalizables, no será posible eliminar todas las divergencias UV, así que si la teoría pretende ser una descripción fundamental del sistema, donde en verdad queremos tomar $\Lambda \rightarrow \infty$, entonces no tiene sentido físico, al menos perturbativamente. Lo mismo puede ocurrir si hay un número infinito, pero insuficiente, de interacciones no renormalizables.

Por otro lado, si creemos que las teorías cuánticas de campos nos dan apenas una descripción aproximada de la naturaleza, entonces existe un corte UV Λ que es físico, y tiene tanto sentido trabajar con teorías no renormalizables como renormalizables. Regresemos a este punto un poco más adelante.

11:06/03/19

Primero, para ilustrar todas estas ideas nos conviene dar algunos ejemplos:

• Teorías/Interacciones Estrictamente Renormalizables ($D_i=0$)

$\lambda \varphi^4$ en $d=3+1$	$[\varphi]=1$	} Modelo Estándar
$\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$ (QED, QCD, GSW) en $d=3+1$	$[\psi]=3/2$	
$\int \varphi \partial_\mu \varphi A^\mu, \int \varphi^2 A_\mu A^\mu$ en $d=3+1$		
$\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$ (Yang-Mills) en $d=3+1$		
$\int \varphi \bar{\psi} \psi$ (Yukawa) en $d=3+1$		
$\lambda \varphi^3$ en $d=5+1$	$[\varphi]=2$	
$\lambda \varphi^6$ en $d=2+1$	$[\varphi]=1/2$	
$g \varphi^2 \bar{\psi} \psi$ en $d=2+1$	$[\psi]=1$	
$(\bar{\psi} \psi)^2$ en $d=1+1$	$[\psi]=1/2$	
etc.		

• Teorías / Interacciones Súper-Renormalizables ($D_i > 0$)

$$\lambda \varphi^3 \quad \text{en } d = 3+1$$

$$\lambda \varphi^4 \quad \text{en } d = 2+1 \quad [\varphi] = 1/2$$

$$\sum_n \lambda_n \varphi^n \quad \text{en } d = 1+1 \quad [\varphi] = 0$$

$$\sum_n \lambda_n \varphi^n \bar{\psi} \psi \quad \text{en } d = 1+1 \quad [\psi] = 1/2$$

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (\text{Yang-Mills}) \quad \text{en } d < 3+1$$

$$\nearrow \sim \partial A \partial A + g_{YM} \partial A A A + g_{YM}^2 A A A A \quad [A] = \frac{d-2}{2}$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \quad \text{en } d < 3+1 \quad [\psi] = \frac{d-1}{2}$$

etc.

• Teorías / Interacciones No Renormalizables ($D_i < 0$)

$$\lambda \varphi^{n \geq 5} \quad \text{en } d \geq 3+1$$

(y por tanto cualquier acción no polinomial)

$$G_F (\bar{\psi} \psi)^2 \quad (\text{Fermi: } n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e) \quad \text{en } d \geq 3+1$$

$$\nearrow [\psi] = \frac{d-1}{2}$$

$$(\bar{\Psi}\Psi)^{n \geq 3} \quad \text{en } d \geq 2+1 \quad [\Psi] = \frac{d-1}{2}$$

$$\bar{\Psi} S^{\mu\nu} \Psi F_{\mu\nu} \quad (\text{Pauli}) \quad \text{en } d \geq 2+1 \quad [F] = \frac{d}{2}$$

$\uparrow \frac{i}{4} (\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\nu\mu})$
← por esta razón NO lo incluimos en QED o QCD

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (\text{Yang-Mills}) \quad \text{en } d > 3+1 \quad [A] = \frac{d-2}{2}$$

$\uparrow \partial A \partial A + g_{YM} \partial A A A + g_{YM}^2 A A A A$

$$\frac{1}{G_N} \sqrt{-g} R \sim (\partial h)^2 + \sqrt{G_N} h \partial h \partial h + (\sqrt{G_N})^2 h h \partial h \partial h + \dots$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{G_N} h_{\mu\nu} \quad [h] = \frac{d-2}{2}$$

(Einstein-Hilbert: Relatividad General) en $d \geq 2+1$

etc.

Vemos un patrón muy claro: el comportamiento UV en general empeora al agregar más factores de las campos, y mejora al disminuir la dimensión d del espaciotiempo. (Esta segunda observación es la base para el método de "regularización dimensional" que es el más útil/socorrido en la práctica, y que discutiremos unas páginas más adelante.)

Ahora, dado que la relatividad general figura en la última lista, resulta difícil pensar en desechar por completo las teorías no renormalizables. Después de todo, ¡parece que la gravedad existe!

Hoy en día, la visión más generalizada es que cualquier teoría cuántica de campos es apenas una "teoría efectiva a bajas energías", es decir, una descripción aproximada de una teoría más fundamental, que se vuelve imprescindible a altas energías / distancias pequeñas. La idea es que existe una cierta escala energética Λ más allá de la cual aparecen nuevos efectos físicos, y la teoría de campos no es ya una buena aproximación. (P.ej., esperamos efectos de gravitación cuántica a distancias tan pequeñas como la longitud de Planck, $l_p \sim 10^{-20} \text{ m} - 10^{-35} \text{ m}$, o lo que es lo mismo, a energías tan grandes

\lim extra grandes ("Mundo brana") \uparrow \uparrow Planck tradicional

como la escala de Planck, $m_p \sim 10^4 \text{ GeV}$
 $- 10^{19} \text{ GeV}$.) El parámetro de corte Λ tendrá
 entonces un claro sentido físico.

Ahora bien, en presencia de un corte, las teorías
 no renormalizables tienen tanto sentido como las
 renormalizables, porque no existen verdaderas
 divergencias UV. La diferencia entre ambos
 tipos radica en que en el caso de una teoría
 renormalizable podemos 'alejar' la nueva física
 tanto como deseemos (es decir, mandar $\Lambda \rightarrow \infty$),
 al punto que nuestras predicciones sean insensibles
 a ella. Entenderemos con más claridad este punto
 más adelante, desde otra perspectiva, cuando
 estudiemos el "grupo de renormalización".

LA: 07/09/17

10. Renormalización de QED

Aplicaremos ahora la maquinaria general de renormalización a otro ejemplo particular:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= -\frac{1}{4} F_0^{\mu\nu} F_{0\mu\nu} + \bar{\Psi}_0 (i\not{D}_0 - m_0) \Psi_0 \\ &= -\frac{1}{4} F_0^{\mu\nu} F_{0\mu\nu} + \bar{\Psi}_0 (i\not{\partial} - m_0) \Psi_0 - e_0 \bar{\Psi}_0 \gamma^\mu \Psi_0 A_{0\mu} \end{aligned}$$

$\underbrace{\partial^\mu A_0^\nu - \partial^\nu A_0^\mu}_{\leftarrow \text{desnudo, no compacte}}$
 $\underbrace{\gamma^\mu (\partial_\mu + ie_0 A_{0\mu})}_{\leftarrow \text{electrón: } = -|e_0|}$

en 3+1 dimensiones, que como sabemos es un ejemplo muy importante porque realmente describe a (una parte de) el mundo real.

A partir de $[\mathcal{L}] = 4$ tenemos $D_A = 1$, $D_\Psi = 3/2$.

$D_{m_0} = 1$ es un acoplamiento súper-renormalizable,

$D_{e_0} = 0$ es estrictamente renormalizable,

así que **QED es una teoría renormalizable por conteo de potencias.**

Antes de proceder con el análisis, debemos asegurarnos de tener el lagrangiano más general posible consistente con las simetrías.

\mathcal{L}_{QED} es invariante bajo:

- ① Translaciones
- ② Lorentz restringido
- ③ P, T y C (\Rightarrow obviamente PT, CPT, etc.)
- ④ Cambio de fase global $\psi(x) \rightarrow e^{ie_0\theta_0} \psi(x)$
- ⑤ Transformaciones de norma

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie_0\theta_0(x)} \psi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \theta_0(x)$$

con $\theta_0(x) \rightarrow 0$ cuando $|x^\mu| \rightarrow \infty$.

\leftarrow excluye parte global (simetría ④)

Consideremos ahora todos los posibles términos renormalizables construidos con ψ_0 y A_μ^0 que

uno podría pensar en agregar a \mathcal{L}_{QED} :

- Términos en dependencia explícita de x^μ obviamente quedan excluidos por ①.

- Terminar no escalares (como $A_\mu, \psi, \bar{\psi} \partial_\mu \psi$, etc.) evidentemente quedan excluidos por (2).
- $\bar{\psi}_0 \gamma^5 \psi_0, \bar{\psi}_0 \gamma^5 (\not{\partial} + ie_0 A_0) \psi_0$ están prohibidos por (3), y $\bar{\psi}_0 \gamma^5 (\not{\partial} - ie_0 A_0) \psi_0$ por (3) y por (5).
- $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -4 \vec{E} \cdot \vec{B}$ queda descartada por (3) (viola P y T) y es en cualquier caso una derivada total. $\psi^c \equiv C \bar{\psi}^T$
- $\psi_0^T C \psi_0, \psi_0^T C \gamma^5 \psi_0, \psi_0^T C (\not{\partial} + i A_0) \psi_0$, etc. (donde $C \equiv i \gamma^2 \gamma^0$ es la matriz de conjugación de carga - ver pp. 293-94) quedan descartadas por (4) (además de (3)).
- $\partial \cdot A_0, A_0 \cdot A_0, (\partial \cdot A_0)^2, \partial \cdot A_0 A_0^2, (A_0 \cdot A_0)^2$ $\bar{\psi}_0 (\not{\partial} - ie_0 A_0) \psi_0$ están prohibidos por (5). ($\partial \cdot A_0 A_0^2$ y $(A_0^2)^2$ sí figuran en el caso no abeliano.)

$$\cdot \overline{\Psi}_0 \Sigma^{\mu\nu} \Psi_0 F_{\mu\nu}, (\overline{\Psi}_0 \Psi_0)^2, \overline{D}_{\rho} \Psi_0 D^{\rho} \Psi_0, \text{etc.}$$

son compatibles con ①-⑤ pero quedan descartados (al menos a bajas energías) por ser no renormalizables.

Concluimos entonces que Z_{QED} contiene ya todos los términos que resultarán necesarios para absorber las divergencias UV. Es importante resaltar que esto solo será cierto si tenemos cuidado de trabajar con un método de regularización que preserva a las simetrías ①-⑤.

Definiendo de la manera habitual campos renormalizados a través de

$$\psi(x) \equiv \frac{\Psi_0(x)}{\sqrt{Z_2}}, \quad A_{\omega}(x) \equiv \frac{A_{0\omega}(x)}{\sqrt{Z_3}},$$

tenemos $\uparrow Z_2 \equiv Z_{\psi}$ $\uparrow Z_3 \equiv Z_A$

$$\partial^\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu$$

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}_0 (i\not{\partial} - m_0) \Psi_0 - e_0 \bar{\Psi}_0 \gamma^\mu \Psi_0 A_{0\mu}$$

$$= -\frac{1}{4} z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + z_2 \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m_0) \Psi - e_0 z_2 \sqrt{z_3} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$$

que podemos separar en 2 partes,

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{QED,ren} + \mathcal{L}_{QED,ct}, \quad \text{con}$$

$$\mathcal{L}_{QED,ren} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m) \Psi - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$$

$\underbrace{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}_{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED,ct} \equiv & -\frac{1}{4} \underbrace{(z_3 - 1)}_{\equiv \delta z_3} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \underbrace{(z_2 - 1)}_{\equiv \delta z_2} \bar{\Psi} i\not{\partial} \Psi \\ & - \underbrace{(z_2 m_0 - m)}_{\equiv \delta m} \bar{\Psi} \Psi - \underbrace{(z_2 \sqrt{z_3} e_0 - e)}_{\equiv z_1 e} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu \\ & \underbrace{(z_1 - 1) e}_{\equiv \delta z_1 e} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu \quad (\equiv \delta e) \end{aligned}$$

Para definir a z_2, z_3, m y e (y con ello a $\delta z_2, \delta z_3, \delta m$ y δz_1), necesitamos 4 condiciones de renormalización, que escribiremos en detalle más adelante (usaremos nuevamente un esquema de renormalización en la capa de masa).

Podemos notar que la transformación de norma de los campos desnudos,

$$\psi_0(x) \rightarrow e^{ie_0 \theta_0(x)} \psi_0(x), \quad A_{\mu 0}(x) \rightarrow A_{\mu 0}(x) - \partial_{\mu} \theta_0,$$

se puede reescribir en términos de los campos renormalizados y de una función rescalada de norma

$$\theta(x) \equiv \frac{e_0}{e} \theta_0(x) \quad \text{en la forma}$$

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie\theta(x)} \psi(x), \quad A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) - \frac{e}{\sqrt{z_3} e_0} \partial_{\mu} \theta(x).$$

En el lagrangiano renormalizado, A_{μ} aparece solo en la combinación $D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + ie A_{\mu}$,

así que $\mathcal{L}_{\text{QED,ren}}$ será por sí solo invariante bajo la anterior transformación solo si ocurre que

$$e = \sqrt{z_3} e_0 \quad (\leftrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu = \underbrace{\partial_\mu + ie_0 A_{0\mu}}_{D_{0\mu}}).$$

En ese caso tendremos

$$z_1 \equiv z_2 \frac{\sqrt{z_3} e_0}{e} = z_2$$

(y por tanto $\delta z_1 = \delta z_2$), en virtud de lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED,ct}} &= -\frac{1}{4} \delta z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta z_2 \bar{\psi} i \not{\partial} \psi \\ &\quad - \delta m \bar{\psi} \psi - \delta z_1 \bar{\psi} e \not{A} \psi \\ &= -\frac{1}{4} \delta z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} [i \delta z_2 \underbrace{(\not{\partial} + ie \not{A})}_{D_\mu} - \delta m] \psi \end{aligned}$$

será también invariante por sí solo.

Pero debemos tener presente que $\delta z_2, \delta z_3, \delta z_1, \delta m$ quedarán definidos (más adelante) a través de nuestras 4 condiciones de renormalización, por lo que solo después de los cálculos sabremos si $\delta z_1 = \delta z_2$ o no.

A partir de $\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\text{QED,ren}} + \mathcal{L}_{\text{QED,ct}}$, podemos deducir las reglas de Feynman de la expansión perturbativa renormalizada en QED.

Para primero, debemos recordar (pej., de la p. 338) que el operador diferencial $\Delta_x^{\mu\nu}$ que aparece en el término cinético para A_μ ,

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \stackrel{\text{partes}}{=} \frac{1}{2} A_\mu \underbrace{(\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu)}_{\equiv \Delta_x^{\mu\nu}} A_\nu$$

No es invertible, porque $\partial_\nu \theta(x)$ (para cualquier función escalar $\theta(x)$) es una eigenfunción de $\Delta_x^{\mu\nu}$ con eigenvalor cero. Esto es consecuencia de la invariancia de norma y nos impide obtener el propagador del fotón simplemente como $\Delta_{\mu\nu}^{-1}$. Pero conocemos muy bien la solución a este problema: debemos eliminar la redundancia, agregando los

sea en el formalismo canónico o el de integral funcional) al término fijador de norma

$$\mathcal{L}_{\xi} = -\frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 = -\frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{\xi z_3}}_{\equiv \frac{1}{\xi_0}} (\partial \cdot A_0)^2$$

Como vimos en las pp. 357 y 581-82, esto modifica

$$\Delta_x^{\mu\nu} \rightarrow (\Delta_x^{\xi})^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} \partial^2 - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)}_{\uparrow} \partial^\mu \partial^\nu,$$

que sí es invertible:

$$\Delta_{\lambda\nu}^{-1}(x, x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} \underbrace{\left(\frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \right) \left[\eta_{\lambda\nu} - (1-\xi) \frac{p_\lambda p_\nu}{p^2 + i\epsilon} \right]}_{\equiv \tilde{M}_{F_{\lambda\nu}}(p)}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv M_{F_{\lambda\nu}}(x-x')}$$

satisface

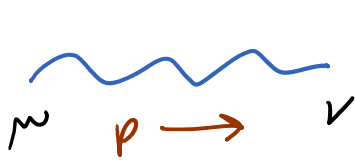
$$(\Delta_x^{\xi})^{\mu\lambda} \Delta_{\lambda\nu}^{-1}(x, x') = i \delta_\nu^\mu \delta^{(4)}(x-x').$$

Tomando esto en cuenta, y el hecho de que

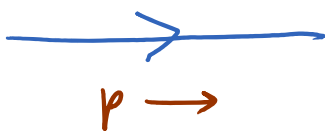
$$-\frac{1}{4} \delta Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \stackrel{\text{partes}}{=} \frac{1}{2} \delta Z_3 A_\mu (\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu,$$

podemos leer las reglas de Feynman en espacio de momentos

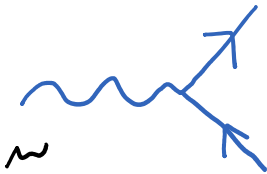
Feynman: $\xi = 1$
Landau: $\xi = 0$



$$= -\frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)$$

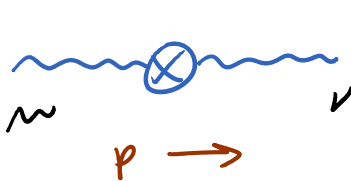


$$= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



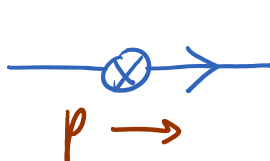
$$= -ie\gamma^\mu$$

← de $\frac{1}{2} \delta Z_3 A_\mu (\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu$



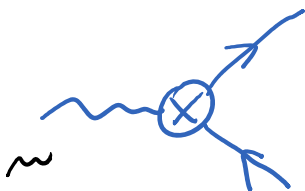
$$= -i \delta Z_3 (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu)$$

← de $\delta Z_2 \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \delta m \bar{\psi} \psi$



$$= i(\delta Z_2 \not{p} - \delta m)$$

← de $-\delta Z_1 \bar{\psi} e A \psi$



$$= -ie \delta Z_1 \gamma^\mu$$

Ahora, dado que el término $-\frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2$ No es invariante de norma (¡justamente por eso lo agregamos!), debemos volver a cuestionarnos si podremos requerir contraterminos asociados a los términos que en nuestro recuento inicial (p. 732) descartamos por invariancia de norma:

$$\bullet \alpha_1 \partial \cdot A \Rightarrow \begin{array}{c} \overset{\omega}{\sim} \\ \rightarrow p \end{array} \otimes = -\alpha_1 p_\omega$$

Este contratermino solo sería necesario si encontramos una divergencia UV en

$$\begin{array}{c} \overset{\omega}{\sim} \\ \rightarrow p \end{array} \textcircled{\text{IP1}}, \text{ pero por conservación de momento}$$

(\leftrightarrow invariancia bajo traslaciones) debemos tener

$p=0$, así que $\sim \otimes$ sería de hecho inútil!

Más nos vale entonces que no exista tal

divergencia. Felizmente, las amplitudes con

un número impar de fotones (y sin fermiones)

se anulan por invariancia bajo conjugación de carga.

(Este es el Teorema de Furry ; el punto es que

$$G: A_\mu(x) \rightarrow -A_\mu(x) \quad \text{para compensar}$$

$$G: J^\mu(x) \rightarrow -J^\mu(x) \quad \text{con } J^\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi .)$$

Y por lo mismo, debemos tener $\alpha_1 = 0$.

$$\bullet \frac{1}{2} \alpha_2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} \alpha_{20} (\partial \cdot A)^2$$

↑ masa para el fotón

$$\alpha_2 = -Z_3 M_0^2$$

↑ renormalización de \int

$$\alpha_{20} = \frac{1}{\int} - \frac{Z_3}{\int_0}$$

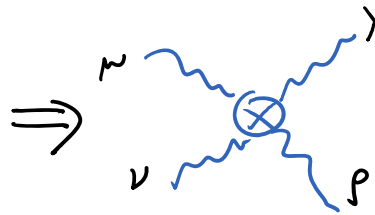
$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \otimes \text{---} \\ \mu \qquad \nu \\ \color{red} p \rightarrow \end{array} = -i\delta Z_3 (\eta_{\mu\nu} P^2 - P_\mu P_\nu) + i\alpha_2 \eta_{\mu\nu} - i\alpha_{20} P_\mu P_\nu$$

No descartar a priori por ninguna simetría.

$$\bullet \frac{1}{2} \alpha_3 \partial \cdot A A^2 \Rightarrow \begin{array}{c} \mu \qquad \nu \\ \color{red} p_1 \rightarrow \quad \left(\otimes \right) \leftarrow \color{red} p_2 \\ \color{red} p_3 \uparrow \\ \lambda \end{array} = -\alpha_3 (\eta_{\mu\nu} P_{3\lambda} + \eta_{\nu\lambda} P_{2\nu} + \eta_{\nu\lambda} P_{1\mu})$$

De nuevo, debemos tener $\alpha_3 = 0$ por G .

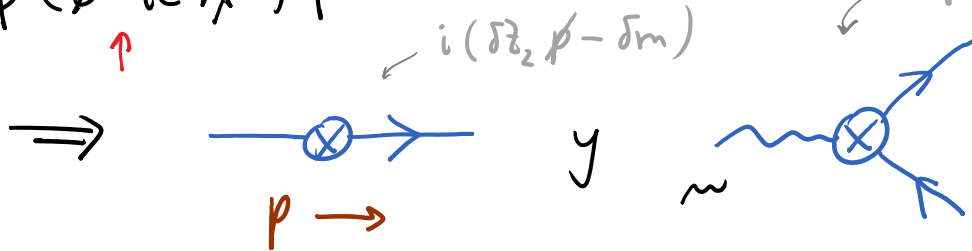
$$\bullet \frac{1}{4} \alpha_4 (A_\mu A^\mu)^2$$

$$\Rightarrow \text{Diagrama} = i \alpha_4 (\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda})$$


No descartado a priori por ninguna simetría.

$$\bullet \alpha_{0,1} \bar{\Psi} (\not{\partial} - ie \not{A}) \Psi$$

← p. 736 teníamos ya $\delta Z_2 \bar{\Psi} (\not{\partial} + ie \not{A}) \Psi$ si $\delta Z_1 = \delta Z_2$

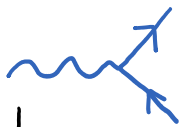
$$\Rightarrow \text{Diagrama 1} \quad \text{y} \quad \text{Diagrama 2}$$


$$\text{con } \delta Z_2 = \delta Z_1 + 2\alpha_{0,1}.$$

Queda entonces la pregunta de si necesitaremos $\alpha_2, \alpha_{20}, \alpha_4$ ó $\alpha_{0,1} \neq 0$. Como veremos, el hecho de que tenemos todavía la invariancia bajo el cambio global de la fase de $\Psi(x)$, que es suficiente para garantizar la conservación de la corriente $J^\mu = e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ y por tanto la validez de las correspondientes identidades de

Ward, bastará para garantizar que $\alpha_2 = \alpha_{20} = \alpha_4 = \alpha_{0,1} = 0$, y por tanto $\delta z_1 = \delta z_2$ y $e = \sqrt{z_2} e_0$, y con ello, la renormalizabilidad de QED.

Esto pudiera parecer inesperado, porque la transformación global $\psi(x) \rightarrow e^{ie\theta} \psi(x)$ no impone a priori ninguna restricción sobre los contra términos en cuestión. El punto, sin embargo, es que en esta teoría abeliana, cada pata externa de fotón debe (en amplitudes IP1) estar atada al vértice donde figura la corriente J^μ , y por tanto está sujeta a la correspondiente identidad de Ward.



En otras palabras, las propiedades de transformación de $\psi(x)$ son relevantes porque las interacciones necesariamente involucran a los fermiones. (En el caso no abeliano esto no es cierto, y la situación se vuelve entonces más complicada.)

L12: 11/03/19

Procedamos ahora a escribir explícitamente nuestras 4 condiciones de renormalización, para definir Z_2, Z_3 , e γ (y en ello a $\delta Z_2, \delta Z_3, \delta Z_1, \delta \gamma$).

Eligiendo un esquema de renormalización físico (es decir, en la capa de nudo), exigiremos que

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama: } \text{---} \rightarrow \text{---} \text{---} \rightarrow \text{---} &\equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle \\
 &= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots \\
 &\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{polo en } p^2 = m^2 \text{ con residuo } 1 \text{ (define } m \text{ y } Z_2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama: } \text{---} \text{---} \text{---} &\equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ A_\mu(x) A_\nu(0) \} | \Omega \rangle \\
 &= \left(\frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \right) \left[\eta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] + \dots \\
 &\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{polo en } p^2 = 0 \text{ con residuo } 1 \text{ (define } Z_3)}
 \end{aligned}$$

Para ser más precisos, debemos notar que, por ser el fotón una partícula NO masiva, el polo que correspondería

es un estado de 1 fotón



No está separado del corte asociado a estados con 2 o más fotones. Y el polo de 1 electrón No está separado del corte asociado a 1 electrón con 1 o más fotones.

L10: 19/01/17

Esto complica la definición de estados asintóticos, y está relacionado con la aparición de divergencias infrarrojas (IR).

Para eludir este problema en los cálculos, podemos darle temporalmente al fotón una pequeña masa m_γ ($\rightarrow 0$ al final).

Conviene reescribir nuestras 3 condiciones en términos de las correspondientes amplitudes irreducibles por

una partícula. Definamos la autoenergía del electrón (una matriz espinorial) como

$$-i\Sigma(p) \equiv \begin{array}{c} \rightarrow \\ \text{IP1} \\ \rightarrow \\ \rightarrow p \end{array}$$

← en notación anterior,
 $\tilde{\Gamma}_{2,0}(p)$

y la autoenergía del fotón (un tensor $(2,0)$) como

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) \equiv \begin{array}{c} \mu \\ \text{IP1} \\ \nu \\ \rightarrow p \end{array}$$

← $\tilde{\Gamma}_{0,2}(p)$

Es fácil mostrar (ver tarea 13) que una identidad de Ward para la corriente $J^\mu \equiv e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ (que expresa el hecho de que $\partial_\mu J^\mu = 0 \Leftrightarrow p_\mu \tilde{J}^\mu = 0$) garantiza que la autoenergía del fotón es "transversal", es decir,

$$p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) = 0$$

Esto es importante, porque en amplitudes de dispersión (donde las patas externas de fotones contribuyen un factor de ϵ_μ) implica que los fotones en polarización longitudinal, $\epsilon_\mu \propto p_\mu$, se desacoplan, como tiene que suceder debido que NO son físicos.

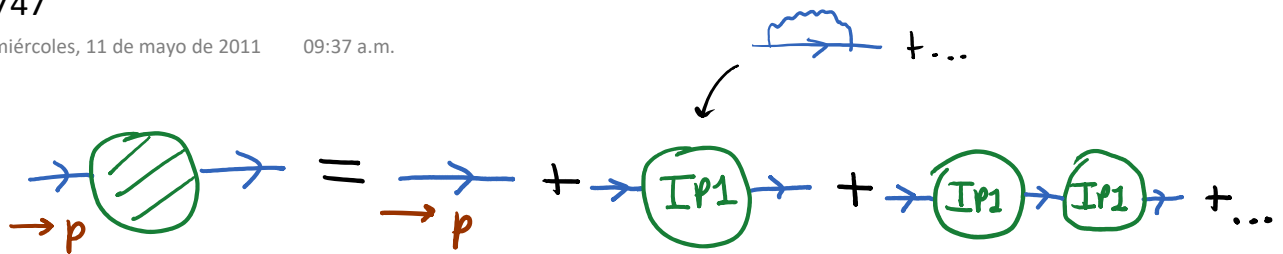
Siendo este el caso, podemos escribir

$$\Pi^{\mu\nu}(p) \equiv (p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Pi(p^2)$$

← los únicos tensores que pueden aparecer en $\Pi^{\mu\nu} \sim \langle \text{tr} A^\mu A^\nu \rangle$ son $\eta^{\mu\nu}$ y $p^\mu p^\nu$

con $\Pi(p^2)$ una función escalar.

En términos de las autoenergías, tenemos



$$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \left\{ 1 + \left[(-i\Sigma(p)) \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \right] + \left[\right]^2 + \dots \right\}$$

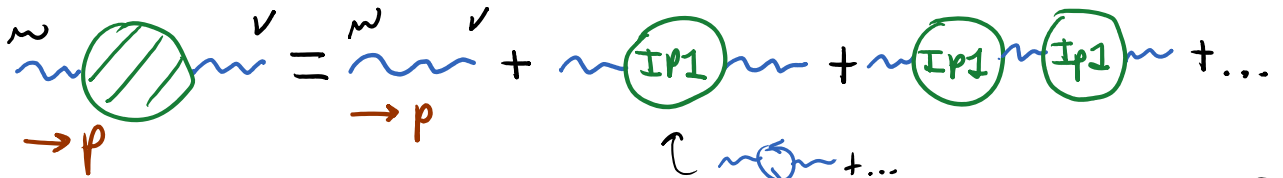
$$= \frac{i}{\not{p} - m} \frac{1}{1 + i\Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m}}$$

Comutan porque $\Sigma = \Sigma(\not{p})$

Σ matriz
espinoiral
SIN indice
vectorial
($\not{p}^2 = p^2$)

$$= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)}$$

Y de manera similar (definiendo $\eta_{\mu\nu}^3(p) \equiv \eta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$),



$$= \frac{-i\eta_{\mu\nu}^3(p)}{p^2} \left\{ \delta_{\nu}^{\lambda} + \left[i\Pi^{\lambda\rho}(p) \frac{(-i\eta_{\rho\nu}^3(p))}{p^2} \right] + \left[\right]^2 + \dots \right\}$$

$$\Pi^{\lambda\rho}(p) \frac{\eta_{\rho\nu}}{p^2}, \quad \text{dado que} \quad \Pi^{\lambda\rho}(p) p_\rho = 0$$

que usando

$$\Pi^{\lambda\rho}(p) \equiv (p^2 \eta^{\lambda\rho} - p^\lambda p^\rho) \Pi(p^2)$$

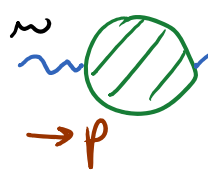
$$\Pi^{\lambda\rho}(p) \frac{\eta_{\rho\nu}}{p^2} = \left(\eta^{\lambda\rho} - \frac{p^\lambda p^\rho}{p^2} \right) \Pi(p^2) \eta_{\rho\nu}$$

$$= \underbrace{\left(\delta^\lambda_\nu - \frac{p^\lambda p_\nu}{p^2} \right)}_{\equiv P^\lambda_\nu(p)} \Pi(p^2)$$

p.348

Matriz de proyección sobre subespacio ortogonal a p^μ : $P^\lambda_\nu(p) P^\nu_\sigma(p) = P^\lambda_\sigma(p)$

equivalente a



$$\underbrace{-i \eta^{\lambda\lambda}(p)}_{\delta^\lambda_\lambda} \underbrace{\left\{ \frac{p^\lambda p_\nu}{p^2} + P^\lambda_\nu(p) + \left[P^\lambda_\nu(p) \Pi(p^2) \right] + \left[\right]^2 + \dots \right\}}_{\substack{P^\lambda_\nu(p) (1 + \Pi(p^2) + \Pi(p^2)^2 + \dots) \\ \frac{1}{1 - \Pi(p^2)}}}$$

$$= -\frac{i}{p^2} \left(P^\lambda_\lambda(p) + \sum \frac{p_\omega p_\lambda}{p^2} \right) \frac{1}{1 - \Pi(p^2)}$$

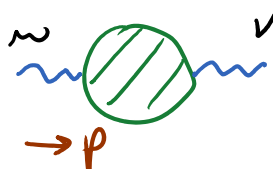
$$\eta^{\lambda\lambda}(p) \equiv \eta_{\lambda\lambda} - (1-\xi) \frac{p_\omega p_\nu}{p^2}$$

$$= -\frac{i}{p^2 (1 - \Pi(p^2))} \left\{ \sum \frac{p_\omega p_\nu}{p^2} (1 - \Pi(p^2)) + P^\lambda_\lambda(p^2) \right\}$$

$$\eta_{\mu\nu}^{\zeta}(p) \equiv \eta_{\mu\nu} - (1-\zeta) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$$

$$\eta_{\mu\nu}^{\zeta}(p) = \zeta \pi(p^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$$

es decir,



$$= \frac{-i \eta_{\mu\nu}^{\zeta}(p) + i \zeta \pi(p^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{p^2 (1 - \pi(p^2))}$$

Notar que el fotón No adquiere masa por correcciones radiativas (polo sigue en $p^2=0$)

perturbativamente No puede haber un segundo polo, porque $\pi \propto e^2$

En este lenguaje, las 3 condiciones de renormalización de la p744 que definen a z_2, z_3 y m (y por tanto también a $\delta z_2, \delta z_3$ y δm) tienen la forma

$\Sigma(p=m) = 0$,	(I)	$\frac{i}{p-m-\Sigma(p)}$
$\left. \frac{d}{dp} \Sigma(p) \right _{p=m} = 0$,	(II)	
$\pi(p^2=0) = 0$.	(III)	$\frac{-i \eta_{\mu\nu}^{\zeta}(p) + i \zeta \pi(p^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{p^2 (1 - \pi(p^2))}$

Nos falta entonces únicamente imponer una condición adicional para definir la carga renormalizada e (y con ello a δz_1).

Recordemos que en la teoría φ^4 definimos el acoplamiento renormalizado directamente a partir de

$$iM(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) = \text{diagrama} \quad \text{a } p_n = 0,$$

que a orden más bajo en la expansión perturbativa se reduce a $\text{diagrama} = -i\lambda$.

En QED es natural también definir la carga renormalizada e a partir de la amplitud de dispersión más sencilla de la teoría,

$$iM(e^- p_1, e^- p_2 \rightarrow e^- p_3, e^- p_4) = \text{diagrama},$$

pero debemos tomar en cuenta que ahora el vértice básico es de 3 (no 4) patas, por lo que la interacción entre los 2 electrones es mediada por el campo electromagnético, y iM contiene por tanto estructura adicional al acoplamiento e :

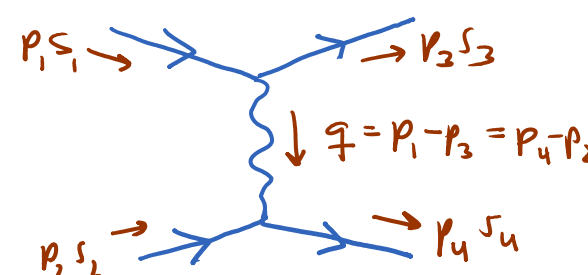
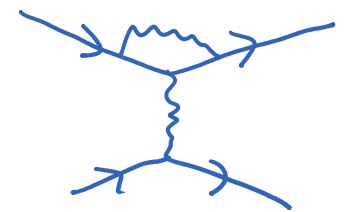
$$iM = \text{diagrama con patas finales cruzadas } + \mathcal{O}(e^4)$$


diagrama con patas finales cruzadas + $\mathcal{O}(e^4)$
 $p_3 s_3 \leftrightarrow p_4 s_4$

$$= \bar{u}_{p_3}^{s_3} (-ie\gamma^\mu) u_{p_1}^{s_1} \left(\frac{-i\eta_{\mu\nu}^{\zeta}}{q^2 + i\epsilon} \right) \bar{u}_{p_4}^{s_4} (-ie\gamma^\nu) u_{p_2}^{s_2} + \dots$$

Recordar (p.479) que, por LSZ, cada pata externa contribuye un factor de $\sqrt{\text{residuo en el polo}}$, pero estamos trabajando con la expansión perturbativa renormalizada en el esquema de la capa de masa, donde, por definición, residuo = 1.

Los términos de orden más alto incluyen nuevos efectos físicos, de 2 tipos principales. En diagramas

como  vemos correcciones al vértice,

es decir, a la manera en que cada electrón se acopla al campo electromagnético, que pueden

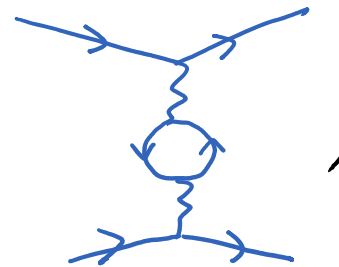
resumirse en el vértice vestido

$$\text{Diagram} \equiv -ie\Gamma^\mu(p', p)$$

← en notación anterior, $\tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu$

incluye

Por otro lado, en diagramas como



veremos correcciones a la propagación del fotón, es decir, al proceso que media la interacción electromagnética, cuyo efecto combinado da el propagador vestido del fotón, que ya discutimos en las pp. 747-749.

Una opción natural es definir el acoplamiento renormalizado e a partir de la amplitud de dispersión para el proceso $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ con transferencia de momento nula, $q=0$,

lo cual corresponde a una separación grande ($\rightarrow \infty$) entre los electrones, mucho mayor que su nube de partículas virtuales. Quitando los factores de patas externas y el propagador del fotón, exigimos entonces que

$$\boxed{-ie \Gamma^\mu(p', p) \Big|_{\not{p}' = \not{p} = m} = -ie \gamma^\mu} \quad (IV)$$

en reposo, o al tomar $\bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p)$ $\Rightarrow \not{q} = \not{p}' - \not{p} = 0$, $p^2 = m^2 = p'^2$
(recordar que $\not{p}^2 = p^2$)

Esta es nuestra última condición de renormalización, que define a e y por tanto a $Z_1 \equiv Z_2 \frac{e_0 \sqrt{Z_3}}{e}$.

13:13/03/19

El siguiente paso en el programa de renormalización es identificar los correladores IP1 que son primitivamente divergentes.

A partir de nuestra fórmula general (p.709),

$$D = D - \sum_c E_c \mathcal{D}_c - \sum_i V_i \mathcal{D}_i,$$

sabemos que el grado de divergencia superficial de

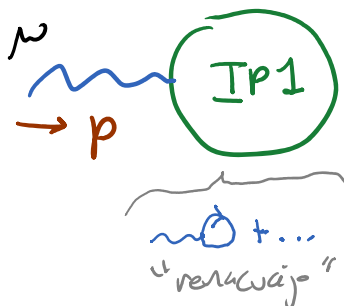
un diagrama con E_ψ patas externas del electrón,
 E_A patas externas del fotón y V de los
 vértices básicos (3 patas) está dado por

$$D = 4 - \frac{3}{2}E_\psi - E_A$$

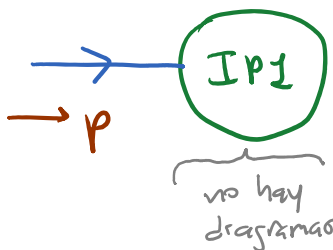
(independiente de $V \leftrightarrow L$, es decir, del orden en la
 expansión perturbativa: e es estrictamente renormalizable).

Los correladores propios primitivamente divergentes
 son entonces:

- $(E_\psi, E_A) = (0, 1) \Rightarrow D = 3$


 $\equiv \langle \Omega | A_\mu(0) | \Omega \rangle_{\text{amputada}}$
 $= 0$ por G y por Lorentz.

- $(E_\psi, E_A) = (1, 0) \Rightarrow D = 5/2$


 $\equiv \langle \Omega | \psi(0) | \Omega \rangle_{\text{amputada}}$
 $= 0$ por Lorentz.

que las divergencias UV en $\Pi(p^2)$ — que son solo logarítmicas, por análisis dimensional — serán absorbidas por δZ_3 en el contra término

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \otimes \text{wavy line} \\ \text{w} \quad \quad \quad \nu \\ \text{p} \rightarrow \end{array} = -i \delta Z_3 \underbrace{(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu)}_{\text{misma estructura tensorial}}$$

por lo que $i\Pi^{\mu\nu}(p)$ será finita. ✓

• $(E_\psi, E_A) = (1, 1) \Rightarrow D = 3/2$

$$\begin{array}{c} \text{arrow} \rightarrow \text{IP1} \text{---} \text{wavy line} \\ \text{w} \end{array} = 0 \text{ por Lorentz} \quad (\text{no hay diagramas})$$

• $(E_\psi, E_A) = (0, 3) \Rightarrow D = 1$

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \text{---} \text{IP1} \text{---} \text{wavy line} \\ \text{w} \quad \quad \quad \nu \\ \text{wavy line} \\ \lambda \end{array} = \text{diagram} + \dots = 0 \text{ por C.}$$

$\llcorner \text{II} = 26/09/17$

• $(E_\psi, E_A) = (2, 0) \Rightarrow D = 1$

$$\begin{array}{c} \text{arrow} \rightarrow \text{IP1} \rightarrow \text{arrow} \\ \text{p} \rightarrow \end{array} \equiv -i \Sigma(\not{p}) \quad \leftarrow$$

autoenergía del electrón

$$-i\Sigma(p) = \text{cloud diagram} + \dots + \text{tadpole diagram}$$

Para deducir la estructura de las divergencias, recordando la p.698 podemos desarrollar en Taylor alrededor de $p=0$,

$$-i\Sigma(p) = -i\Sigma(0) - i \left. \frac{d\Sigma(p)}{dp} \right|_0 p - \frac{i}{2} \left. \frac{d^2\Sigma(p)}{dp^2} \right|_0 p^2 + \dots$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow $p^2 = p^2$
 $D=1$ $D=0$ $D=-1$...

divergentes
finitos

Muestras condiciones de renormalización (I) y (II),

$\Sigma = 0 = \frac{d}{dp} \Sigma$ en $p=m$, claramente asegurará que estas divergencias UV se cancelen con el contratérmino

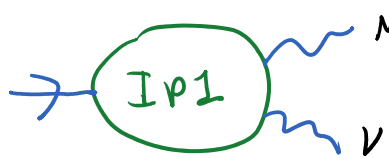
$$p \rightarrow \text{tadpole diagram} = i(\delta\gamma_2 p - \delta m)$$

$\delta\gamma_2$ será logarítmicamente divergente.

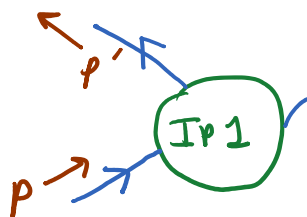
Y, contrario a las apariencias, δm también lo será: NO es posible tener una

divergencia lineal $\delta_m \sim \Lambda$, puesto que la simetría quiral existente cuando $m=0$ obliga a tener $\delta_m \propto m \ln \Lambda$ (para que $m=0 \Rightarrow \delta_m=0$). En cualquier caso, lo importante es que, al final, $-i \Sigma(p)$ será finita. ✓

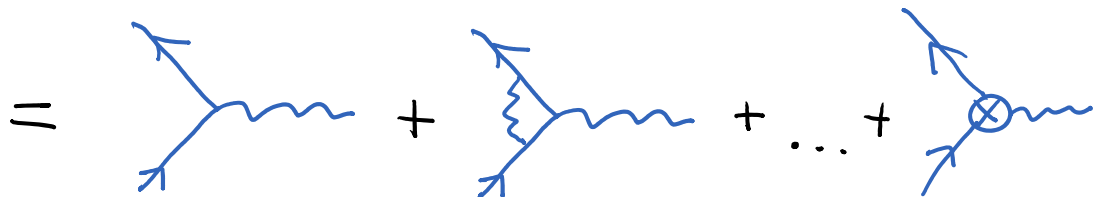
• $(E_\psi, E_A) = (1, 2) \Rightarrow D = 1/2$

 $= 0$ por Lorentz. (no hay diagramas)

• $(E_\psi, E_A) = (2, 1) \Rightarrow D = 0$

 $\equiv -ie \Gamma^\mu(p', p)$

Vértice vestido

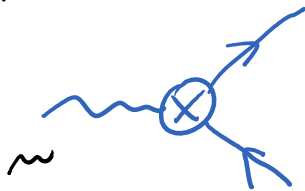
$=$ 

De nuevo, podemos desarrollar en Taylor alrededor de $p' = p = 0$,

$$-ie \Gamma^{\mu\nu}(p', p) = -ie \Gamma^{\mu\nu}(0, 0) - ie \frac{\partial \Gamma^{\mu\nu}}{\partial p^\nu} \Big|_{p=0} p^\nu + \dots$$

\uparrow $D=0$ \uparrow $D=-1$ análogo con p'
 $\propto -ie \gamma^{\mu\nu}$ \downarrow
 porque no hay p, p'

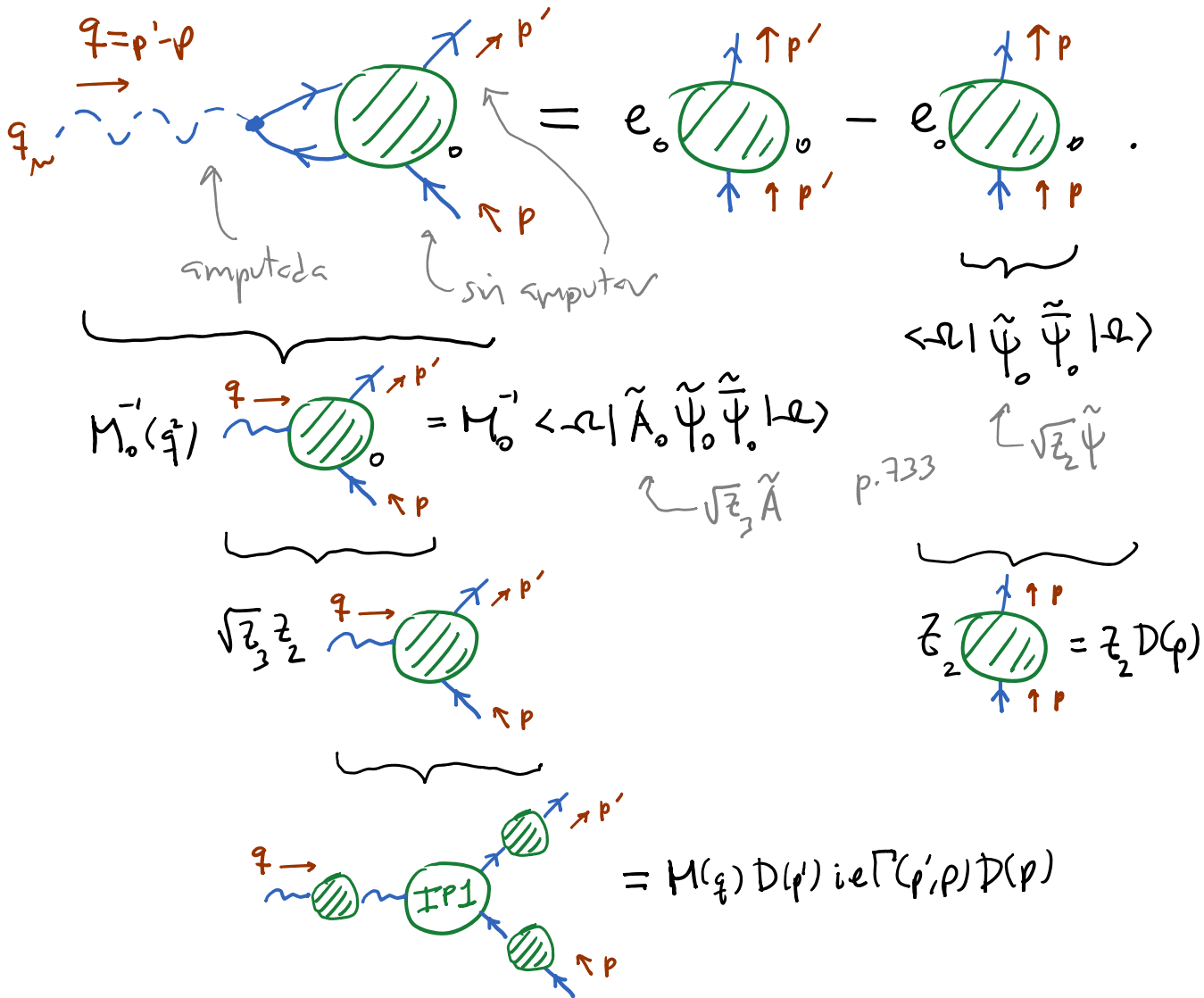
para convencer nos de que la divergencia U ,
 únicamente logarítmica, será absorbida por
 δZ_1 del contratérmino



$$= -ie \delta Z_1 \gamma^{\mu\nu}$$

al imponer nuestra condición de renormali-
 zación (IV), $-ie \Gamma^{\mu\nu} \Big|_{p=p', p^2=m^2} = -ie \gamma^{\mu\nu}$.
 $-ie \Gamma^{\mu\nu}(p', p)$ será entonces finito. ✓

Adicionalmente, recordemos de la p. 636
 la identidad de Ward (-Takahashi) para
 correladores de los campos DESNUDOS:



Cancelando el factor común Z_2 , la identidad RENORMALIZADA es

$$q_\omega \sqrt{Z_3} \frac{M}{M_0} \text{IP1} = \frac{e_0}{Z_1} \frac{e}{Z_2 \sqrt{Z_3}} \left[\left(\text{diagram with } p \right)^{-1} - \left(\text{diagram with } p' \right)^{-1} \right]$$

-i(p - m - \Sigma(p)) (ver p. 747)

es decir,

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{F_{\mu\nu}} \\
 & (p'-p)_{\mu} \frac{z_3 M}{M_0} \cancel{i e} \Gamma^{\mu\nu}(p', p) = i e \frac{z_1}{z_2} \left[(p'-p)_{\mu} \gamma^{\mu\nu} - (\Sigma(p') - \Sigma(p)) \right] \\
 \text{desarrollar} & \quad \underbrace{\quad}_{1+\dots} \quad \Gamma^{\mu\nu}(p, p) + \dots \quad \underbrace{(p'-p) \frac{d\Sigma(p)}{dp}}_{(p'-p)_{\mu} \gamma^{\mu\nu}} + \dots \\
 \text{para } \eta \rightarrow 0: &
 \end{aligned}$$

Iguando los coeficientes de los términos

lineales en $(p'-p)_{\mu}$, esto implica que

$$z_2 \Gamma^{\mu\nu}(p, p) = z_1 \left[\gamma^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} \frac{d\Sigma(p)}{dp} \right],$$

que evaluado en la capa de masa, $p = m$, y

con la ayuda de nuestras condiciones de renormalización (II) y (IV), dice que

$$z_2 \gamma^{\mu\nu} = z_1 \gamma^{\mu\nu} - 0,$$

es decir,

$$p.736 \quad e = \frac{z_2}{z_1} \sqrt{z_3} e_0$$

$$z_1 = z_2$$

\longleftrightarrow

$$e = \sqrt{z_3} e_0,$$

justo como necesitamos para que $\mathcal{L}_{QED, ren}$

sea invariante de norma (ver pp. 735-736).

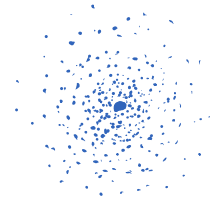
En resumen, hemos visto que la identidad de Ward relaciona al vértice vestido con el propagador vestido del electrón, de modo que ambas estructuras se renormalizan de manera coordinada, y al final del día la renormalización de la carga $e_0 \rightarrow e = \sqrt{Z_3} e_0$ se debe solo a la polarización del vacío ($\delta Z_3 \leftrightarrow \Pi^{uv}$).

Esto se vuelve todavía más importante en una teoría con distintos campos cargados ψ_c con carga respectiva q_c (p.ej., electrón y protón o quarks), porque dada la relación $q_c = \frac{Z_{2c}}{Z_{1c}} \sqrt{Z_3} q_{0c}$,

con Z_{2c} y Z_{1c} diferentes para cada c (dado que involucran muy distintos diagramas), habría tensión entre la invariancia de norma

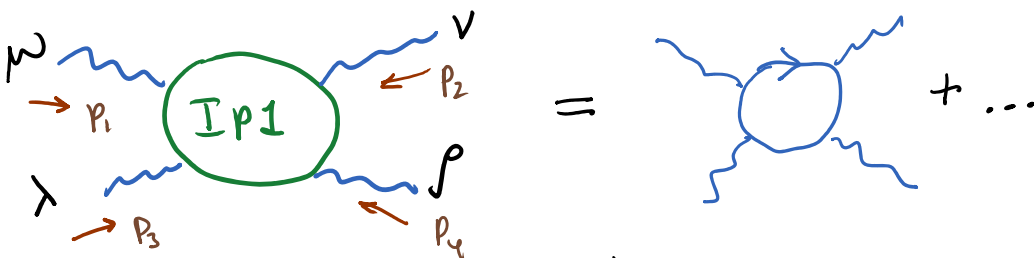
del Lagrangiano desnudo ($\leftrightarrow g_{0c}$) y las relaciones entre las cargas físicas g_c requeridas por conservación de la carga eléctrica (p.ej., en un proceso como $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$) a menos que, como es el caso,

$$Z_{1c} = Z_{2c} \quad \forall c.$$



Volviendo al caso en un solo campo cargado, sabiendo que $Z_1 = Z_2$ aprendemos también que $\alpha_{1,p} = 0$ (ver p. 742).

$$\bullet (E_\psi, E_A) = (0, 4) \Rightarrow D=0$$



De nuevo, podemos desarrollar en Taylor respecto a los momentos externos,

por simetría en intercambio entre las A 's

$$= b \left(\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} + \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda} \right) + \mathcal{O}(p_i)$$

\uparrow constante en $D=0$
 \uparrow $D=-1$

y notar que una identidad de Ward para el correlador de 4 corrientes $\langle J^\mu J^\nu J^\lambda J^\rho \rangle$

(ver tarea 13) requiere que el resultado se anule al contraer con $P_{1\mu}, P_{2\nu}, P_{3\lambda}$ ó $P_{4\rho}$. Esto implica que b no puede ser divergente en el UV.

Aprendemos con esto que $\alpha_4 = 0$, y este era el último de los coeficientes que habían quedado en duda en la p. 742.

En conjunto, hemos mostrado entonces que, gracias a las identidades de Ward que expresan la conservación de la corriente electromagnética, en QED existen únicamente 3 amplitudes propias superficialmente divergentes en el UV, que

↙ por simetría gauge
en el caso de δm

dichas divergencias son todas logarítmicas,
que son absorbidas por los parámetros
 $\delta z_2, \delta z_3$ y δm que aparecen (junto con $\delta z_1 = \delta z_2$)
en los 3 contra términos, y que el lagrangiano
renormalizado $\mathcal{L}_{\text{QED,ren}}$ es invariante de
norma.

Un punto importante es que en la renormalización
logramos eliminar las divergencias ultravioletas;
pero en una teoría con partículas no masivas
como QED, el propagador $\propto 1/p^2$ da lugar
a divergencias infrarrojas (IR). Como ya habíamos
mencionado (p. 745), desde el punto de vista conceptual
el problema es que en presencia de partículas no masivas
se vuelve imposible distinguir estados asintóticos de 1
vs. muchas partículas. Para resolver el problema de las
divergencias IR, debemos nuevamente asegurarnos de
plantearnos preguntas que sean físicamente sensatas.
Los propios detectores experimentales tienen



siempre una resolución energética finita ΔE ,
 y es posible mostrar que cuando se calculan secciones
 eficaces de dispersión que toman este hecho en
 cuenta (incluyendo p.ej. estados finales de 1 electrón
 + un número arbitrario de "fotones suaves", con
 energía total $\leq \Delta E$), las divergencias IR
se cancelan. Esta técnica fue propuesta
 primero por Bloch y Nordsieck — ver p.ej.
 Peskin cap. 6, Srednicki cap. 26, o Weinberg I cap. 13.

Desde el punto de vista práctico, en pasos
 intermedios de los cálculos contemplamos un diagrama
 de Feynman a la vez, así que se vuelve necesario
regularizar de alguna manera las divergencias IR
 para domesticarlas en tanto uno espera su
 cancelación en los cálculos de observables
"seguras en el IR" (inglés: IR safe). Como ya

dijimos, la manera más sencilla de hacer esto es introducir una pequeña masa m_γ para el fotón, y tomar el límite $m_\gamma \rightarrow 0$ únicamente al final del cálculo completo.

12: 28/09/17

El único ingrediente que nos falta para poder hacer cálculos concretos es elegir un esquema de regularización (UV). Hemos enfatizado que nos conviene utilizar un esquema que preserve tantas simetrías de la teoría original como sea posible, por 2 razones:

a) Si violamos alguna simetría al regularizar, no siempre está garantizado que podremos restaurarla al retirar el corte para volver a la teoría original — puede existir una anomalía.

En el caso de la invariancia de norma, esto será un desastre (\Rightarrow p.ej., probabilidades negativas).

b) Aún si es posible restaurar la simetría al retirar el regulador, su violación en etapas intermedias de los cálculos conduce a divergencias adicionales, y a la introducción de más contra términos. Así que nos obliga a trabajar más, de manera innecesaria.

En QED, la pregunta es entonces si existe algún método de regularización que preserve (en particular) Lorentz y la invariancia de norma. NO es el caso para ninguno de los 2 métodos que hemos mencionado hasta ahora: la regularización por retícula viola Lorentz, y la regularización por corte de fuerzas brutas (=abrupto =duro) viola la invariancia de norma. Conceptualmente, la razón es que las transformaciones locales se refieren a cada punto x , e involucran a todos los momentos. Operativamente, la identidad de Ward (p.636) prohíbe cambiar al propagador del electrón sin modificar el vértice.

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

[14: 20/03/19

Dado que las divergencias UV que desearíamos

domesticar provienen de expresiones del tipo

$$\sim \int d^d k_1 \dots d^d k_L \frac{i}{(p+k_1)^2 - m^2} \dots \frac{i}{(p+k_{L-2})^2 - m^2} ,$$

uno tiene básicamente 2 opciones para mejorar el comportamiento UV:

i) Modificar los propagadores para que decrezcan más rápidamente cuando $k_i \rightarrow \infty$.

ii) Modificar la medida de integración para que crezca más lentamente cuando $k_i \rightarrow \infty$.

La opción i) equivale a cambiar los términos cinéticos, p.ej. agregando más derivadas:

$$\varphi(-\partial^2 - m^2)\varphi \rightarrow \varphi \underbrace{K(\partial^2)}_{-\partial^2 - \frac{c_1}{\Lambda^2} \partial^4 - \frac{c_2}{\Lambda^4} \partial^6 + \dots - m^2} \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{i}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{i}{K(-p^2)} = \frac{i}{p^2 - \frac{c_1}{\Lambda^2} p^4 + \frac{c_2}{\Lambda^4} p^6 + \dots - m^2} .$$

El corte de fuerza bruta pertenece a esta categoría, con $K(-p^2)$ proporcional a la función escalón $\Theta(\Lambda^2 - p^2)$. Pero también es posible imponer un

corte "suave", p.ej. con $K(p^2) = -\exp(p^2/\Lambda^2) p^2 - m^2$,

que conduce a

$$\frac{i}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{i e^{-p^2/\Lambda^2}}{p^2 - m^2}.$$

En una teoría de norma, al aplicar este tipo de regularización a campos cargados, por invariancia de norma necesitamos utilizar la derivada covariante D_μ en lugar de ∂_μ . (Es por esta razón que el corte duro NO preserva la invariancia de norma.) Al reemplazar $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, acabáramos agregando también un número (potencialmente infinito) de interacciones (aparentemente) no renormalizables.

Una manera útil de reportar una subclase de

este tipo de modificaciones al propagador es lo que

se conoce como regularización de Pauli-Villars,

donde se reemplaza

$$\frac{i}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{i}{p^2 - m^2} - \sum_{r=1}^R \frac{i c_r}{p^2 - m_r^2},$$

con los coeficientes c_i ajustados para lograr un

comportamiento UV $\sim (p^2)^{-R-1}$. Interpretamos

a los términos añadidos como asociados a nuevos

campos auxiliares conocidos como campos reguladores.

Sus masas m_r funcionan como parámetro de

corte: al tomar $m_r \sim \Lambda \rightarrow \infty$, los nuevos

términos desaparecen. P.ej., con un solo campo

regulador ($R=1$) de masa $M=\Lambda$,

$$\frac{i}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{i}{p^2 - m^2} - \frac{i}{p^2 - \Lambda^2} = \frac{i}{p^2 - m^2} \cdot \frac{m^2 - \Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2}$$

propagador original si $\Lambda \rightarrow \infty$, pero

$\propto (p^2)^{-2}$ si $p \rightarrow \infty$ con Λ fijo

Para que esta modificación figure en todos los diagramas, es necesario que los campos regulados tengan interacciones idénticas al campo original.

Entre las ventajas de este método se cuenta que es físicamente muy intuitivo, que está definido a nivel del Lagrangiano y por tanto es no perturbativo, y que puede implementarse preservando la invariancia de norma abeliana. Como todo en la vida, tiene también desventajas. Dado que algunos $c_r < 0$, los términos cinéticos tienen el signo equivocado (como $A^{n=0}$ - esos campos se denominan "fantasmas") y la teoría regularizada no es unitaria. Si bien es fácil aplicar el método para el fotón [ver p.ej. Peskin cap. 6], en el caso del electrón (o cualquier campo cargado) la implementación es más complicada [ver p.ej.

Bjorken & Drell]. Y lo peor es que no se ha encontrado la manera de utilizar Pauli-Villars en el caso de una teoría no abeliana.

Respecto al tema de los campos cargados, dado que en QED o QCD aparecen cuadráticamente en \mathcal{L} , otra opción es realizar de manera exacta la integral funcional sobre ellas, y regularizar únicamente a nivel de la determinante funcional resultante,

pej. con la regularización de tiempo propio de Schwinger

$$\underbrace{\ln \det \left[\frac{(-D^2 + m^2)}{(-\partial^2 + m^2)} \right]}_{= \text{Tr} \ln} = \text{Tr} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t} \begin{bmatrix} -t(-D^2 + m^2) & -t(-\partial^2 + m^2) \\ e & -e \end{bmatrix} \right\}.$$

↳ reemplazar por $t_0 = \epsilon > 0$

Esto preserva la invariancia de norma abeliana, pero de nuevo, no se generaliza al caso no abeliano.

El único método conocido que es invariante de Lorentz y de norma incluso en el caso

No abdicano es la llamada regularización dimensional.

Este es el método más popular y útil.

Fue inventado por 't Hooft y Veltman, Bollini y Giambiagi, etc., y puede considerarse como (el único) perteneciente a la opción que llamamos ii): en lugar de modificar los propagadores, cambia la definición de la medida de integración $\int d^d k_i$.

Sabemos (p. 727) que el comportamiento UV mejora al disminuir la dimensión espaciotemporal.

La regularización dimensional aprovecha esto, planteando los cálculos en una dimensión d menor a la que nos resulta de interés, normalmente $d < 4$. Lo peculiar de este método es que, para poder eventualmente retirar la regularización, regresando a la

$$\int d^d k_i$$

teoría original, ¡debemos poder variar la dimensión
de manera continua, tomando $d \rightarrow 4_-$, y
considerando ϵ

$$\boxed{\epsilon \equiv 4-d} \quad (\rightarrow 0)$$

como nuestro parámetro de corte!

La regularización dimensional No debe interpretarse como un planteamiento físico en el cual la teoría de campos de alguna manera se define sobre un espaciotiempo de dimensión fractal d , ni nada por el estilo. Se trata de una maniobra formal, mediante la cual básicamente calcularemos las integrales en una dimensión entera d , y luego continuaremos analíticamente el resultado para permitir que d tome valores no enteros. No debemos confundirnos por lo abstracto de esta maniobra: entendamos ya que, al regularizar, lo indispensable es especificar alguna manera de modificar los

fórmulas para domesticar los infinitos, NO que tengamos una interpretación física muy clara de esa modificación.

Más específicamente, definiremos la noción requerida de "integral" en d dimensiones a través de 4 propiedades básicas:

1) Linealidad:

$$\int d^d p [a f(p) + b g(p)] = a \int d^d p f(p) + b \int d^d p g(p).$$

2) Invariancia bajo traslaciones:

$$\int d^d p f(p+q) = \int d^d p f(p) \quad \text{para cualquier } q \text{ fijo.}$$

(Esta es precisamente la propiedad que NO se respeta al modificar los propagadores por medio de un corte — duro o suave — sobre los momentos.)

3) Invariancia bajo rotaciones:

$$\int d^d p f(Rp) = \int d^d p f(p) \quad \text{para cualquier matriz de rotación } R$$

(Estamos pensando en el caso euclideo, después

de hacer una rotación de Wick para tener
 el tiempo y el espacio en el mismo pie. En
 Minkowski estaríamos hablando de invariancia
 bajo Lorentz.)

4) Escalamiento :

$$\int d^d p f(sp) = s^{-d} \int d^d p f(p) \quad \text{para cualquier } s \neq 0.$$

Es posible mostrar que estos 4 requisitos
 definen a $\int d^d p$ de manera única, salvo una
 constante de normalización que puede fijarse
 pidiendo que se satisfaga el resultado habitual
 para una integral gaussiana,

$$5) \int d^d p e^{-p^2} = \pi^{d/2} = \left(\int d p_i e^{-p_i^2} \right)^d$$

[Ver Collins, cap. 4 para una descripción más
 sistemática.]

Es importante notar que, por operar directamente a nivel de las integrales, **la regularización dimensional** es un método intrínsecamente **no perturbativo**. El único método no perturbativo conocido que preserva la invariancia de norma incluso en el caso no abeliano es la regularización por retícula, que como ya hemos dicho, no preserva Lorentz. (Para ciertas teorías no abelianas, la llamada "Correspondencia Holográfica" permite imponer un corte UV no perturbativo que es invariante de norma y de Lorentz.)

En la práctica, después de agrupar denominadores usando parámetros de Feynman (ver p. 667), de ordenar ^{propiedad 2)} la variable de integración $k \rightarrow l$ (p. 668) para obtener un denominador con simetría esférica, y de hacer la notación de Wick habitual $l \rightarrow L$ con $l^0 = iL^4$, $l^{1,2,3} = L^{1,2,3}$ ($\Rightarrow l^2 = l_\mu l^\mu = -L^2$, p. 668), llegamos a una integral como p.ej.

$$\int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{1}{(L^2 + M^2)^2}, \quad \text{(esto es justo lo que obtuvimos en la p. 648 para } \Gamma_4 \text{ en la teoría } \varphi^4)$$

que en $d=4$ diverge logarítmicamente.

Dado que vamos a querer considerar esta integral para distintos valores de d , para no tener problemas de unidades conviene incorporar una escala energética arbitraria μ para formar la combinación

$$I(d, M^2) \equiv \mu^{4-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{1}{(L^2 + M^2)^2},$$

cuya dimensión es la misma (cero) para cualquier d .

Físicamente, μ se puede interpretar como la escala a la cual se definen (en particular) los acoplamientos de la teoría, análogo a la escala arbitraria que en la p. 657 dijimos que figura en la definición de λ en φ^4 . Pej., en QED escribimos

$$e^2 = \mu^{d-4} Z_3 e_0^2, \quad \uparrow$$

para lograr que e sea adimensional $\forall d$. En este

Contexto, llamamos a μ la "escala de renormalización". Veremos esto en más detalle más adelante.

Para aplicar la regularización dimensional, primero aprovechamos la simetría esférica para pasar a coordenadas esféricas, ↖ propiedad 3)

$$I(d, M^2) = \mu^{4-d} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \underbrace{\int_0^\infty dL L^{d-1} \frac{1}{(L^2 + M^2)^2}}_{\text{integral 1-dim ordinaria}},$$

con $\int d\Omega_{d-1} \equiv \Omega_{d-1}$ el volumen de una esfera $(d-1)$ -dimensional. Podemos calcular Ω_{d-1} notando que

$$\begin{aligned} \pi^{d/2} &\stackrel{\text{propiedad 5)}}{=} \int d^d x e^{-x^2} = \int d\Omega_{d-1} \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} \\ &\stackrel{y=x^2}{=} \Omega_{d-1} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}-1} e^{-y}}_{\equiv \Gamma(\frac{d}{2})} \end{aligned} \quad \text{función gamma}$$

($\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$, y $\forall z \in n=0,1,2,\dots$

se tiene $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{n! 2^{2n}} \sqrt{\pi}$)

de donde

$$\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

← Notamos que esta fórmula está bien definida para d no entera

(Podemos verificar que esta fórmula reproduce los

casos conocidos

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi \quad \checkmark, \quad \Omega_2 = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = 4\pi \quad \checkmark,$$

$\leftarrow 0! = 1$
 $\leftarrow \sqrt{\pi}/2$

$$\Omega_3 = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2 \quad \checkmark \quad - \text{ver p. 665} \quad)$$

$\leftarrow 1! = 1$

LF: 25/03/11 (-30 min)

Podemos también procesar la integral radial:

$$\begin{aligned} I(d, M^2) &= \frac{\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \mu^{4-d} \int_0^\infty dL \, L^{d-1} \frac{1}{(L^2 + M^2)^2} \\ &= \frac{\Omega_{d-1}}{2(2\pi)^d} \mu^{4-d} \int_0^\infty d(L^2) \frac{(L^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(L^2 + M^2)^2} \end{aligned}$$

← Ya desde aquí, la integral está bien definida para d no entera: d es solo un parámetro

$$y = \frac{M^2}{L^2 + M^2} = \frac{\Omega_{d-1}}{2(2\pi)^d} \left(\frac{M^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dy y^{1-\frac{d}{2}} (1-y)^{\frac{d}{2}-1}$$

$L^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots$ corresponde a $y = \int_0^1$

Figura aquí la representación integral de la función beta,

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \equiv B(\alpha, \beta),$$

así que tenemos el resultado final

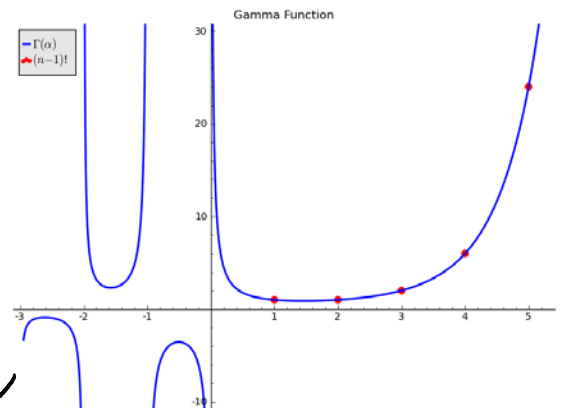
$$I(d, M^2) = \frac{1}{2(2\pi)^d} \frac{\Omega_{d-1}}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{M^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{M^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

$\leftarrow 1! = 1$

$\Gamma(z)$ tiene polos aislados en $z=0, -1, -2, \dots$, así que $I(d, M^2)$ tiene polos en $d=4, 6, 8, \dots$

Para encontrar el valor cerca de 4, en $d=4-\epsilon$, podemos utilizar la relación



$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)$$

cte. de Euler-Mascheroni,
 $\gamma = -\Gamma'(1) = 0.57721566\dots$ ¡NO confundir con γ^m !

(que es consecuencia de la representación de Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

para deducir que $\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{2 - \frac{d}{2}}$ $d=4-\epsilon$

$$I(4-\epsilon, M^2) = \frac{(4\pi)^{\epsilon/2}}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{\epsilon/2}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \underbrace{\left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right)}_{\exp\left(\frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi)\right)} \underbrace{\left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right)}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right].$$



Vemos aquí que lo que hubiere sido una divergencia logarítmica al regularizar con un corte de fuerza bruta, $\sim \ln \Lambda$, aparece en regularización

dimensional simplemente como un polo. \swarrow a L lazos, $\frac{1}{\epsilon^2} + \dots + \frac{1}{\epsilon}$

(Es interesantemente, se puede mostrar que en este método de regularización no aparecen nunca divergencias tipo potencia: cuadráticas, etc.)

Hemos visto que en QED en particular las divergencias UV se absorben al renormalizar, así que polos como el que hemos encontrado aquí se cancelarán con otros que aparecerán en $\delta Z_2, \delta Z_3, \delta Z_1, \delta m$. Exactamente qué parte finita sobra después de restar $\infty - \infty$ está determinado por las condiciones de renormalización utilizadas. Nosotros hemos elegido trabajar en el esquema de la capa de masa, que se abrevia "OS", por las siglas en inglés, pero otra posibilidad muy socorrida al trabajar en regularización

$$\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)$$

dimensional es el esquema de sustracción mínima, abreviado "MS", que consiste en restar exactamente el polo, y nada más. Una tercera opción es el esquema de sustracción mínima modificada, abreviado "MS", que además del polo, resta la constante de Euler-Mascheroni γ y el $\ln(4\pi)$ que frecuentemente lo acompañan. Esto equivale a trabajar con

$$\bar{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\gamma/2} \mu$$

como escala de renormalización en vez de μ .

De manera similar a como procesamos $I(d, M^2)$, se puede mostrar [ver Collins, capítulo 4] que

$$\mu^{2n-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{1}{(L^2 + M^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{n - \frac{d}{2}},$$

$$\mu^{2n-d-2r} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{(L^2)^r}{(L^2 + M^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - r) \Gamma(\frac{d}{2} + r)}{\Gamma(n) \Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{n - \frac{d}{2} - r}.$$

Necesitamos también ser capaces de hacer integrales con estructura tensorial $L^{\mu_1} L^{\mu_2} \dots L^{\mu_n}$ en el numerador. Por invariancia bajo rotaciones (\leftrightarrow Lorentz) ^{← propiedad 3)}, estos integrales dan cero si n es impar, y en el caso par, deben dar un resultado proporcional a

$$(L^2)^{\frac{n}{2}} \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \dots \delta^{\mu_{n-1} \mu_n} + \text{permutaciones} \right).$$

↑ serán $\eta^{\mu_1 \mu_2}$, etc. en Minkowski

Tomando en cuenta que $\delta_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} = d$ ($\leftrightarrow \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = d$) en d dimensiones, podemos entonces simplemente reemplazar

$$L^\mu L^\nu \rightarrow \frac{1}{d} L^2 \delta^{\mu\nu} \quad (l^\mu l^\nu \rightarrow \frac{1}{d} l^2 \eta^{\mu\nu}),$$

$$L^\mu L^\nu L^\rho L^\sigma \rightarrow \frac{1}{d(d+2)} (L^2)^2 (\delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} + \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho}),$$

etc.

El último ingrediente que figura en nuestros diagramas para QED son las matrices de Dirac.

Estas pueden simplemente manipularse de manera formal como un conjunto de d matrices

" 4×4 " que satisfacen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \text{tr}(\mathbb{1}) = 4, \quad \begin{array}{l} \text{definición atada} \\ \text{a } d=4; \text{ para } d=2,3 \\ \text{No tendremos las} \\ \text{verdaderas } \gamma^\mu\text{'s} \end{array}$$

y por tanto (usando $\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\sigma} = d = 4 - \epsilon$, cf. p.502)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = - (2 - \epsilon) \gamma^\nu,$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho} - \epsilon \gamma^\nu \gamma^\rho,$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + \epsilon \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma.$$

Puede ser importante no perder de vista los términos proporcionales a ϵ , que darían una contribución finita al multiplicarse por un polo $\frac{1}{\epsilon}$. Aunque las partes finitas se fijan por los condicionales de renormalización, así que esto sería importante en el esquema MS o $\overline{\text{MS}}$; pero no en el OS.

Estamos listos entonces para proceder a cálculos concretos en QED a un lazo. Examinaremos primero la autoenergía del fotón (= polarización del vacío, pp. 745-749, 755-756),

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) \equiv \text{Diagram with a photon line from } \mu \text{ to } \nu \text{ and a loop labeled } \Pi(1) \text{ in a green circle.} \quad D=2$$

$$= i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \Pi(p^2) \quad \text{por Ward } p_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0 \text{ (Tarea 13)}$$

$$= \text{Diagram with a photon line from } \mu \text{ to } \nu \text{ and a fermion loop} + \text{Diagram with a photon line from } \mu \text{ to } \nu \text{ and a ghost loop} + \mathcal{O}(e^4)$$

$D=0$ contribución a 1 lazo

$$-i\delta Z_3^{(1)} (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu)$$

↑ contribución a 1 lazo

Debemos entonces calcular

$$i\Pi_{1\text{lazo}}^{\mu\nu}(p) \equiv \text{Diagram with a photon line from } \mu \text{ to } \nu \text{ and a fermion loop with momenta } k \text{ and } k+p.$$

$$= (-1)(-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k}+\not{p}-m} \right],$$

↑
por lazo de fermión (pp. 494-5)

↑
+iε sobreentendido

o lo que es lo mismo,

$$(-1)(-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{k-m} \gamma^\nu \frac{i}{k+p-m} \right]$$

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{(k+m)}{k^2-m^2} \gamma^\nu \frac{(k+p+m)}{(k+p)^2-m^2} \right].$$

En el numerador tenemos

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\cancel{\gamma^\mu k} \cancel{\gamma^\nu k} + \cancel{\gamma^\mu k} \cancel{\gamma^\nu p} + \cancel{\gamma^\mu k} \cancel{\gamma^\nu m} + m \cancel{\gamma^\mu} \cancel{\gamma^\nu} k + m \cancel{\gamma^\mu} \cancel{\gamma^\nu} p \right] \\ & \underbrace{k_\rho k_\sigma 4(\eta^{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\nu})}_{p.484} + \underbrace{k_\rho p_\sigma 4(\eta^{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\nu})}_{p.483} \\ & = 4(k^\mu k^\nu - \eta^{\mu\nu} k^2 + k^\mu k^\nu) + 4(k^\mu p^\nu - \eta^{\mu\nu} k \cdot p + p^\mu k^\nu) \end{aligned}$$

$$+ \underbrace{\text{Tr} [m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu]}_{4m^2 \eta^{\mu\nu} \quad p.483}, \quad \text{así que}$$

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = -4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k+p)^\nu + k^\nu (k+p)^\mu - \eta^{\mu\nu} (k \cdot (k+p) - m^2)}{(k^2-m^2)((k+p)^2-m^2)}.$$

A continuación, podemos combinar los denominadores

utilizando un parámetro de Feynman (p.667), $\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)A+xB]^2}$

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k+p)^\nu + k^\nu (k+p)^\mu - \eta^{\mu\nu} (k \cdot (k+p) - m^2)}{\underbrace{[(1-x)(k^2-m^2) + x(k^2+2k \cdot p + p^2-m^2)]^2}_{\underbrace{k^2-m^2 + x(2k \cdot p + p^2)}_{(k+xp)^2 + (x-x^2)p^2 - m^2}}}. \quad p.668$$

Definiendo $l^\mu \equiv k^\mu + xp^\mu$, $M^2 \equiv m^2 + (x^2 - x)p^2$, el denominador combinado es simplemente $[l^2 - M^2]^2$.

Reescribiendo el numerador en términos de l^μ ,

$$\begin{aligned} k^\mu (k+p)^\nu + k^\nu (k+p)^\mu - \eta^{\mu\nu} (k \cdot (k+p) - m^2) &= (l-xp)^\mu (l+(1-x)p)^\nu + \mu \leftrightarrow \nu \\ &\quad - \eta^{\mu\nu} ((l-xp) \cdot (l+(1-x)p) - m^2) \\ &= 2l^\mu l^\nu - \eta^{\mu\nu} l^2 + (1-2x)(l^\mu p^\nu + l^\nu p^\mu - \eta^{\mu\nu} l \cdot p) + 2(x^2-x)p^\mu p^\nu \\ &\quad + \eta^{\mu\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2). \end{aligned}$$

16: 27/03/19

Haciendo el cambio de variable de integración $k^\mu \rightarrow l^\mu = k^\mu + xp^\mu$, y tomando en cuenta que la región de integración es simétrica bajo $l^\mu \rightarrow -l^\mu$, de modo que

$$\int d^4 l l^\mu f_{\text{par}}(l) = 0,$$

obtenemos

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2l^\mu l^\nu - \eta^{\mu\nu} l^2 + 2(x^2-x)p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2)}{[l^2 - M^2]^2}.$$

Si hacemos ahora la rotación de Wick $l^0 = iL^0$, $\vec{l} = \vec{L}$ ($\Rightarrow l^2 = -L^2$),

llegamos a

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = -4i e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{2i \delta_0^\mu \delta_0^\nu + \eta^{\mu\nu} L^2 + 2(x^2-x) p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2)}{[L^2 + M^2]^2}.$$

$\swarrow \equiv i \delta_0^\mu \delta_0^\nu$
 \swarrow No rotamos p^μ

Podemos ver aquí que si regularizamos con un corte abrupto $L^2 < \Lambda^2$, entonces la contribución dominante es una divergencia cuadrática,

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) \propto e^2 \Lambda^2 \eta^{\mu\nu},$$

que no respeta la identidad de Ward ($p_\mu \Pi^{\mu\nu} \neq 0$), y no puede cancelarse con el controtérmino

$$\text{wavy line with } \otimes_1 = -i \delta_{3,2}^{\text{adimensional}} (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu).$$

Es decir, un corte de fuerza bruta viola la simetría $U(1)$ global \leftrightarrow conservación de la corriente \leftrightarrow invariancia de norma, tal como habíamos prometido/argumentado (pp. 768, 770).

Sabemos ya que podemos evitar esta dificultad utilizando la regularización dimensional, así que tomamos $d=4 \rightarrow d=4-\epsilon$, con $e^2 \rightarrow e^2 \mu^{4-d}$ para que e^2 siga siendo adimensional para todo d (p. 779), y procesamos por separado las integrales con/sin dependencia cuadrática de L^μ en el numerador. Con L^2 tenemos

$$e^2 \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{2i \delta^{\omega\nu} L^\omega L^\nu + \eta^{\omega\nu} L^2}{[L^2 + M^2]^2} \rightarrow e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{2i \delta^{\omega\nu} L^\omega L^\nu + \eta^{\omega\nu} L^2}{[L^2 + M^2]^2}$$

unidades de masa² y d

$$\stackrel{\text{p.786}}{=} e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{\frac{2}{d} \delta^{\omega\nu} L^2 + \eta^{\omega\nu} L^2}{[L^2 + M^2]^2}$$

$$i \delta_0^\omega + \delta_0^\nu \delta^{\omega\nu} = -\eta^{\omega\nu} \rightarrow e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{(-\frac{2}{d} + 1) \eta^{\omega\nu} L^2}{[L^2 + M^2]^2}$$

$$\stackrel{\text{p.785}}{=} e^2 \mu^2 (-\frac{2}{d} + 1) \eta^{\omega\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{1-\frac{d}{2}}$$

$$= e^2 \eta^{\omega\nu} \frac{(-1)}{(4\pi)^{d/2}} \underbrace{\Gamma(2-\frac{d}{2})}_{\text{p.780}} \underbrace{\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}}_{m^2 + (x^2-x)p^2 \text{ p.790}} M^2$$

1! = 1

Por otra parte, la integral sin L^2 en el numerador es

$$e^2 \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{2(x^2-x) p^\omega p^\nu + \eta^{\omega\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2)}{[L^2 + M^2]^2} \rightarrow e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{2(x^2-x) p^\omega p^\nu + \eta^{\omega\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2)}{[L^2 + M^2]^2}$$

masa² y d

$$\stackrel{\text{p.785}}{=} e^2 [2(x^2-x) p^\omega p^\nu + \eta^{\omega\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2)] \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

1! = 1

Sumando estos 2 resultados tenemos de la primera integral

$$\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \left[-\eta^{\mu\nu} (m^2 + (x^2-x)p^2) + 2(x^2-x)p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2) \right]$$

$$\underbrace{-2(x^2-x) (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu)}$$

dependencia esperada para que $p_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$

↔ la identidad de Ward se respeta ✓

Recuperando el factor de $-4i \int_0^1 dx$ que habíamos dejado de lado, llegamos a

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) 8e^2 \int_0^1 dx (x^2-x) \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}}$$

↖ $d=4-\epsilon$

↙ $m^2 + (x^2-x)p^2$ p.790

$$\underbrace{\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}_{\left| + \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right) + \dots \right.}$$

$$\underbrace{\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots}_{\text{p.783}}$$

$$\underbrace{\frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right) - \gamma + \dots}$$

es decir,

polo: divergencia logarítmica
 $\sim \ln \Lambda$ (NO cuadrática)

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x^2 - x) \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2 + (x^2 - x)p^2}{4\pi\bar{\mu}^2}\right) - \gamma \right].$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-\ln\left(\frac{m^2 + (x^2 - x)p^2}{\bar{\mu}^2}\right) \text{ p.785}}$

A este orden, podemos concluir entonces que

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = \text{diagrama} + \text{diagrama} + \mathcal{O}(e^4)$$

$$= i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) - i\delta Z_3^{(1)}(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) + \mathcal{O}(e^4)$$

$$= i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \Pi(p^2)$$

con

$$\Pi(p^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x^2 - x) \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2 + (x^2 - x)p^2}{4\pi\bar{\mu}^2}\right) - \gamma \right] - \delta Z_3^{(1)}.$$

Tal como mencionamos en la p.785, en el esquema de renormalización \overline{MS} (sustracción mínima), elegiríamos $\delta Z_3^{(1)}$ para cancelar al más ni menos que el polo $\frac{2}{\epsilon}$; mientras que en el esquema \overline{MS} (sustracción mínima modificada), cancelaríamos además el $-\gamma + \ln(4\pi)$. Pero nosotros aquí hemos elegido trabajar en el esquema OS (en la caps

de masa), donde exigimos que se cumple la condición (III) de la p.749,

$$0 = \Pi(0) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x^2-x) \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2 + (x^2-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right) - \gamma \right] - \delta Z_3^{(1)}$$

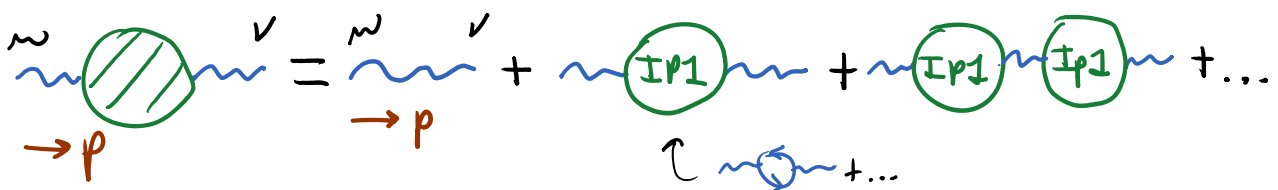
$$\Rightarrow \delta Z_3^{(1)} = \frac{e^2}{2\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) - \gamma \right] \underbrace{\int_0^1 dx (x^2-x)}_{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}}$$

Así que nuestro resultado para la autoenergía del fotón (= polarización del vacío) se reduce a

$$\Pi(p^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x-x^2) \ln\left(1 - (x-x^2) \frac{p^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}(e^4),$$

que es finito, como esperábamos. ✓

Podemos ahora extraer algunas consecuencias físicas de nuestro resultado. Sabemos de las pp. 747-749 que la autoenergía corrige el propagador completo del fotón de acuerdo con



$$\begin{array}{c} \text{w} \\ \text{w} \end{array} \begin{array}{c} \text{v} \\ \text{v} \end{array} = \frac{-i \eta_{\mu\nu}^{\xi}(p) + i \xi \pi(p^2) \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p^2}}{p^2 (1 - \pi(p^2))} \cdot$$

con ξ un parámetro arbitrario (multiplicador de Lagrange)

El hecho de que el polo se mantenga en $p^2=0$ indica que (si preservamos la identidad de Ward \leftrightarrow conservación de la corriente) el fotón NO adquiere masa por correcciones cuánticas.

Sabemos además (pp. 352, 582) que por invariancia de norma (\leftrightarrow conservación de corriente), $A_{\mu}(x) \simeq A_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \Theta(x)$ ó $\tilde{A}_{\mu}(p) \simeq \tilde{A}_{\mu}(p) - i p_{\mu} \tilde{\Theta}(p)$, los términos en el propagador del fotón que son proporcionales a p^{μ} o p^{ν} son físicamente irrelevantes (de donde se sigue en particular que cualquier valor de ξ conduce a los mismos resultados físicos), así que por simplicidad podemos quedarnos solo con

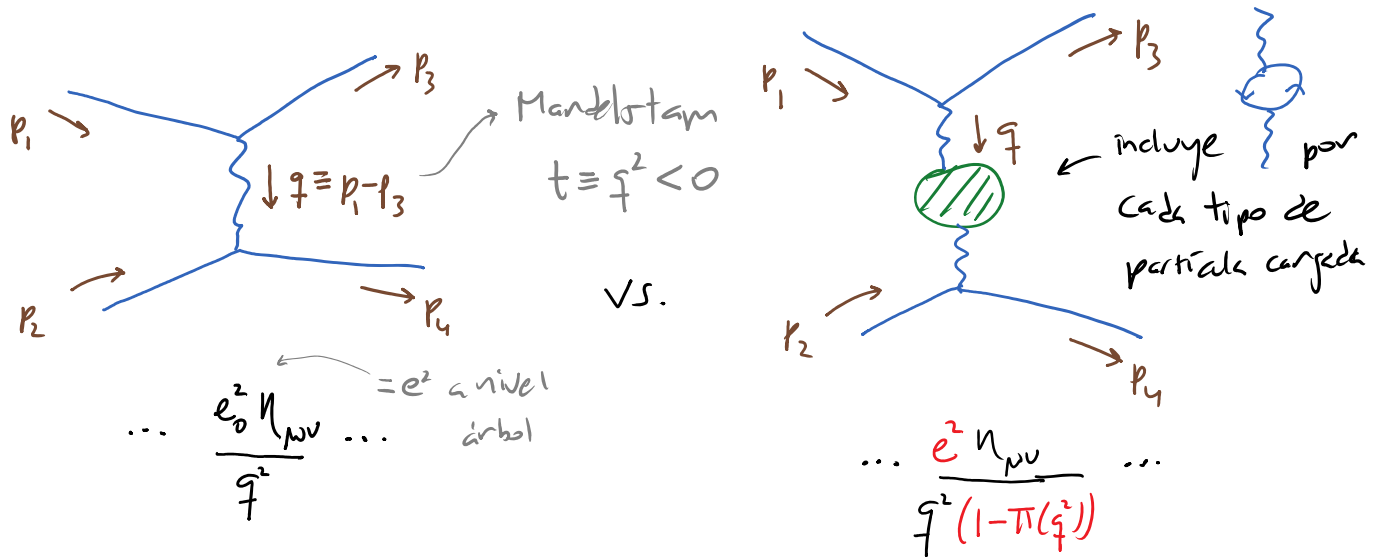
$$\begin{array}{c} \text{w} \\ \text{w} \end{array} \begin{array}{c} \text{v} \\ \text{v} \end{array} = \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{p^2 (1 - \pi(p^2))} \cdot$$

$\pi^{(1)}(p^2) + \mathcal{O}(e^4)$

L14: 10/10/17

Consideremos ahora un proceso de dispersión de 2 partículas cargadas, comparando el resultado a nivel árbol contra el resultado tomando en cuenta las correcciones debidas a k

autoenergía del fotón, e ignorando por ahora las correcciones al vértice, que dependen del tipo específico de partícula cargada (podríamos incluso hablar de 2 fuentes clásicas):



Un primer efecto físico de $\pi(q^2)$, visible ya en el límite de baja transferencia de momento $q^2 \rightarrow 0$ (\leftrightarrow alto parámetro de impacto $r \rightarrow \infty$), es el reescalamiento que conecta al acoplamiento (o carga eléctrica) desnudo(a) e_0 con su contraparte renormalizado(a) e , que ya desde las pp. 734, 736 tenemos identificado como

$$e = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} e_0 = \sqrt{Z_3} e_0, \quad \text{Ward p. 761}$$

donde ahora sabemos (pp. 795) que

$$Z_3 = 1 + \delta Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) - \gamma \right] + \mathcal{O}(e^4).$$

Por definición, e es el acoplamiento/carga físicamente medible a gran distancia del electrón (o protón, etc.), tal que

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.0359991\dots} = 7.297352568 \times 10^{-3}$$

(y fue para asegurarnos de esto que exigimos que

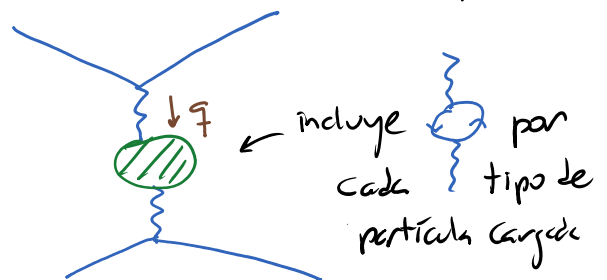
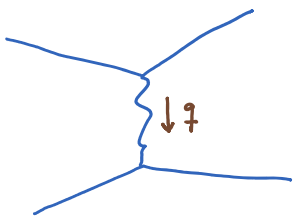
$\Pi(0)=0$). Lo que hubiera sido la carga de la partícula desnuda, en

cambio, es logarítmicamente divergente, $e_0 = \frac{e}{\sqrt{Z_3}} \propto \frac{1}{\epsilon} \sim \ln \Lambda$.

Este rescalamiento de la carga no es directamente observable.

Un segundo efecto de usar el propagador completo es que $\Pi(q^2)$ depende no trivialmente de q^2 , lo cual puede interpretarse como una carga dependiente de la transferencia de momento q^2 , o lo que es lo mismo, del parámetro de impacto r :

$$\alpha_0 \equiv \frac{e_0^2}{4\pi} \rightarrow \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} \text{ a } q^2=0 \rightarrow \alpha_{ef}(q^2) \equiv \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{1-\Pi(q^2)}$$



En el límite no relativista, tiene sentido describir el proceso de dispersión en términos de la interacción entre los 2 objetos cargados a través de un potencial $V(r)$. De la Tarea 5, sabemos que

$V(r)$ se obtiene esencialmente haciendo una transformada de Fourier espacial del propagador del fotón. Si solo tomamos en cuenta el diagrama a nivel árbol, el resultado es por supuesto el potencial de Coulomb,

$$V(r) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^2}{-\vec{q}^2} = -\frac{e^2}{4\pi r} = -\frac{\alpha}{r}$$

$\vec{q}^2 = p_1^2 - p_3^2 \approx m^2 - m^2 = 0$ $r = |\vec{r}|$
 en el límite no relativista

el signo por supuesto depende de los signos de las cargas de las 2 partículas

Si incluimos las correcciones debidas a la autoenergía del fotón,

$$V(r) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^2}{-\vec{q}^2} \frac{1}{(1 - \Pi(-\vec{q}^2))} \approx \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^2}{-\vec{q}^2} (1 + \Pi(-\vec{q}^2)).$$

\uparrow p. 795 $\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x-x^2) \ln(1 + (x-x^2) \frac{\vec{q}^2}{m^2}) + \mathcal{O}(e^4)$

Considerando $\frac{\vec{q}^2}{m^2} \ll 1$ ($\Leftrightarrow r \gg 1/m$), y reteniendo solo la primera corrección, $\ln(1 + (x-x^2) \frac{\vec{q}^2}{m^2}) \approx (x-x^2) \frac{\vec{q}^2}{m^2}$,

$$V(r) \approx \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^2}{-\vec{q}^2} \left(1 + \underbrace{\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x-x^2)^2 \frac{\vec{q}^2}{m^2}}_{1/30} \right)$$

$$= \frac{-e^2}{4\pi r} - \frac{e^4}{60\pi^2 m^2} \delta^{(3)}(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\vec{r}).$$

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$

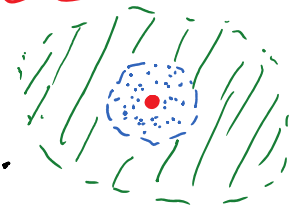
\uparrow esto es solo una aproximación de fuerza suave concentrada en $r \lesssim 1/m$

Esta corrección indica que la interacción electromagnética se vuelve más intensa a distancias pequeñas, y produce un corrimiento medible en los niveles de energía del átomo de hidrógeno:

$$\Delta E = \int d^3r |\psi(\vec{r})|^2 \left(-\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\vec{r}) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2$$

\swarrow función de onda del electrón \searrow aproximación aquí se refiere a $|\psi(r)|^2$ en $r \leq 1/m$
 \nwarrow masa del electrón

La aproximación $\vec{q}^2 \ll m^2$ ($\leftrightarrow r \gg 1/m$) que estamos utilizando, donde $\Delta V(r) \propto \delta^{(3)}(\vec{r})$, es válida para este propósito porque la función de onda $\psi(\vec{r})$ está espaciada en una región del orden del radio de Bohr, $a_B \equiv \frac{1}{\alpha m} \sim 5 \times 10^{-11} \text{ m}$, ^{metros} que es mucho más grande que $\lambda_c \equiv \frac{1}{m} \sim 4 \times 10^{-13} \text{ m}$, la longitud de onda de Compton del electrón (\leftrightarrow tamaño de nube virtual), a su vez mucho mayor que el radio del protón $R \sim 10^{-15} \text{ m}$.



Para un estado con momento angular orbital l , $\psi(\vec{r}) \propto r^l$, así que $\psi(0) \neq 0$ solo para los estados de onda s , $l=0$. En el caso del estado $2s$, se tiene $|\psi(0)|^2 = \frac{\alpha^3 m^3}{8\pi}$,

y por tanto

$$\Delta E = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \left(\frac{\alpha^3 m^3}{8\pi} \right) = -1.12 \times 10^{-7} \text{ eV} \leftrightarrow \Delta \nu = \frac{\Delta E}{2\pi} = -37.1 \text{ MHz}$$

\uparrow corrimiento en frecuencia

Esta es una pequeña contribución al famoso "corrimiento de Lamb" entre los niveles $2s$ ($l=0$) y $2p$ ($l=1$) del átomo de hidrógeno, que en total es de $+1058$ MHz.

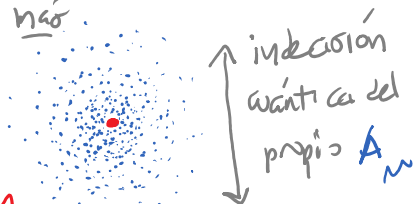
La forma $\Delta V(r) \propto \delta^{(3)}(\vec{r})$ es solo una aproximación; con un mejor tratamiento de nuestro resultado [ver p.ej. Perkin 7.5, o Weinberg I 11.2] se obtiene

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} - \underbrace{\frac{\alpha^2}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}}_{\text{Potencial de Uehling}} + \dots \quad \text{para } r \gg 1/m$$

Nota que, si hay más de un tipo de partícula cargada, las de menor masa contribuyen más.

Aquí vamos ya más explícitamente que la

polarización del vacío convierte a la partícula en



un objeto no puntual, una distribución de carga con radio $\sim 1/m$.

LI7: 01/04/19

Si consideramos el límite opuesto, con muy alta transferencia de momento, $-q^2 \gg m^2$ \leftrightarrow parámetro de impacto muy

pequeño, $r \ll 1/m$, NO podemos describir el proceso de dispersión en términos de un potencial no relativista, pero sí podemos examinar directamente el comportamiento del

acoplamiento / carga efectiva \leftrightarrow constante de estructura fina

efectiva de la p. 798,

$$\alpha_{ef}(q^2) \equiv \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{1-\pi(q^2)}$$

interacción
entre cargas
va como $\frac{\alpha_{ef}(q^2)}{q^2}$

$$\underbrace{\alpha}_{\substack{\text{p. 795} \\ \frac{2\alpha}{\pi}}} \underbrace{\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x-x^2) \ln(1-(x-x^2) \frac{q^2}{m^2}) + \mathcal{O}(e^4)}_{\ln(-\frac{q^2}{m^2}) + \ln(x-x^2) + \mathcal{O}(\frac{m^2}{q^2})}$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ \underbrace{\int_0^1 dx (x-x^2) \ln(-\frac{q^2}{m^2})}_{1/6} + \underbrace{\int_0^1 dx (x-x^2) \ln(x-x^2)}_{\left[-\frac{x}{6} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^3}{9} - \frac{1}{6} \ln(1-x) + \frac{x^2}{2} \ln(x-x^2) - \frac{x^3}{3} \ln(x-x^2) \right]_0^1} \right\}$$

$$= -5/18$$

$$= \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \underbrace{\ln(-\frac{q^2}{m^2}) - 5/3}_{\ln\left(\frac{-q^2}{\exp(5/3)m^2}\right)} + \mathcal{O}(m^2/q^2) \right\}$$

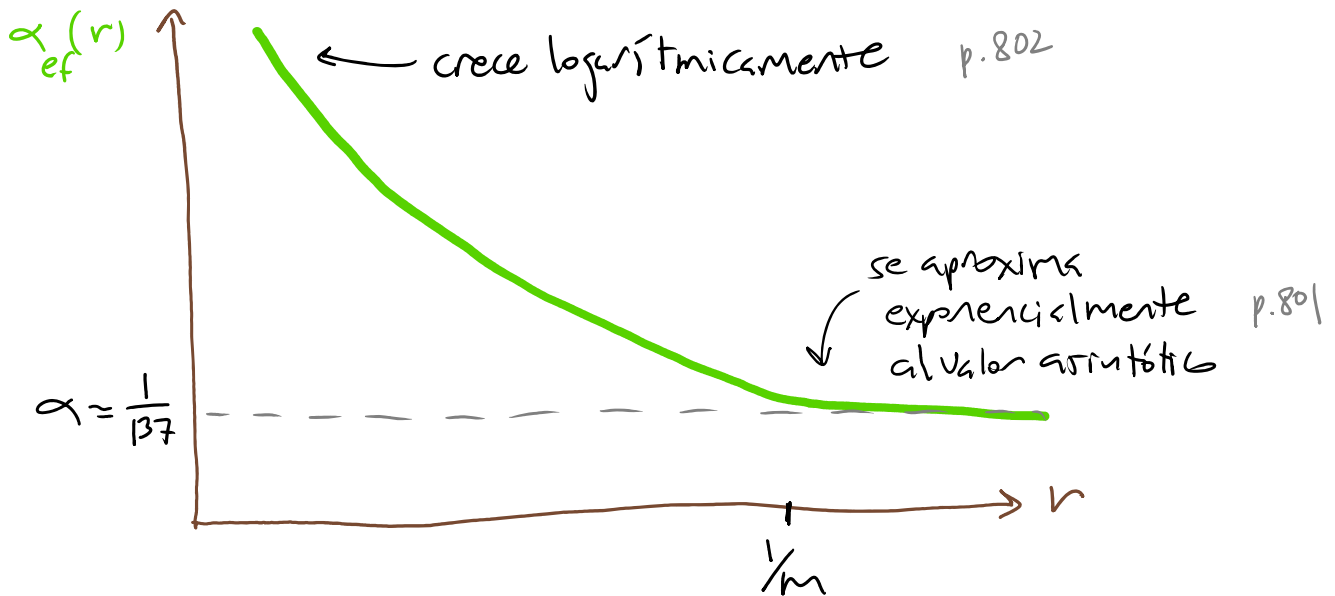
es decir,

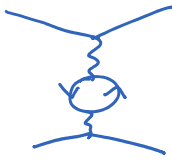
$$\alpha_{ef}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\exp(5/3)m^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \alpha \frac{m^2}{q^2})} \simeq \alpha + \underbrace{\frac{\alpha^2}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\exp(5/3)m^2}\right)}_{> 0}$$

OJO: esto debe ser $\ll \alpha$
para que la expansión
perturbativa sea válida

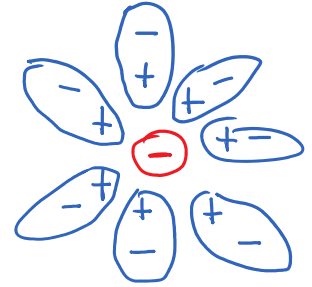
La constante de acoplamiento crece logaritmicamente cuando

$|f^2|$ aumenta $\leftrightarrow r$ decrece. Si estimamos $f \sim 1/r$,
 y combinamos con lo que aprendimos antes para
 distancias grandes, el comportamiento cualitativo del
 acoplamiento/carga efectiva de nuestra partícula es:



La interpretación física de este comportamiento está
 implícita en el diagrama que calculamos, :
 el campo electromagnético (\leftrightarrow fotón) producido
 por la partícula ^{no necesariamente un electrón} puede crear pares e^-e^+ del vacío. Es decir,
 el vacío se comporta como un medio dieléctrico, que se
polariza en presencia de la partícula desnuda, y la apantalla.

Los pares e^+e^- producidos son dipolos, cuyo extremo positivo/negativo naturalmente se ve atraído/repelido por la carga desnuda.



Crear un par e^+e^- tiene un costo energético $\sim m$, así que (por el principio de incertidumbre) es solo cuando nos acercamos a distancias $r \lesssim 1/m$ que este efecto de polarización del vacío se vuelve apreciable. Y la consecuencia es que, conforme penetramos en la nube de partículas virtuales que rodea a la partícula, vemos más y más a la partícula desnuda, sin apantallamiento, y es por ello que su carga aumenta progresivamente. Desde esta perspectiva, la carga desnuda e_0 es literalmente la carga de la partícula pelona, sin su nube. Y en efecto, podemos ver que

$$\alpha_{\text{ef}}(r \sim \frac{1}{\Lambda}) \underset{\text{p.802}}{\sim} \frac{\alpha}{1 - \alpha \ln \Lambda} \underset{\text{p.795}}{\sim} \frac{\alpha}{Z_3} \underset{\text{p.797}}{=} \alpha_0 \quad \checkmark$$

Parlemos ahora a la autoenergía del electrón (p.757),

$$-i\Sigma(p) = \underbrace{\text{diagrama 1}}_{\equiv -i\Sigma_{1kz_0}(p)} + \underbrace{\text{diagrama 2}}_{i(\delta z_2^{(1)} p - \delta m^{(1)})} + \mathcal{O}(e^4).$$

Siguiendo por analogías a las que usamos para $\Pi^{\mu\nu}(p)$,
puede mostrarse (Tarea 14 que

$$-i\Sigma_{1kz_0}(p) = \frac{-ie^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\overset{\text{Feynman}}{\Gamma(2-d/2)}}{[(1-x)m^2 + xm_f^2 - x(1-x)p^2]^{2-d/2}} \underbrace{(d \cdot m - (d-2)xp)}_{\text{usando } \gamma^\mu \text{ en } d \text{ dim}}$$

masa ficticia de fotón para divergencia IR ↑ *polo $\frac{2}{\epsilon}$ en $d=4-\epsilon$: divergencia logarítmica*

Usando nuestros condiciones de renormalización (I) y (II)
(p.749), $\Sigma=0 = d\Sigma/2p$ en $p=m$, esto implica que

$$m\delta z_2^{(1)} - \delta m^{(1)} = \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-d/2)}{[(1-x)^2 m^2 + xm_f^2]^{2-d/2}} (d(1-x) + 2x),$$


$$\delta z_2^{(1)} = \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-d/2)}{[(1-x)^2 m^2 + xm_f^2]^{2-d/2}} \left[-(d-2)x + (2-\frac{d}{2}) \frac{2x(1-x)m^2}{(1-x)^2 m^2 + xm_f^2} (d(1-x) + 2x) \right],$$

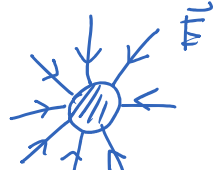
con lo cual $-i\Sigma(p)$ es finito a este orden. ✓

Vemos que tanto δm como δz_2 son logarítmicamente divergentes, $\propto \Gamma(2-\frac{d}{2}) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} \sim \ln \Lambda$. Y en particular, $\delta m \sim e^2 m \ln \Lambda$, tal como habíamos anticipado en la p. 758, de modo que $\delta m = 0$ si $m = 0$. Podemos notar que esto es muy diferente al caso del campo escalar que vimos en la p. 665, $\delta m^2 \sim \Lambda^2$. Es decir, el paso de masa desnuda a masa física es drásticamente distinto en ambos casos (ver pp. 649, 734):

escalar $m_0^2 = \frac{m^2 + \delta m^2}{z} \sim m^2 + \Lambda^2$ vs. espinoz $m_0 = \frac{m + \delta m}{z_2} \sim m + m \ln \Lambda$.

Es por esta diferencia que lo que nos preocupa en el "problema de jerarquía" del Modelo Estándar (¿con $\Lambda \sim m_{\text{Planck}} \sim 10^{19}$ GeV?) es la masa del Higgs ($m \sim 10^2$ GeV), no la de los fermiones (ni la de los bosones de norma).

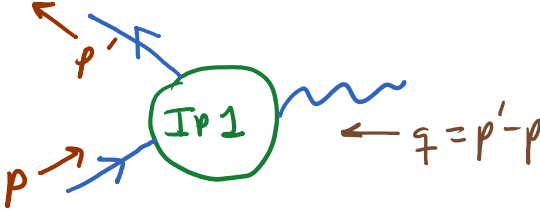
En QED, la diferencia que hemos calculado entre m_0 y m se debe al diagrama , es decir, al hecho de que el electrón puede sentir el campo electromagnético que él mismo genera.

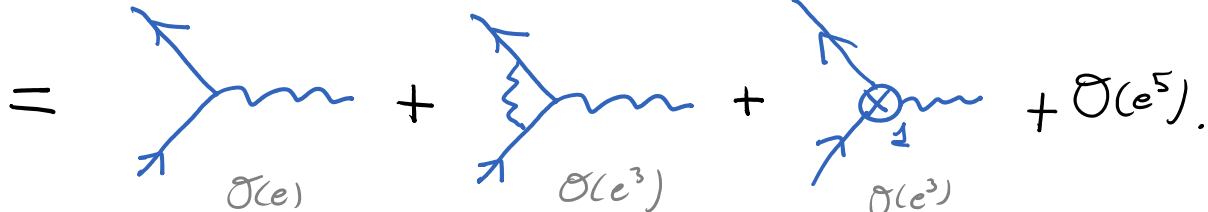
Esta autointeracción existe incluso en el caso clásico: si modelamos al electrón como una esfera cargada de radio $r_A \sim 1/\Lambda$, su energía electrostática es $E \sim e^2/r_A \sim e^2 \Lambda$, y contribuye .

vs. resultado cuántico $e^2 m \ln \Lambda \ll e^2 \Lambda$


entonces $\delta m = E \sim e^2 \Lambda$ a la masa física $m = m_0 + \delta m$.

Solo por resta analizan el vértice vestido (p.758)

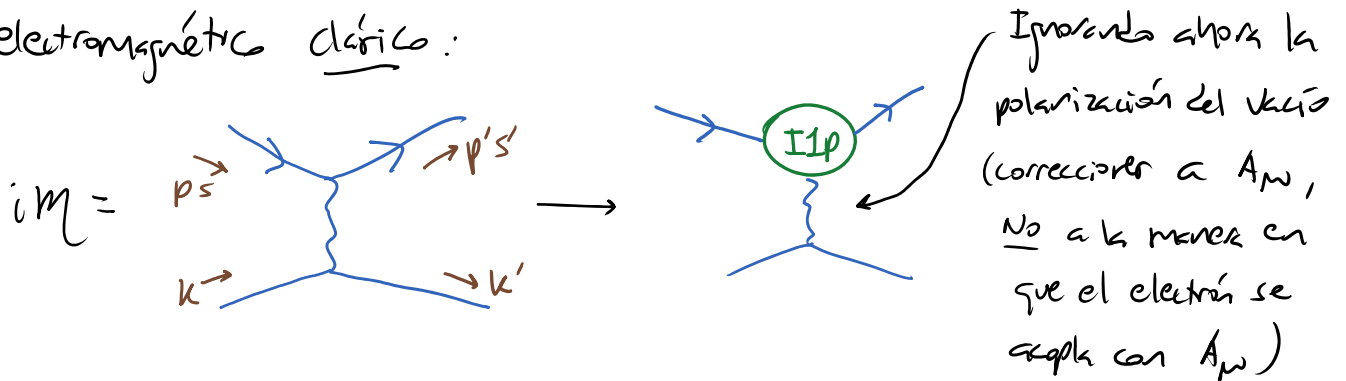
$$-ie \Gamma^\mu(p', p) \equiv$$


$$=$$


Nuestra condición de renormalización (IV) (p.753), se refiere a este vértice para $p=m, p'=m$ y $q=p'-p=0$. Y

la aplicación física que nos interesará es estudiar la corrección que el diagrama  implica para la manera en que el electrón se acopla al campo electromagnético. Para

ello, queremos examinar un proceso de dispersión del electrón con otra partícula cargada o con un potencial electromagnético clásico:



es decir,


$$iM = -ie (\bar{u}^s(p') \gamma^\mu u^s(p)) \frac{-i N_{\mu\nu}}{q^2} \tilde{J}^\nu(k', k)$$

\swarrow \searrow
 pater
 extensor
 $\uparrow = e_0$ a nivel árbol

p.ej., $-ie \bar{u}^r(k') \gamma^\nu u^r(k)$

$$\rightarrow -ie (\bar{u}^s(p') \Gamma^\mu(p', p) u^s(p)) \frac{-i N_{\mu\nu}}{q^2} \tilde{J}^\nu(k', k)$$

ó $\tilde{A}_\mu^{cl}(q)$ clásico campo electromagnético
 se corrige a Γ^μ

($\mathcal{L}_{int} = -e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu^{cl}(x) \Rightarrow$ vértice  $= -ie \gamma^\mu A_\mu^{cl}(x).$)

Para nuestros propósitos, entonces, nos centraremos en $-ie \Gamma^\mu(p', p)$ para $p' = m, p = m$, con $q = p' - p$ no necesariamente cero. Podemos inferir la estructura genérica de $-ie \Gamma^\mu(p', p)$ con argumentos de simetría.

Las reglas de Feynman involucran solo a $\gamma^\mu, p^\mu, p'^\mu$ y constantes como e y m . Dado que Γ^μ es un vector, debe entonces tomar la forma

$$\Gamma^\mu = F(q^2) \gamma^\mu + G(q^2) (p' + p)^\mu + H(q^2) (p' - p)^\mu,$$

con F, G y H funciones de q^2 , la única variable disponible en nuestra situación de interés (recordemos en particular que $p' = m = p$).

Adicionalmente, la identidad de Ward (p.637) implica que debemos tener

↙ equivale a tener fotón longitudinal

$$0 = \int_{\mu} M^{\mu} \propto \int_{\mu} \bar{u}(p') \Gamma^{\mu}(p', p) u(p)$$

$$= (p' - p)_{\mu} \bar{u}(p') [F \gamma^{\mu} + G(p' + p)^{\mu} + H(p' - p)^{\mu}] u(p)$$

$$= F \bar{u}(p') \underbrace{(p' - p)}_{\substack{\text{cc. de Dirac} \\ m - m = 0}} u(p) + G \bar{u}(p') u(p) \underbrace{(p'^2 - p^2)}_{m'^2 - m^2 = 0} + H \bar{u}(p') u(p) \int_{\mu}^2,$$

de donde concluimos que necesariamente $H = 0$.

Llegamos entonces a

$$\Gamma^{\mu}(p', p) = \gamma^{\mu} F(\not{q}^2) + (p' + p)^{\mu} G(\not{q}^2).$$

L15: 12/10/17 ~~12/10~~

Es habitual reescribir esto usando la "identidad de Gordon"

$$\bar{u}(p') [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] (p' - p)_{\nu} u(p) = \bar{u}(p') \left[\underbrace{\gamma^{\mu} (p' - p)_{\nu}}_{\substack{\rightarrow \\ m}} - \underbrace{(p' - p)_{\nu} \gamma^{\mu}}_{\substack{\leftarrow \\ m}} \right] u(p)$$

$$= \bar{u}(p') \left[\gamma^{\mu} p'_{\nu} + p_{\nu} \gamma^{\mu} \right] u(p) - 2m \bar{u}(p') \gamma^{\mu} u(p),$$

$$\underbrace{-p_{\nu} \gamma^{\mu} + p'_{\nu} \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\}}_{\substack{\leftarrow \\ \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \\ = -m \gamma^{\mu} + 2p'_{\nu}}} \quad \underbrace{-\gamma^{\mu} p_{\nu} + 2p_{\nu}}_{\substack{\rightarrow \\ = -\gamma^{\mu} m + 2p_{\nu}}} = -\gamma^{\mu} m + 2p_{\nu}$$

$$= 2(p + p')^{\mu} \bar{u}(p') u(p) - 4m \bar{u}(p') \gamma^{\mu} u(p),$$

es decir,

$$m \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \frac{(p'+p)^\mu}{2} \bar{u}(p') u(p) - \bar{u}(p') \frac{[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}{4} \not{p}_\nu u(p)$$

p.223 $-i S^{\mu\nu} \equiv -i \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}$

generador de Lorentz ↗

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Esta identidad nos permite reescribir

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) &= \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) F(\zeta^2) + \underbrace{(p'+p)^\mu \bar{u}(p') u(p)}_{2m \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) - 2i \bar{u}(p') S^{\mu\nu} \not{p}_\nu u(p)} G(\zeta^2) \\ &= \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu (F(\zeta^2) + 2m G(\zeta^2)) - 2i S^{\mu\nu} \not{p}_\nu G(\zeta^2) \right] u(p), \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(\zeta^2) + i S^{\mu\nu} \frac{\not{p}_\nu}{m} F_2(\zeta^2)$$

cuando

$$p = m, p' = m$$

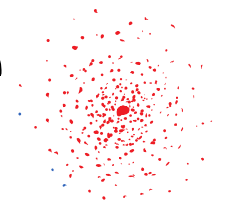
↑ mismas unidades ↓

donde $F_1(\zeta^2) \equiv F(\zeta^2) + 2m G(\zeta^2)$ y $F_2(\zeta^2) \equiv -2m G(\zeta^2)$ se

comportan como factores de forma, y físicamente, codifican la

estructura interna del electrón (o la partícula en cuestión), en lo que se refiere a su acoplamiento

al campo electromagnético.



↑ interacción
cuántica del
fermión ψ
cf. p. 801

Podemos notar que en términos de estos factores de forma, nuestra condición de renormalización (IV) (p.753),

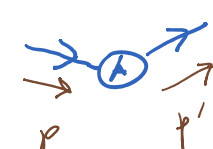
$$-ie \Gamma^\mu(p', p) \Big|_{p'=p=m} = -ie \gamma^\mu, \quad \Rightarrow q = p' - p = 0, \quad p^2 = m^2 = p'^2$$

dice simplemente que \leftarrow a todos los órdenes en e^2

$$\boxed{F_1(q^2=0) = 1} \quad \cdot \quad (IV')$$

Sabemos además que $F_1(q^2) = 1 + \mathcal{O}(e^2)$, $F_2(q^2) = 0 + \mathcal{O}(e^2)$.
 \leftarrow para cualquier q

103/04/19

Para entender el significado de $F_1(q^2)$ y $F_2(q^2)$ en más detalle, consideremos la amplitud de dispersión de un electrón sobre un fondo electromagnético clásico (pp.807-8) y estático, 

$$2\pi \delta(p'^0 - p^0) i\mathcal{M} = -ie (\bar{u}^s(p') \Gamma^\mu(p', p) u^s(p)) \hat{A}_\mu^{cl}(q)$$

\leftarrow solo la energía se conserva

Si se trata de un potencial electrostático, $A_\mu^{cl}(x) = (\phi(\vec{x}), \vec{0})$, entonces $\tilde{A}_\mu^{cl}(q) \equiv \int d^4x e^{iq \cdot x} A_\mu^{cl}(x) = (2\pi \delta^{(0)}(q^0) \tilde{\phi}(\vec{q}), \vec{0})$, y

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}^s(p') \Gamma^\mu(p', p) u^s(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + iS^{\mu\nu} \frac{q_i}{m} F_2(q^2)$$

$$= -ie \bar{u}^s(p') \left[\gamma^0 F_1(q^2) + iS^{0i} \frac{q_i}{m} F_2(q^2) \right] u^s(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

Para un fondo cuya variación espacial sea muy gradual (en escalas

macroscópicas), $\tilde{\phi}(\vec{q})$ estará concentrado alrededor de $\vec{q}=0$, así que es una buena aproximación tomar el límite $\vec{q} \rightarrow 0$ en el elemento de matriz espinorial:

$$iM \approx -ie \underbrace{\bar{u}^{s'}(p')}_{u^{s't}(p)} [\gamma^0 F_1(0) + i \cancel{S}^{oi} \frac{q_i}{m} F_2(0)] u^s(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

$$= -ie F_1(0) \tilde{\phi}(\vec{q}) \underbrace{u^{s't}(p) u^s(p)}_{p.259 \quad 2p^0 \delta^{s's} \approx 2m \delta^{s's}} \cdot \begin{array}{l} \text{espín no cambia en} \\ \text{esta dispersión} \\ \text{en el límite} \\ \text{no relativista} \end{array}$$

Recordando que el factor de $2m$ proviene de nuestra normalización relativista para los estados (p.79: $\langle p'|p \rangle = 2p^0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$), y es por tanto natural omitirlo en el límite no relativista, vemos que esta amplitud corresponde a la dispersión de un electrón no relativista sobre un potencial $V(\vec{x}) = e F_1(0) \phi(\vec{x})$. ← carga eléctrica total (en unidades de e) Con ello verificamos que nuestra condición (IV'), $F_1(0) = 1$, es justamente lo necesario para que e sea en verdad la carga física del electrón. Y entendemos que $F_1(\vec{q}^2 \neq 0)$ contiene información sobre cómo responde el electrón a un potencial electrostático que varía especialmente (en este caso, contribuye también $F_2(\vec{q}^2 \neq 0)$).

Repetimos ahora el análisis con un potencial magnetostático,

$$A_m^{cl}(x) = (0, \vec{A}(\vec{x})) : \Gamma^j(p', p)$$

$$iM = -ie \bar{u}^s(p') \left[\gamma^j F_1(\vec{\zeta}^2) + i S^{jk} \frac{F_k}{m} F_2(\vec{\zeta}^1) \right] u^s(p) \tilde{A}_j(\vec{\zeta}) .$$

↑ porque $\vec{\zeta}^0 = 0$

Si nuevamente aproximamos $\vec{\zeta} = 0$ en el elemento de matriz espinorial, el término con F_2 se anula de inmediato, y el de F_1 también, porque

en el límite no relativista, la definición (p.256) $u^s(p) \equiv \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}$ junto con (p.229) $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

conduce a $\not{p} + m \approx m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $u^s(p) \approx \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}$, y por tanto

$$\bar{u}^s(p) \gamma^j u^s(p) \approx (\sqrt{m})^2 \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger} & \xi^{s\dagger} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 0 .$$

Para entender el efecto del potencial magnetostático al orden más bajo en la variación espacial, necesitamos entonces conservar términos lineales en $\vec{\zeta}$ (\Leftrightarrow lineales en \vec{p} y \vec{p}'):

$$u^s(p) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{pmatrix} m\mathbb{1} & m\mathbb{1} - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ m\mathbb{1} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & m\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \left(\mathbb{1} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \right) \xi^s \\ \left(\mathbb{1} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \right) \xi^s \end{pmatrix} .$$

↑ $m + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} + \dots$

En el término con $F_1(\vec{\zeta}^2)$, esto conduce a

$$u^s(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \zeta^s \\ \left(1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \zeta^s \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}^{s'}(p') \gamma^j u^s(p) \approx (\sqrt{m})^2 \left(\zeta^{s't} \left(1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \zeta^{s'} \right) \underbrace{\left(\begin{matrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{matrix} \right)}_{\gamma^j} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \zeta^s \\ \left(1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \zeta^s \end{pmatrix}$$

$$\approx m \begin{pmatrix} \zeta^{s't} & \zeta^{s't} \\ -\zeta^{s't} \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m} & \zeta^{s't} \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \zeta^s \\ +\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \zeta^s \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -\zeta^{s't} \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m} & \zeta^{s't} \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m} \\ \zeta^{s't} & \zeta^{s't} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^s \\ \zeta^s \end{pmatrix}$$

$$= 2m \zeta^{s't} \left(\sigma^j \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} + \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m} \sigma^j \right) \zeta^s$$

$$\underbrace{\frac{p^k}{2m} \sigma^j \sigma^k}_{\delta^{jk} + i \epsilon^{jkl} \sigma^l} = \frac{p^j}{2m} + \frac{i p^k}{2m} \epsilon^{jkl} \sigma^l \quad \text{p.229}$$

$$= (p+p')^j \underbrace{\zeta^{s't} \zeta^s}_{\delta^{s's}} + i \zeta^{s't} \left(p^k \epsilon^{jkl} \sigma^l + \underbrace{p'^k \epsilon^{kjl} \sigma^l}_{-p'^k \epsilon^{jkl}} \right) \zeta^s$$

$$\underbrace{-q^k \epsilon^{jkl} \sigma^l}_{\quad} \quad q = p' - p$$

factor por normalización relativista

$$= 2m \zeta^{s't} \left(\frac{(p+p')^j}{2m} - \frac{i \epsilon^{jkl} q^k \sigma^l}{2m} \right) \zeta^s$$

El término con F_2 y g_T tiene un factor explícito de q_k , así que en este caso sí podemos quedarnos solo con la expresión para los espinores a orden más bajo en \vec{p} , $u^s(p') \approx u^s(p) \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} \zeta^s \\ \zeta^s \end{pmatrix}$:

$$\bar{u}^{s'}(\rho') \left(iS^{jk} \frac{q_k}{m} \right) u^s(\rho) \simeq (\sqrt{m})^2 \underbrace{\left(\begin{matrix} \xi^{s't} & \xi^{s't} \\ \xi^{s't} & \xi^{s't} \end{matrix} \right)}_{\left(\begin{matrix} \xi^{s't} & \xi^{s't} \\ \xi^{s't} & \xi^{s't} \end{matrix} \right)} \underbrace{\left(\begin{matrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{matrix} \right)}_{\gamma^0} \left(iS^{jk} \frac{q_k}{m} \right) \underbrace{\left(\begin{matrix} \xi^s \\ \xi^s \end{matrix} \right)}_{-\frac{i\vec{q}^t}{m} \left(\begin{matrix} \epsilon^{jkl} \sigma^l / 2 \\ \epsilon^{jkl} \sigma^l / 2 \end{matrix} \right)} \quad p.231$$

$$= 2m \xi^{s't} \left(-i \frac{\epsilon^{jkl} q_k \sigma^l}{2m} \right) \xi^s.$$

Juntamos los 2 resultados,

$$i\eta = -ie \bar{u}^{s'}(\rho') \left[\gamma^j F_j(\vec{q}) + iS^{jk} \frac{q_k}{m} F_2(\vec{q}) \right] u^s(\rho) \tilde{A}_j^{cl}(\vec{q})$$

$$\simeq -ie 2m \xi^{s't} \left[\frac{(p+p')^j}{2m} F_1(0) - \frac{i\epsilon^{jkl} q_k \sigma^l}{2m} (F_1(0) + F_2(0)) \right] \xi^s \tilde{A}_j^{cl}(\vec{q})$$

El primer término que (después de omitir el factor de normalización relativista $2m$), $-ie \frac{(p+p')^j}{2m} \tilde{A}_j^{cl}(\vec{q}) \delta^{ss'}$, es espín no cambia justamente lo que esperamos a partir del Hamiltoniano para una partícula cargada de cualquier espín no relativista en un campo externo,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\vec{p}} - e \vec{A}(\hat{\vec{x}}))^2 - e\phi(\hat{\vec{x}}) \quad \left(L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - e\phi + e\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} \right)$$

$$= \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{e}{2m} (\hat{\vec{p}} \cdot \vec{A}(\hat{\vec{x}}) + \vec{A}(\hat{\vec{x}}) \cdot \hat{\vec{p}}) + \vec{A}^2(\hat{\vec{x}}), \quad -e\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}$$

cuy elemento de matriz entre estados con momento definido contiene

$$-\frac{e}{2m} \langle \vec{p}' | (\hat{\vec{p}} \cdot \vec{A}(\hat{\vec{x}}) + \vec{A}(\hat{\vec{x}}) \cdot \hat{\vec{p}}) | \vec{p} \rangle = -\frac{e}{2m} (p'+p)^j \tilde{A}_j^{cl}(\vec{q}) \quad \checkmark$$

El segundo término, en cambio,

$$ie 2m \zeta^{\dagger} \left(- \frac{i e \hbar^2}{2m} \zeta^{\dagger} \sigma^{\lambda} (1 + F_2(0)) \right) \zeta^{\nu} \tilde{A}_a^j(\vec{r})$$

$$= i 2m \zeta^{\dagger} \left[\frac{e}{2m} \sigma^{\lambda} (1 + F_2(0)) \right] \zeta^{\nu} \underbrace{(-i e \hbar^2 \zeta^{\dagger} \tilde{A}_{cl}^j(\vec{r}))}_{= \tilde{B}^{\lambda}(\vec{r}) \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}},$$

expresa la manera en la que el espín del electrón se acopla al campo magnético: vemos un potencial de interacción

$$\hat{V} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}(\hat{\vec{x}}),$$

con el momento magnético del electrón dado por

$$\hat{\vec{\mu}} \equiv \frac{e}{m} \hat{\vec{S}} (1 + F_2(0)).$$

$$\uparrow \equiv \frac{\sigma}{2} \text{ espín del electrón}$$

Es habitual escribir la relación entre el espín y el momento magnético de una partícula la forma

$$\vec{\mu} = g \underbrace{\left(\frac{e}{2m} \right)}_{\equiv -\mu_B \text{ magnetón de Bohr}} \vec{S}, \quad -|e|$$

con g el llamado factor g de Landé. De la deducción anterior

veremos entonces que el factor g del electrón está dado por

$$g = 2 + 2F_2(0),$$

↙ carga magnética (dipolar)


lo cual establece el significado físico de $F_2(0)$. Más en general, aprendemos que $F_2(\frac{q^2}{\Lambda^2})$ codifica la manera en que el electrón responde a un campo magnético no uniforme (también contribuye $F_1(\frac{q^2}{\Lambda^2})$).

A nivel árbol, $F_2^{(0)}(0) = 0$, y por tanto $g^{(0)} = 2$, que es la famosa predicción de la teoría de Dirac. Las correcciones cuánticas (lazos) son de $\mathcal{O}(e^2)$ e implican una pequeña desviación del valor de Dirac,

$$a \equiv \frac{g-2}{2} = F_2(0),$$

conocida como el momento magnético anómalo del electrón.

La posibilidad de reescribir el vértice $\Gamma^\mu(p', p)$ en términos de $F_1(\frac{q^2}{\Lambda^2})$ y $F_2(\frac{q^2}{\Lambda^2})$ surge a partir de las simetrías, así que aplica igualmente para cualquier partícula de espín $1/2$, incluyendo partículas compuestas como el protón. En este último caso, por supuesto no tenemos por qué esperar que

los valores de la teoría de Dirac $F_1(0)=1$ y $F_2(0)=0$ dan una buena aproximación (p.ej., $g_{proton}=5.58569\dots$). Y peor aún, NO tenemos una buena manera de calcular $F_1(q^2)$ y $F_2(q^2)$, porque el vértice electromagnético $\Gamma^\mu(p',p)$ recibe correcciones por la interacción fuerte (p.ej., ) en el régimen fuertemente acoplado.
Aun así, los factores de forma $F_1(q^2)$ y $F_2(q^2)$ son una manera útil de parametrizar las amplitudes de dispersión del protón (p.ej.), y por tanto, las secciones eficaces medidas en los experimentos.
[Ver p.ej. Peskin problems 6.1.]

Ya que entendamos muy bien la forma que puede tomar el vértice $\Gamma^\mu(p',p)$, podemos proceder al cálculo del diagrama correspondiente a 1 lazo para el electrón en QED (p.758,806),

$$\begin{aligned}
 -ie\Gamma^\mu(p',p) &= \underbrace{\text{tree}}_{D=0} + \underbrace{\text{1-loop}} + \underbrace{\text{2-loop}} + O(e^5) \\
 &= -ie\gamma^\mu F_1^{(0)}(q^2) - ie\Gamma_{2\text{loop}}^\mu(p',p) - ie\delta Z_1^{(1)}\gamma^\mu \\
 &\stackrel{p.809}{=} \underbrace{\gamma^\mu F_1^{(1)}(q^2) + iS^{\mu\nu} \frac{g}{m} F_2^{(1)}(q^2)}_{\text{Ward}} = \delta Z_2^{(1)} \text{ (Ward)} \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{que tenemos ya en la p.805}
 \end{aligned}$$

Podemos notar aquí que la parte ^{logarítmicamente} divergente de Γ_{1122}^{μ} estará únicamente en $F_1^{(1)}(q^2)$, mientras que el factor de forma relacionado con el momento magnético anómalo del electrón, $F_2^{(1)}(q^2)$, es finito (no tiene tampoco divergencias IR, y para calcularlo, entonces, no es necesario elegir un método de regularización específico).

Llevando a cabo los cálculos necesarios con regularización dimensional en $d=4-\epsilon$ (Tarea 14), se encuentra que

$$F_1^{(1)}(q^2) = \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1+x_2+x_3-1) \left[\frac{(d-2)^2 \Gamma(2-d/2)}{2M^{4-d}} \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(3-d/2)}{M^{6-d}} \left\{ q^2 (2(1-x_1)(1-x_2) - (4-d)x_1x_2) + m^2 (2(1-4x_3-x_3^2) - (4-d)(1-x_3)^2) \right\} \right]$$

parámetros de Feynman por combinar 3 denominadores

finito en $d=4$

pdo $\frac{2}{\epsilon}$

$$\text{con } M^2 \equiv (1-x_3)^2 m^2 + x_3 m^2 - x_1 x_2 q^2.$$

regular IR

Imponiendo nuestra condición de renormalización (IV') (p.811), $F_1(q^2=0)=1 \Rightarrow F_1^{(1)}(0) + \delta Z_1^{(1)} = 0$, obtenemos a partir de aquí

← habiendo hecho ya $\int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$

$$\delta Z_1^{(1)} = -F_1^{(1)}(0) = -\frac{e^2 \omega^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx_3 \left[\frac{(d-2)^2 \Gamma(2-d/2)}{2 \underline{M}^{4-d}} + \frac{\Gamma(3-d/2)}{\underline{M}^{6-d}} m^2 (2(1-4x_3 - x_3^2) - (4-d)(1-x_3)^2) \right]$$

donde $\underline{M}^2 \equiv M^2|_{q^2=0} = (1-x_3)^2 m^2 + x_3 m_Y^2$ (con lo cual efectivamente $\delta Z_1^{(1)} = \delta Z_2^{(1)}$, ver p. 805 ✓). Puede verificarse que esto implica que $F_1^{(1)}(q^2)$ es finito. ✓

El otro factor de forma resulta ser (Tarca 14)

$$F_2^{(1)}(q^2) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 \frac{dx}{1-x(1-x)q^2/m^2} = \frac{e^2}{8\pi} \frac{m^2}{q^2 \sqrt{4m^2 - q^2}} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{4m^2 - q^2}} \right)$$

De aquí podemos obtener en particular

$$F_2^{(1)}(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

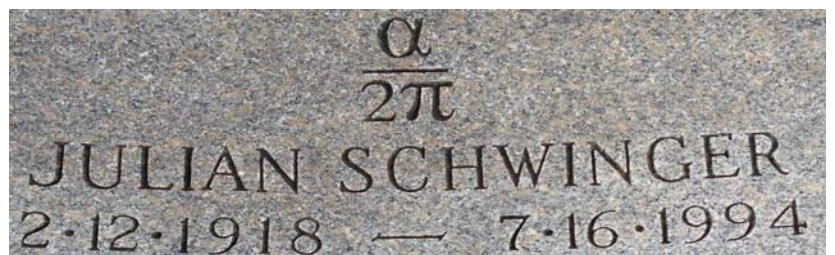
y por tanto la primera contribución al momento magnético anómalo del electrón (p. 817),

$$a \equiv \frac{g-2}{2} = F_2(a) = \frac{\alpha}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2),$$

que obtuvo por primera vez

Schwinger, en 1948.

LG: 08/04/19



↘ corregidos a 2 lazos, $\sigma(e^4) \sim \mathcal{O}(\alpha^2)$

Númericamente, $\frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.0011614\dots$

Incluyendo correcciones de hasta 5 lazos (¡~14,000 diagramas!,

p.ej. ) , la predicción teórica empató con

la medición experimental a más de 11 dígitos de precisión:

$$\begin{array}{r}
 \text{contribución hadrónica} \downarrow \quad \text{debil} \downarrow \\
 a_{\text{teor.}} = 0.00115965218203 (72) \quad \leftarrow \text{incertidumbre teórica} \\
 \text{vs.} \\
 a_{\text{exper.}} = 0.00115965218073 (28) \quad \leftarrow \text{incertidumbre experimental} \\
 \begin{array}{cccc}
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 1947 & 1963 & 1987 & 2008
 \end{array}
 \end{array}$$

[ver teo. {Aoyama, Kinoshita, Nio, 1712.06060; exp. {Hanneke, Fogwell Hoogerheide, Gabrielse, 1009.4831}]

¡El acuerdo que es análogo a predecir el diámetro de la Tierra (~10,000 km) con un error no mayor al grosor de un cabello humano (~0.1 milímetros)!

LIB: 19/10/17 \approx 17/10

11. El Grupo de Renormalización

Entendamos ya muy bien lo que significa renormalizar: conectar a los parámetros abstractos que definen a una teoría cuántica de campos con cantidades experimentalmente medibles. Al analizar esta conexión, nos hemos topado con varias distintas escalas energéticas:

- El cut-off UV, Λ , que se utiliza para poder definir de manera explícita a la teoría (regularizando) a distancias muy pequeñas \rightarrow ya sea porque literalmente creemos que hay un corte físico, o porque necesitamos un corte ficticio en pasos intermedios.
- La escala "experimental" a la cual deseamos examinar un correlador o amplitud dada, p.ej. p^2 en una función de 2 puntos G_2 o Γ_2 , o s, t, u en una amplitud de 4 puntos iM_4 .
- La escala de renormalización μ , a la cual definiremos nuestros parámetros renormalizados. P.ej. en φ^4 podemos definir λ a partir de Γ_4 ($\leftrightarrow iM_4$) con $s, t, u \sim \mu^2$, o en QED, podemos definir e a partir de Γ^m con $p, p' \sim \mu$.
 \leftarrow no solo en regularización dimensional

- Las escalas físicas intrínsecas de la teoría, como p.ej. una masa física (\leftrightarrow ubicación de polo en correlador) m_{fis} , o la escala a la cual algún acoplamiento se vuelve de orden 2 (como Λ_{QCD} en el caso de la fuerza fuerte, o M_{Planck} en el caso de la gravedad), ideas que entenderemos más adelante.

Lo que hemos hecho hasta ahora es considerar $\Lambda \gg p, \mu, m_{\text{fis}}$, etc.

y definir la teoría con parámetros desnudos $\lambda_0(\Lambda), m_0(\Lambda), \dots$ con dependencia de Λ elegida con cuidado para que las predicciones físicas (y en particular, los parámetros renormalizados λ, m) NO dependan de Λ . Gracias a esto podemos incluso tomar $\Lambda \rightarrow \infty$.

Por otra parte, en los cálculos concretos hemos decidido hasta ahora utilizar el esquema (o prescripción, o condiciones) de renormalización en la capa de masa (OS), es decir, identificamos la escala de renormalización $\mu = m_{\text{fis}}$. Es por esto que en nuestros resultados finales no vemos una dependencia explícita de μ . Bajo estas convenciones, la única energía variable que queda en nuestros resultados es la escala "experimental" p , y ciertamente nos interesa mucho saber cómo es que las

Curiosamente, la "correspondencia holográfica" afirma esencialmente que $RG = GR$

predicciones de la teoría dependen de p .

Significa usualmente de relatividad general

El tema de este capítulo, el "grupo de renormalización" (GR , o RG , por sus siglas en inglés), se refiere precisamente a esta pregunta: en esencia, buscamos entender cómo evoluciona o "fluye" la teoría (es decir, cómo va cambiando de aspecto) conforme la examinamos a distintas escalas "experimentales" p .

Para responder esta pregunta, encontraremos que es muy útil aprovechar algunas de las 2 libertades básicas que existen en nuestro análisis; pero que hasta ahora no hemos empleado:

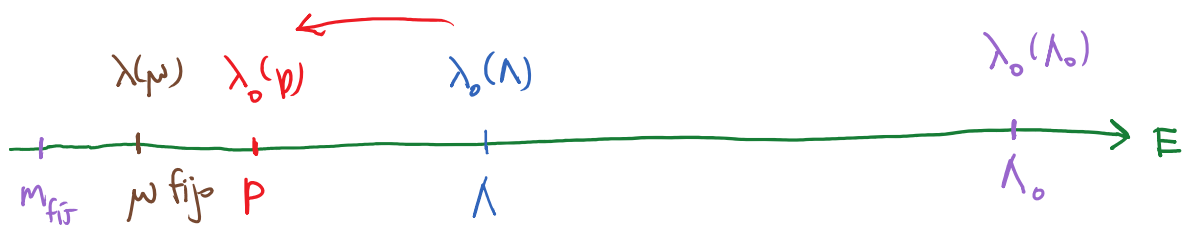
- 1) Por un lado, podemos salirnos del esquema OS, definiendo nuestros parámetros renormalizados a una escala arbitraria $\mu \neq m_{\text{fir}}$, y estudiar cómo es que $\lambda(\mu)$, $m(\mu)$, etc. deben depender de μ para que en nuestra teoría dada (con Λ , $\lambda_0(\Lambda)$, $m_0(\Lambda)$, etc. fijos) las predicciones físicas NO cambien. Este enfoque se conoce como el grupo de renormalización de Gell-Mann-Low (1954), o de Callan-Symanzik (1970). En este caso, donde la escala de renormalización μ se toma como una "escala deslizable" (en inglés, "sliding scale"), veremos que la descripción más

útil se obtiene cuando tomamos $\mu \sim p$. Esquemáticamente:



Trabajando con $\lambda(p)$ tendremos, por definición, el resultado (p.ej., iM_4) a la escala "experimental" que nos interesa.

2) Por otro lado, podemos reducir progresivamente el corte Λ (con μ fija en algún valor), y estudiar la dependencia de Λ que deben tener $\lambda_0(\Lambda)$, $m_0(\Lambda)$, etc. para que las predicciones físicas no cambien. (Por supuesto, si no mantenemos $\Lambda \gg p, \mu, m_{\text{fijo}}$ entonces perderemos algunas de las simplificaciones que hicimos antes.) Este enfoque se conoce como el grupo de renormalización de Wilson (1971). En este caso, donde Λ se toma como un "corte flotante", veremos que la descripción más útil se obtiene cuando tomamos $\Lambda \sim p$. Esquemáticamente:



Trabajando con $\lambda_0(p)$, por definición, los loops no pueden dar correcciones

grandes (porque se truncan en $\Lambda \sim p$), así que tenemos fácilmente el resultado que nos interesa.

Moralmente, $\chi(\mu \sim p) \sim \chi_0(\Lambda \sim p)$, así que ambos enfoques capturan básicamente la misma información, aunque, como veremos, hay algunas diferencias en detalle.

El nombre "grupo de renormalización" (debe a Stueckelberg y Petermann, 1953) es desafortunado. Ciertamente tiene que ver con la renormalización, pero NO es útil pensar en alguna conexión con teoría de grupos. Ya hicimos brevemente referencia arriba a la idea de que la teoría "fluye" (cambia de aspecto) cuando la examinamos a diferentes escalas. Esto nos llevará al concepto de "flujo del grupo de renormalización", y un mejor nombre para todo el tema sería simplemente el "flujo de renormalización".

Para empezar a entender estas ideas de manera más concreta, consideremos primero el ejemplo más sencillo de todo: una teoría de un campo escalar real y libre (Klein-Gordon) en d dimensiones (con d entero, al menos por ahora),

$$S = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right).$$

Esta teoría es obviamente soluble: los correladores exactos son (p. 401)

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ es impar} \\ G_2(x_1, x_2) G_2(x_3, x_4) \dots G_2(x_{N-1}, x_N) + \text{permutaciones} & \text{si } N \text{ es par,} \end{cases}$$

con (pp. 198, 395)

$$G_2(x, y) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip \cdot (x-y)} \underbrace{\frac{i}{p^2 - m^2}}_{\tilde{G}_2(p)} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{tie implícito} \\ \cdot \end{array}$$

$$\tilde{G}_2(p) = \langle 0 | \hat{\varphi}(p) \hat{\varphi}(-p) | 0 \rangle$$

No nos hace falta que ningún corte, así que mantenemos $\Lambda \rightarrow \infty$.
Tampoco necesitamos pensar en renormalizar, porque de la forma exacta de $\tilde{G}_2(p)$ vemos directamente que $m_{\text{fís}} = m = m_0$ y $\varphi = \varphi_0$ ($Z=1$).

Y aún así, el flujo de renormalización para esta teoría NO es completamente trivial, porque $\tilde{G}_2(p)$ SÍ cambia de aspecto para diferentes valores de la escala "experimental" p :

$$\tilde{G}_2(p) = \frac{i}{p^2 - m_{\text{fís}}^2} \begin{cases} \xrightarrow{p \gg m_{\text{fís}}^{-1}} \frac{i}{p^2} \equiv \tilde{G}_2^{\text{UV}}(p) \leftrightarrow G_2(x, y) \xrightarrow{|x-y| \ll m_{\text{fís}}^{-1}} G_2^{\text{UV}}(x, y) \propto \frac{1}{|x-y|^{d-2}} \\ \xrightarrow{p \ll m_{\text{fís}}^{-1}} \frac{-i}{m^2} \equiv \tilde{G}_2^{\text{IR}}(p) \leftrightarrow G_2(x, y) \xrightarrow{|x-y| \gg m_{\text{fís}}^{-1}} G_2^{\text{IR}}(x, y) \propto \delta^{(d)}(x-y) \end{cases}$$

Podemos notar que $G_2^{uv}(x,y)$ no es otra cosa más que el propagador de la teoría libre no masiva, así que

$$S \xrightarrow[\text{ó } |x-y| \ll m_{\text{fis}}^{-1}]{p \gg m_{\text{fis}}} S_{uv} \equiv \int d^d x \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi.$$

A diferencia de S , S_{uv} es invariante bajo reescalamiento (Tarea 3):

bajo $x^\mu \rightarrow x'^\mu = s x^\mu$ y $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = s^{-D_\varphi} \varphi(x)$, con $D_\varphi \equiv \frac{d}{2} + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{2}}}$ - 1

la dimensión de φ (p. 709), $S_{uv} \rightarrow S'_{uv} = \int d^d x s^{d-2} \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi s^{-2(\frac{d}{2}-1)} = S_{uv}$.

$G_2^{uv}(x,x')$ sí cambia bajo este reescalamiento, pero (al tratarse de una simétrica) solo lo hace por la potencia que es consecuencia de la dimensión del campo: $G_2^{uv}(x,y) \rightarrow G_2'^{uv}(x',y') \propto \frac{1}{|x'-y'|^{d-2}} = \frac{1}{s^{d-2}|x-y|^{d-2}} \propto s^{-2D_\varphi} G_2^{uv}(x,y)$

En otras palabras, el que los correladores en S_{uv} sigan una ley de potencia se debe (por análisis dimensional) a la invariancia de S_{uv} bajo reescalamiento.

$G_2^{\text{In}}(x,y)$, por su parte, proviene de

$$S \xrightarrow[\text{ó } |x-y| \gg m_{\text{fis}}^{-1}]{p \ll m_{\text{fis}}} S_{\text{In}} = - \int d^d x \frac{1}{2} m^2 \varphi^2.$$

Esta teoría también preserva su forma bajo reescalamiento (los correladores nuevamente obedecen "leyes de potencia", ahora con $D_\varphi = d/2$); pero

tiene la peculiaridad de que, en ella, **el campo no se propaga**: en ausencia del término cinético, el valor de φ en cada punto x está incomunicado incluso de sus vecinos inmediatos (decimos que es "ultralocal"), y **el campo no puede sustentar ondas**. Vemos esto en la forma del propagador, $\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle \propto \delta^{(d)}(x-y)$ (no hay correcciones si $x \neq y$), o más directamente, en la ecuación de movimiento, $\hat{\varphi}(x) = 0$.

En la teoría original S , si consideramos amplitudes de dispersión (en la capa de masa) en lugar de correladores (fuera de la capa de masa), **NO** encontraremos excitación alguna del campo por escalas de energía $p < m_{\text{fís}}$.

Decimos que S es una teoría con una **brecha de masa** (en inglés, "mass gap") $M = m_{\text{fís}}$, o más brevemente, una teoría **brechada** ("gapped"), sin excitaciones físicas a energías arbitrariamente bajas. Y al carecer por completo S_{IR} de grados de libertad que se propaguen, nos referimos a ella como una **teoría vacía, trivial o nula**.

Ya que hemos entendido de manera explícita la dependencia de escala en nuestra teoría, podemos notar que (aún cuando en esta teoría tan sencilla no lo necesitamos) es posible elegir una escala de

renormalización arbitraria μ , y aprovecharla para definir un acoplamiento de masa dimensional

$$g(\mu) \equiv \frac{m_{\text{Fro}}}{\mu}$$

En términos de g , tenemos $S = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} g^2 \mu^2 \varphi^2 \right)$ y

$$\tilde{G}_2(p; \nu, \mu) = \frac{i}{p^2 - g^2 \mu^2}$$

Esto no parece particularmente útil por sí solo, pero si ahora elegimos $\mu \sim p$, vemos que la información que nos interesa respecto al comportamiento de la teoría S a diferentes escalas está completamente contenida en el valor de $g = \frac{m_{\text{Fro}}}{\mu} \sim \frac{m_{\text{Fro}}}{p}$: S_{UV} corresponde a $g=0$, S_{IR} a $g=\infty$, y conforme vamos de altas a bajas energías la teoría S está caracterizada por valores intermedios y cada vez mayores de g .

Podemos representar esto en un diagrama sencillo:



que constituye nuestro primer ejemplo de un flujo del grupo de renormalización.

Por convención, las flechas en este tipo de diagramas se dibujan en la dirección de μ decreciente, porque la teoría se define a altas energías y después exploramos su aspecto a energías cada vez más bajas.

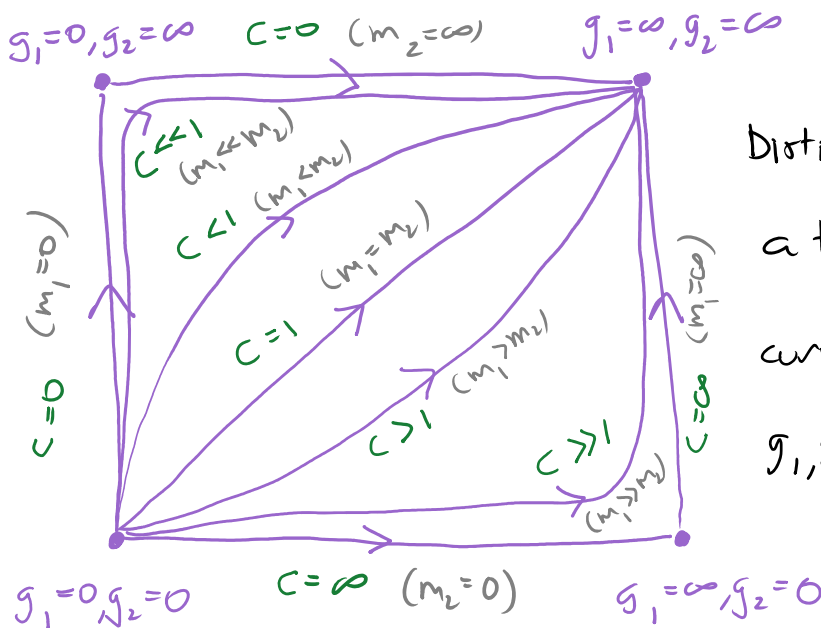
Obviamente tendríamos un flujo básicamente idéntico en cualquier teoría de un solo campo masivo (p.ej., un fermión) libre. Podemos obtener una situación un poco más interesante si consideramos una teoría libre con más de un campo, p.ej.

$$S = \int d^d x (i\bar{\Psi}_1 \not{\partial} \Psi_1 - m_1 \bar{\Psi}_1 \Psi_1 + i\bar{\Psi}_2 \not{\partial} \Psi_2 - m_2 \bar{\Psi}_2 \Psi_2)$$

Además de definir como antes a los acoplamientos de masa d -dimensionales $g_1 \equiv \frac{m_1}{\Lambda}$, $g_2 \equiv \frac{m_2}{\Lambda}$, ahora podemos formar el cociente $c \equiv \frac{m_1}{m_2}$, que es invariante de escala, y parametriza entonces los distintos flujos de renormalización que tenemos en esta teoría, donde existen ahora 4 distintas teorías invariantes bajo reescalamientos:

- $g_1=0, g_2=0$ $S_{0,0} \equiv \int d^d x (i\bar{\Psi}_1 \not{\partial} \Psi_1 + i\bar{\Psi}_2 \not{\partial} \Psi_2)$ $2 \cdot 2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ g.d.l. p. 27 \nearrow grado de libertad \downarrow
- $g_1=0, g_2=\infty$ $S_{0,\infty} = \int d^d x (i\bar{\Psi}_1 \not{\partial} \Psi_1 - m_2 \bar{\Psi}_2 \Psi_2)$ $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ g.d.l.
- $g_1=\infty, g_2=0$ $S_{\infty,0} = \int d^d x (i\bar{\Psi}_2 \not{\partial} \Psi_2 - m_1 \bar{\Psi}_1 \Psi_1)$ $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ g.d.l.
- $g_1=\infty, g_2=\infty$ $S_{\infty,\infty} = 0$ $(-m_1 \bar{\Psi}_1 \Psi_1 - m_2 \bar{\Psi}_2 \Psi_2)$ 0 g.d.l.

Los flujos entre estas teorías invariantes de escala pueden resumirse en el siguiente diagrama (reescalado para que $g_{1,2} = \infty$ quede a una distancia finita):



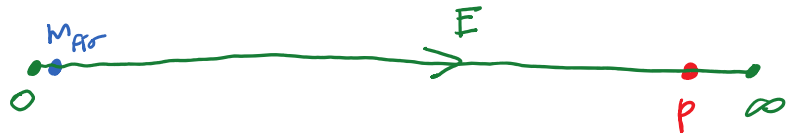
$$c \equiv \frac{m_1}{m_2} = \frac{g_1}{g_2}$$

Distintos valores de c corresponden a teorías distintas S_c . Las curvas indican cómo cambian g_1, g_2 para cada c dada; pero no cuán rápido lo hacen.

↑ en respecto a μ

Podemos notar por ej. que, además del flujo en $c = \infty$ ($m_2 = 0$) que termina en $S_{\infty,0}$ cuando $\mu \rightarrow \infty$, tenemos flujos en $c \gg 1$ ($m_1 \gg m_2$) que pasan arbitrariamente cerca de $S_{\infty,0}$ y se mantienen ahí en un rango arbitrariamente grande de energías $m_2 \ll \mu \ll m_1 = c m_2$. El tamaño de este intervalo no resulta obvio del diagrama; hay que tener presente por separado que el flujo se alenta (lentifica) drásticamente cuando pasamos cerca de una teoría invariante de escala (= punto en diagrama).

En una teoría cuántica arbitraria que esté bien definida para energías arbitrariamente grandes (es decir, donde podemos tomar $\Lambda \rightarrow \infty$), al considerar energías "experimentales" muy muy



mayores que cualquier escala intrínseca de la teoría ($p \gg m_{fir}$, etc.), naturalmente esperamos acercarnos nuevamente a una teoría invariante bajo reescalamiento (porque $\frac{m_{fir}}{p}$, etc. ~ 0 , y no queda ya ninguna escala fija contra la cual podamos notar cambios), que en general pueden ser interactuante.

En sentido inverso, si examinamos la teoría a energía arbitrariamente bajas ($p \ll m_{fir}$, etc.), puede ocurrir una de 2 cosas. Si existe una brecha de masa M , entonces cuando $p < M$ la teoría se vuelve vacía.

De otro modo, siguen existiendo excitaciones aún cuando $p \sim 0$, y esperamos obtener entonces otra vez una teoría invariante bajo reescalamiento (porque $\frac{m_{fir}}{p}$, etc. $\sim \infty$ y no queda ya ninguna escala fija contra la cual podamos notar cambios).



20:11/04/19 (-10 min)

Vemos entonces que las teorías invariantes de escala juegan un papel especial, que se volverá más importante cuando profundicemos más.

En teorías de campo relativistas (invariantes bajo Poincaré) y unitarias, la invariancia bajo reescalamiento o "dilataciones" $x^\mu \rightarrow s x^\mu$ resulta ir de la mano de la invariancia bajo las "transformaciones conformes especiales" $x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + x^2 b^\mu}{1 + 2b \cdot x + x^2 b^2}$ $\leftarrow b^\mu$ parámetro arbitrario [ver p.ej. Nakayama, 1302.0884]

y Dymarsky et al., 1402.6322]. La combinación de Poincaré + dilataciones + espejidos da como resultado lo que se conoce como el grupo conforme, cuyos generadores satisfacen las relaciones de conmutación (álgebra conforme)

$$\left. \begin{aligned} [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\rho}] &= -i (\eta_{\mu\lambda} J_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} J_{\mu\rho}) \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [J_{\mu\nu}, P_\rho] &= -i (\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu) \end{aligned} \right\} \text{Poincaré (pp. 43, 48)}$$

($\Leftrightarrow P_\mu$ transforma como vector bajo Lorentz)

$$[D, P_\mu] = -i P_\mu, \quad [D, J_{\mu\nu}] = 0,$$

\swarrow P_μ tiene dimensión 1 \swarrow $J_{\mu\nu}$ tiene dimensión 0

\uparrow generador de dilataciones (rescalamiento)

$$[K_\mu, K_\nu] = 0$$

\leftarrow generadores de transformaciones conformes especiales

$$[J_{\mu\nu}, K_\lambda] = -i (\eta_{\mu\lambda} K_\nu - \eta_{\nu\lambda} K_\mu)$$

($\Leftrightarrow K_\mu$ transforma como vector bajo Lorentz)

$$[P_\mu, K_\nu] = 2i J_{\mu\nu} - 2i \eta_{\mu\nu} D$$

$$[D, K_\mu] = i K_\mu$$

\uparrow K_μ tiene dimensión -1

Bajo las identificaciones

$$\begin{aligned}
 J_{\mu\nu} &\equiv J_{\mu\nu}^{\leftarrow \text{corren de } 0 \text{ a } d-1}, & J_{\mu d} &\equiv \frac{1}{2}(K_{\mu} - P_{\mu}), \\
 J_{d-1} &\equiv D, & J_{\mu-1} &= \frac{1}{2}(K_{\mu} + P_{\mu}),
 \end{aligned}$$

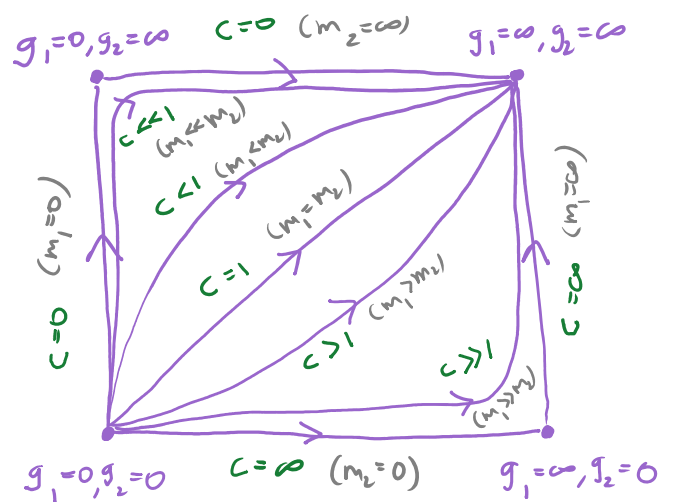
es fácil verificar que los J_{MN} (con $M, N = -1, 0, 1, 2, \dots, d$) satisfacen relaciones de conmutación idénticas a las de los $J_{\mu\nu}$ pero con $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{MN} = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, \dots, 1)$. En otros palabras, (la parte anexa de) **el grupo conforme en d dimensiones es isomorfo al grupo $SO(d, 2)$** (cf. Lorentz $SO(d-1, 1)$). Las teorías que tienen como simetría espacio-temporal al grupo conforme se conocen como **teorías de campo conformes**, o **teorías conformes**, o CFTs, por sus siglas en inglés.

Las teorías que encontramos en el UV extremo o el IR extremo de cualquier teoría de campos son entonces **teorías conformes (CFTs)**, aunque en este curso nos bastará con saber que son **invariantes de escala**. Dado que estas teorías **NO** cambian cuando las escribamos a diferentes energías, se les conoce también como **puntos fijos del grupo de renormalización**, o **puntos críticos**, o **teorías críticas**.

Dependiendo de si representen el límite de energías ultra-altas o ultra-bajas, hablamos de un punto fijo UV o un punto fijo IR, respectivamente.

$$L_{17} = 24/10/17$$

El único ejemplo concreto que hemos visto hasta ahora de un punto fijo \leftrightarrow teoría invariante de escala \leftrightarrow teoría conforme es el caso de una teoría libre no masiva, que se conoce como un punto fijo gaussiano, o trivial, o libre. En un diagrama de flujo del RG, si nos colocamos exactamente en un punto fijo, por definición no salimos de ahí cuando μ cambia. Las curvas reflejan lo que ocurre si nos colocamos fuera de un punto fijo (ya sea por muy poco o por mucho), y dejamos que μ decrezca. Hasta ahora, los únicos ejemplos que hemos visto de flujo de renormalización involucran términos de masa, asociados a acoplamientos cuya dependencia de la escala podemos conocer de manera exacta (gracias a que la teoría



sigue siendo libre): $g(\mu) = \frac{m}{\mu}$ crece linealmente bajo el flujo de renormalización (es decir, yendo hacia el IR). Esto claramente es consecuencia directa del hecho de que m tiene dimensión 1.

Cuando consideramos teorías de campo más generales, con campos ϕ_c y acoplamientos λ_i , sabemos de la p. 709 que la dimensión de cada campo está dada por $D_c \equiv \frac{d}{2} + s_c - 1$, y la de cada acoplamiento, por $D_i \equiv d - \partial_i - \sum_c n_{ic} D_c$.

número de derivadas en el vértice \uparrow

número de pines de cada tipo de campo que figura en el vértice

Podemos entonces definir los

correspondientes acoplamientos adimensionales

$$g_i(\mu) \equiv \frac{\lambda_i}{\mu^{D_i}}$$

Con esto, cada teoría dada estará de nuevo

descrita como un flujo de renormalización, parametrizado por acoplamientos que tienen el siguiente comportamiento:

- Si $D_i > 0$, es decir, si el acoplamiento (y la interacción) es súper-renormalizable (ver pp. 720-721), entonces g_i crece con el flujo de renormalización (μ decreciente). Este tipo de acoplamientos (tal como el acoplamiento de masa $g = m/\mu$) se

vuelven entonces más y más importantes a bajas energías, y por esta razón, se conocen como acoplamiento/interacciones relevantes.

$$g_i(\mu) \equiv \frac{\lambda_i}{\mu^{D_i}}$$

- Si $D_i < 0$, es decir, si el acoplamiento/interacción es no renormalizable (pp. 712-713), entonces g_i decrece con el flujo de renormalización (hacia el IR). Este tipo de interacciones se vuelven entonces menos y menos importantes a bajas energías, y por esta razón, se conocen como acoplamiento/interacciones irrelevantes. A veces queremos considerar el comportamiento en la dirección opuesta, yendo hacia altas energías, y decimos entonces que las interacciones no renormalizables son irrelevantes en el IR y relevantes en el UV (en inglés, "UV relevant"); mientras que las interacciones súper-renormalizables son relevantes en el IR e irrelevantes en el UV (en inglés, "UV irrelevant").

- Si $D_i = 0$, es decir, si el acoplamiento/interacción es estrictamente renormalizable (p. 721), entonces g_i no cambia con el flujo de renormalización. En este caso, intermedio entre

los 2 anteriores, decimos que los acoplamiento/interacciones son marginales.

Un punto muy importante es que, tal como nuestra clasificación de los acoplamiento como super-renormalizable, no renormalizable o estrictamente renormalizable a partir de solo análisis dimensional es apenas una primera aproximación ("primitiva", "superficial", o "por cortes de potencias") dentro de la expansión perturbativa, y puede sufrir cambios al tomar en cuenta correcciones cuánticas, la categorización de un acoplamiento/interacción como relevante, irrelevante o marginal basada únicamente en análisis dimensional es solo una primera aproximación, válida a nivel árbol (nivel clásico) en la expansión perturbativa en torno a un punto fijo ^{← teoría libre} gaussiano, y puede sufrir cambios al tomar en cuenta lazos (correcciones cuánticas).

Los efectos de los lazos son en general más inmediatos y notorios para los acoplamiento marginales, que en ausencia de correcciones serían absolutamente constantes. Con correcciones, ellos pueden:

- Pasar a ser lentamente crecientes, en cuyo caso decimos que el acoplamiento/interacción es marginamente relevante ("marginally relevant").
- Pasar a ser lentamente decrecientes, en cuyo caso hablamos de un acoplamiento/interacción marginamente irrelevante.
- Mantenerse constantes, en cuyo caso nos referimos al acoplamiento/interacción como exactamente o verdaderamente marginal.

(Existen posibilidades más dramáticas. P.ej, un acoplamiento inicialmente irrelevante que se vuelve relevante se llama "peligrosamente relevante".)

Para empezar a entender las correcciones cuánticas de manera más concreta, pensemos en alguna amplitud $\Gamma(p, c, g, m_{\text{frr}})$, donde indicamos la dependencia de una escala "experimental" global p , posibles ángulos o cocientes de energías denotados colectivamente como c , acoplamientos adimensionales g , y las masas físicas (u otras escalas intrínsecas) m_{frr} . (Por ahora, seguiremos restringiéndonos al caso con $\Lambda \rightarrow \infty$.) Si Γ tiene dimensión D , entonces por análisis dimensional podemos reescribir

$$\Gamma(p, c, g, m_{\text{frr}}) = p^D \Gamma(1, c, g, \frac{m_{\text{frr}}}{p}).$$

Esperaríamos entonces que en el límite de ultra-alta energía $p \rightarrow \infty$

la amplitud escala como una potencia (\leftrightarrow teoría conforme),

$$\Gamma(p, c, g, m_{\text{fir}}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} p^D \Gamma(1, c, g, 0).$$

equivalente al límite $m_{\text{fir}} \rightarrow 0$
a p fijo

Y esto resulta ser cierto para la amplitud a nivel árbol (nivel clásico);
¡pero no es lo que se encuentra de 1 kzo en adelante!

Pej., en nuestro cálculo de la autoenergía del fotón a 1 kzo, que luego usamos para pensar en un proceso de dispersión entre 2 objetos cargados e identificar al acoplamiento efectivo $\alpha_{\text{ef}}(\zeta^2)$, obtuvimos

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x-x^2) \ln\left(1 - (x-x^2) \frac{p^2}{m_{\text{fir}}^2}\right)$$

pp. 754-755

↑
D=2

potencia de p esperada

p. 802
 $p \gg m_{\text{fir}} \rightarrow \frac{e^2}{12\pi^2} \left\{ \ln\left(-\frac{p^2}{m_{\text{fir}}^2}\right) - 5/3 + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\text{fir}}^2}{p^2}\right) \right\}$

Y, aunque no lo resaltaré en su momento, en φ^4 obtuvimos un comportamiento similar: la amplitud de dispersión $2 \rightarrow 2$

$$iM(s, t) = -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_{\text{fir}}^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{s-4m_{\text{fir}}^2} + \sqrt{s}}{\sqrt{s-4m_{\text{fir}}^2} - \sqrt{s}}\right) + s \rightarrow t + s \rightarrow u - 2 \right]$$

pp. 676-677

↑
D=0

$s \gg m_{\text{fir}}^2 \rightarrow -\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \ln\left(-\frac{s}{m_{\text{fir}}^2}\right) + \dots$

Claramente, la aparición de estos factores de $\ln\left(\frac{p^2}{m_{\text{fijo}}^2}\right)$ para $p \rightarrow \infty$ con m_{fijo} fija impide el reemplazo $\Gamma(1, c, g, \frac{m_{\text{fijo}}}{p}) \rightarrow \Gamma(1, c, g, 0)$, e implica además que el límite $m_{\text{fijo}} \rightarrow 0$ con p fija es singular.

¿De dónde salieron estos logaritmos grandes? Si

reparamos nuestros cálculos, encontramos que provienen de las divergencias logarítmicas y de la manera específica en que hemos definido el acoplamiento renormalizado. P.ej., en φ^4 ,

[21: 23/04/19

obtuvimos en las pp. 671-677

$$iM(s, t) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$= -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \{ I(s) + I(t) + I(u) \} - i\delta\lambda^{(1)}$$

con

$$I(s) = \frac{i}{8\pi^2} \left[\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - 1}\right) + 1 \right]$$

con $\tilde{\Gamma}_2$ habíamos optado por usar $m = m_{\text{fijo}}$

↑ singular cuando $m \rightarrow 0$ ↑

Luego imponemos nuestra condición de renormalización

$$-i\lambda = iM(s=4m^2, t=0, u=0) = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \{ I(4m^2) + 2I(0) \} - i\delta\lambda^{(1)}$$

↑ esquema OS: singular cuando $m \rightarrow 0$

$$I(s) = \frac{i}{8\pi^2} \left[\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - 1}\right) + 1 \right]$$

deduciendo entonces que

$$i\delta\lambda^{(1)} = \frac{\lambda^2}{2} \left\{ I(4m^2) + 2I(0) \right\} = \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \underbrace{\left[\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) + 0 + 1 + 2\left(\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - 1 + 1\right) \right]}_{3\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) + 1}$$

Debido que (pp. 652) $\delta\lambda \equiv \cancel{Z}^{\rightarrow 1} \lambda_0 - \lambda$, con esta definición

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left[3\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - 1 \right] \text{ es singular cuando } M = m_{\text{fijo}} \rightarrow 0.$$

Lo anterior nos llevó a

$$iM(s,t) = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \left[\cancel{3\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)} + 3 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - 1}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{t}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{t}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{t}} - 1}\right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{u}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{u}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{u}} - 1}\right) - \cancel{3\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)} - 1 \right],$$

donde se cancela la divergencia UV; pero se preserva la singularidad cuando $m \rightarrow 0$, y por tanto el logaritmo grande cuando $|s| \gg m^2$. En resumen, nuestro esquema de reparametrización reemplazó $\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{s}{m^2}\right)$.

Consideremos en cambio lo que ocurre si abandonamos el esquema OS y definimos λ a una escala de renormalización μ arbitraria, pidiendo p.ej. que

$$-i\lambda(\mu) = \overbrace{iM(s=t=u=-\mu^2)}^{\tilde{\Gamma}_4} = -i\lambda_{\text{OS}} + \frac{i\lambda_{\text{OS}}^2}{16\pi^2} \left[2 - \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right].$$

Región euclídea, para garantizar que λ es real (recordar que para s, t ó $u > 4m^2$ la amplitud tiene un corte). Aquí $s+t+u \neq 4m^2$: estamos fuera de la capa de masa. pp. 671-672

$$-i\lambda(\rho) = -i\lambda_{05} + \frac{i\lambda_{05}^2}{16\pi^2} \left[2 - \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1} \right) \right]$$

Para $\mu \sim m$, esto es $\lambda(\mu) \sim \lambda_{05} - \frac{\lambda_{05}^2}{32\pi^2} \left[4 - 3\sqrt{5} \ln \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \right) \right] \sim \lambda_{05}$; pero para $\mu \gg m$,

$$\lambda(\mu) \simeq \lambda_{05} + \frac{3\lambda_{05}^2}{32\pi^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \quad \text{crece logarítmicamente con } \mu.$$

Invirtiendo esta relación,

$$\lambda_{05} \simeq \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{3\lambda}{8\pi^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right)}}{\frac{3}{16\pi^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right)} \simeq \lambda - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right),$$

encontramos que para $-s, -t, -u \gg m^2$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_4 &\simeq -i \left(\lambda_{05} + \frac{\lambda_{05}^2}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{-s}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{-t}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{-u}{m^2} \right) \right] \right) \\ &\simeq -i \left(\lambda - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{-s}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{-t}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{-u}{m^2} \right) \right] \right) \\ &= -i \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{-s}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{-t}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{-u}{m^2} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Aquí vemos claramente que, mientras que en términos de λ_{05}

tenemos logaritmos grandes si $-s, -t$ ó $-u \gg m^2$, cuando

reescribimos la amplitud en términos de λ , incluso si

$-s, -t$ ó $-u \gg m^2$ NO tenemos logaritmos grandes si elegimos

$\mu \sim |s|, |t|, |u|$ (en particular, para $s=t=u=-\mu^2$ tenemos $iM = -i\lambda$,

por definición ✓).

Por supuesto, dado que μ es una escala completamente arbitraria, nuestras predicciones no pueden depender de la elección de μ : la dependencia explícita de μ que vemos en $\tilde{\Gamma}_4$ es compensada/cancelada por la dependencia implícita $\lambda = \lambda(\mu)$. Lo que hemos hecho, entonces, es simplemente escribir los logaritmos grandes dentro de la definición de λ .

Puede parecer que esto no es un gran logro; pero la idea importante es que, desde el punto de vista físico, en realidad lo que nos interesa es este acoplamiento "corriente" (en inglés, "running coupling") $\lambda(\mu)$ y no el acoplamiento fijo $\lambda_{05} \sim \lambda(\mu \sim m)$, porque es $\lambda(\mu)$ quien determina la validez de la expansión perturbativa para un proceso en energía "experimental" $p \sim \mu$. En efecto, hemos visto

que esquemáticamente $\tilde{\Gamma}_4 \sim -i\lambda_{05} - i\lambda_{05}^2 \left[\ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \text{cte.} \right] + \mathcal{O}(\lambda_{05}^3)$, y

al examinar los términos con más lazos se encuentra que

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_4 &\sim -i\lambda_{05} - i\lambda_{05}^2 \left[\ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \text{cte.} \right] - i\lambda_{05}^3 \left[\ln\left(\frac{-s}{m^2}\right)^2 + \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \text{cte.} \right] + \dots \\ &\sim -i\lambda - i\lambda^2 \left[\ln\left(\frac{-s}{\mu^2}\right) + \text{cte.} \right] - i\lambda^3 \left[\ln\left(\frac{-s}{\mu^2}\right)^2 + \ln\left(\frac{-s}{\mu^2}\right) + \text{cte.} \right] + \dots, \end{aligned}$$

así que lo que necesitamos para que la expansión perturbativa

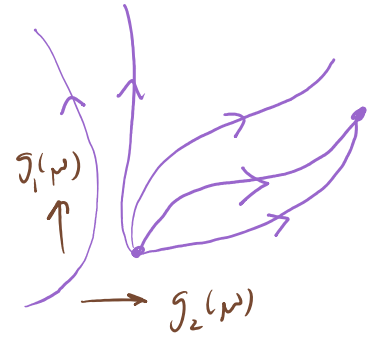
ses válidas es que $\lambda(\mu \sim p) \ll 1$, no que $\lambda_{or} \ll 1$.

Habríamos encontrado ya esta misma idea para QED en la p.802, donde hablamos de un acoplamiento efectivo $\alpha_{ef}(q^2) \sim \alpha_{or} + \alpha_{or}^2 \ln\left(\frac{q^2}{m^2}\right)$. Regresaremos a ese ejemplo en detalle más adelante; pero por ahora, nos sirve para empezar a entender que la idea de un acoplamiento corriente no es una peculiaridad de ϕ^4 , sino una propiedad genérica de las teorías de campo.

En cualquier teoría de campos, el punto principal es que, cuando reportamos las predicciones en términos de acoplamientos corrientes $g_i(\mu)$, para seguirle la pista a los logaritmos potencialmente grandes basta con seguirle la pista a los $g_i(\mu)$. En particular, para saber si las amplitudes/correladores a ultra-alta o ultra-baja energía en verdad se aproximan a una ley de potencia (tal como corresponde a una teoría conforme), bastará con preguntarnos si los acoplamientos corrientes se aproximan a valores constantes cuando $\mu \rightarrow \infty$ ó 0 : $g_i(\mu) \rightarrow g_i^*$,

es decir, si llegamos a un punto fijo
del grupo de renormalización.

LIB: 26/10/17



Volviendo a la teoría φ^4 , ya que nos queda claro que el acoplamiento corriente $\lambda(\mu)$ es de mucho interés físico, es útil tener presente que podemos obtener su relación con el acoplamiento desnudo $\lambda_0(\Lambda)$ directamente a partir de nuestra condición de renormalización

$$\tilde{\Gamma}_4(s=t=u=-\mu^2) = -i\lambda,$$

sin invocar jamás a λ_{05} . Usando la expresión para $iM = \tilde{\Gamma}_4$ en la p. 842,

$$\tilde{\Gamma}_4(s,t,u) = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ I(s) + I(t) + I(u) \right\} - i\delta\lambda^{(1)}$$

$$\text{con } I(s) = \frac{i}{8\pi^2} \left[\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - 1}\right) + 1 \right],$$

esta condición implica que

$$\delta\lambda^{(1)} = \frac{-i3\lambda^2}{2} I(-\mu^2) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right\},$$

y en ello tenemos $\lambda_0 = \frac{\lambda + \delta\lambda}{z^2}$ (p. 649, ver p. 855).

Para completar la especificación de nuestro nuevo esquema de

renormalización, nos falta definir el parámetro de masa $m(\mu)$ y el campo renormalizado φ (o equivalentemente, $Z(\mu)$).

Podemos elegir p.ej. las condiciones (cf. p.658)

↑
un
aproximación
más

$$\tilde{\Gamma}_2(p^2) \Big|_{p^2 = -\mu^2} = 0, \quad \frac{d\tilde{\Gamma}_2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2 = -\mu^2} = 0.$$

Esto equivale a pedir que $\tilde{G}_2(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2}$ en $p^2 = -\mu^2$, NO en m^2 (nuevamente nos enfocamos en la región euclidiana $p^2 < 0$ para no toparnos con el arte raval proveniente de estados multipartículas). Utilizando el resultado que tenemos en la p.665,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_2 &= \cancel{0} + \cancel{\frac{1}{1}} + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= -\frac{i\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \right] + i(\delta Z^{(1)} - \delta m_{(1)}^2) + \mathcal{O}(\lambda^2), \end{aligned}$$

nuestras condiciones implican que

$$\delta Z^{(1)} = 0, \quad \delta m_{(1)}^2 = -\frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \right],$$

y por tanto $\tilde{\Gamma}_2 = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$ (tal como ocurrió en el

esquemas OS). Esto significa que a 1 lazo el propagador sigue siendo $G_2(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Delta m^2(p^2)}$ (donde $\Delta m^2 \equiv i\tilde{\Gamma}_2$, pp. 658, 678), con lo cual de hecho $m = m_{\text{fís}}$ a este orden. De 2 lazos en adelante sí se obtiene $Z \neq 1$, $m \neq m_{\text{fís}}$ (lo cual sucede ya a 1 lazo en otras teorías, como φ^3).

En este nuevo esquema de renormalización, podemos calcular cualquier correlador $G_N(x_1, \dots, x_N) = \langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \} | \Omega \rangle$ como una expansión perturbativa en potencias de los acoplamientos κ -dimensionales

$$g_4(\mu) \equiv \lambda(\mu) \quad , \quad g_2(\mu) \equiv \frac{m^2(\mu)}{\mu^2} \quad ,$$

siempre y cuando ocurra que $g_2, g_4 \ll 1$.

Independientemente de si nuestro análisis es perturbativo o no, el hecho de que la escala de renormalización μ es arbitraria implica que **nuestras predicciones físicas NO pueden depender de μ** . Esto es completamente obvio antes de renormalizar, puesto que la teoría se define con el corte Λ y los acoplamientos desnudos $m_0(\Lambda)$, $\lambda_0(\Lambda)$, que no hacen referencia alguna a μ .

En particular, los correladores de nudos

$$G_N^{\circ}(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_N) \} | \Omega \rangle$$

← no nivel árbol

dependen de Λ ; pero NO de μ . Dado que $\varphi(x) \equiv \frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{Z(\mu)}}$,
podemos escribir

$$Z(\mu)^{N/2} \langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

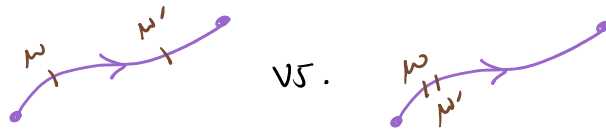
$$\equiv G_N(x; g_2(\mu), g_4(\mu), \mu) \qquad \equiv G_N^{\circ}(x; \Lambda) \quad \leftarrow \text{depende de } \lambda_0(\Lambda), m_0(\Lambda)$$

con lo cual vemos que para cualquier μ, μ' y N se debe cumplir que

$$Z(\mu)^{N/2} G_N(x; g_2(\mu), g_4(\mu), \mu) = Z(\mu')^{N/2} G_N(x; g_2(\mu'), g_4(\mu'), \mu').$$

Esta es la ecuación básica del grupo de renormalización. Ella indica cómo debemos cambiar los $g_i(\mu)$ y $Z(\mu)$ cuando cambiamos μ , para seguir hablando de la misma teoría (mismos $\Lambda, m_0(\Lambda), \lambda_0(\Lambda)$).
↔ definición de φ renormalizado

A través de L5Z (p.444), garantiza en particular que las amplitudes de dispersión, aún si las expresamos en términos de $g_2(\mu), g_4(\mu)$ y μ , NO tienen una dependencia netas de μ . (OJO: ¡no debemos confundir $Z(\mu)$ con Z_0 , el residuo de $\tilde{G}_2^{(0)}(p^2)$ en $p^2 = m_{\text{fis}}^2$, que era a lo que nos referíamos como Z en las fórmulas de la p.444!)



En lugar de pensar en un cambio finito de escala $\mu \rightarrow \mu'$, es útil pensar en un cambio infinitesimal $\mu \rightarrow \mu + \delta\mu$. En este caso, la independencia de μ se expresa como una ecuación diferencial:

$$0 = \frac{d}{d\mu} G_N^0(x; \Lambda) = \frac{d}{d\mu} \left[z(\mu)^{N/2} G_N(x; g_2(\mu), g_4(\mu), \mu) \right]$$

$$= \frac{N}{2} z^{\frac{N}{2}-1} \frac{\partial z}{\partial \mu} G_N + z^{N/2} \frac{\partial g_2}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_2} + z^{N/2} \frac{\partial g_4}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_4} + z^{N/2} \frac{\partial G_N}{\partial \mu}.$$

Dividiendo entre $z^{N/2}$ y multiplicando por μ , esto es

$$\mu \frac{\partial G_N}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_4} + \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_2} + \frac{N}{2} \frac{\mu}{z} \frac{\partial z}{\partial \mu} G_N = 0.$$

Es habitual definir por cada acoplamiento una función beta,

$$\beta_2 \equiv \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu}, \quad \beta_4 \equiv \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} \quad \begin{array}{l} \text{tasa de} \\ \text{cambio de} \\ \text{acoplamiento} \end{array} \quad \left(\leftrightarrow \beta_i = \frac{\partial g_i}{\partial(\ln \mu)} \right),$$

y por cada campo, una dimensión anómala

$$\gamma \equiv \frac{\mu}{z} \frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial(\ln z)}{\partial \mu} \quad \begin{array}{l} \text{dependencia} \\ \text{extra baja} \\ \text{reescalamiento} \end{array} \quad \left(\leftrightarrow \gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln z)}{\partial(\ln \mu)} \right).$$

Con esta notación, tenemos entonces que

$$\mu \frac{\partial G_N}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_4} + \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_2} + \frac{N}{2} \frac{\mu}{z} \frac{\partial z}{\partial \mu} G_N = 0$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N\gamma \right) G_N(x; g_2, g_4, \mu) = 0$$

La ecuación de Callan-Symanzik (relación no perturbativa).

122: 06/05/16

Claramente, una transformada de Fourier conmuta con los derivados $\partial_\mu, \partial_{g_4}, \partial_{g_2}$, así que esta misma ecuación es válida para los correladores en espacio de momentos, $\tilde{G}_N(p; g_2, g_4, \mu)$.

La ecuación también aplica si en lugar de correladores de los campos básicos $\varphi(x)$ consideramos correladores de operadores

compuestos como $\varphi^2(x)$ o $\varphi \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi(x)$, solo que para cada operador $O(x)$ debemos usar el factor de renormalización y

la dimensión anómala correspondiente, $O(x) \equiv \frac{\tilde{O}_0(x)}{\sqrt{Z_O(\mu)}}$ y

$$\gamma_O \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln Z_O)}{\partial(\ln \mu)}. \text{ P.ej. ,}$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + \gamma_{\varphi^2} + 2\gamma_\varphi \right) \langle \Omega | T \{ \varphi^2(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \} | \Omega \rangle = 0.$$

(Si elegimos definir Z_{φ^2} a través de $\varphi^2(x) \equiv \frac{\varphi_0^2(x)}{Z_{\varphi^2}}$, entonces

calcularemos la dimensión anómala usando $\gamma_{\varphi^2} \equiv \frac{\partial(\ln Z_{\varphi^2})}{\partial(\ln \mu)}$, o si definimos

$\varphi^2(x) \equiv Z_{\varphi^2} \varphi_0^2(x)$, entonces obviamente $\gamma_{\varphi^2} \equiv -\frac{\partial(\ln Z_{\varphi^2})}{\partial(\ln \mu)}$.)

La idea básica aquí es que cuando nos proponemos definir un operador acoplado, como $\varphi^4 \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi(x)$, encontramos divergencias adicionales por el hecho de que tenemos varias instancias del operador de campo en el mismo punto x , así que por ej. $\varphi^4 \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi(x) \neq \lim_{x_n \rightarrow x} \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \partial_\mu \varphi(x_5) \partial^\mu \varphi(x_6) = \frac{\varphi_0(x)^4 \partial_\mu \varphi_0(x) \partial^\mu \varphi_0(x)}{(\sqrt{Z_\varphi})^6}$.

Por esta razón, los operadores renormalizadores $\mathcal{O}_i(x)$ (incluido el propio $\varphi(x)$) NO escalan bajo cambios en μ simplemente como su dimensión ingenua indicaria, y la dimensión anómala γ_i justamente nos da la diferencia en el exponente. Como ejemplo, calcularemos γ_φ en las pp. 880-1. Y por otra parte, en las pp. 868-9 veremos que, en torno a un punto fijo:

$$\mathcal{O}_i(x) \text{ a escala } \mu \xrightarrow{x \rightarrow \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)x} \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{\Delta_i} \mathcal{O}_i(x) \text{ a escala } \mu' = \mu + \delta\mu,$$

↖ en inglés: scaling dimension

donde la dimensión de escalamiento Δ_i está dada por

$$\Delta_i \equiv D_i - \gamma_i$$

↖ dimensión clásica $D_i = d - \Delta_i$ ↗ dimensión de λ_i correspondiente

$S = \int d^d x \lambda_i \mathcal{O}_i(x)$

↖ dimensión anómala de \mathcal{O}_i

Y de hecho, la función beta β_i asociada al acoplamiento $g_i(\mu) \equiv \frac{\lambda_i(\mu)}{\mu^{\Delta_i}}$ está relacionada con la dimensión anómala γ_i para el operador $\mathcal{O}_i(x)$.

En general, la situación se complica porque para eliminar todas las divergencias, al renormalizar un operador \mathcal{O}_i se requieren contratérminos que involucren a todos los operadores en los mismos números cuánticos e igual o menor dimensión, así que distintos operadores se mezclan bajo el flujo de renormalización. [Ver p.ej. Perkin sec. 12.4, o mejor, Collins capítulo 6.] P.ej., se puede tener

$$[\varphi^4](x) \equiv Z_{\varphi, \varphi}^{-1} \varphi_0^4(x) + Z_{\varphi, \partial^2}^{-1} (\partial \varphi_0(x))^2 + Z_{\varphi, \varphi^2}^{-1} \mu^2 \varphi_0^2(x).$$

↗ denota operador renormalizado (en algún esquema de)

Por esta razón, en general la renormalización de operadores compuestos se da a través de una ecuación matricial,

$$\underset{\text{desnudo}}{\mathcal{O}_0^i(x)} = \sum_j Z_{\mathcal{O}}^{ij}(\mu) \underset{\text{renormalizado}}{\mathcal{O}^j}, \quad (\text{cf. } \varphi_0(x) = \sqrt{Z} \varphi(x))$$

Esto sucede igualmente a una matriz de dimensiones anómalas

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} \equiv \sum_k [Z_{\mathcal{O}}^{-1}(\mu)]^{ik} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_{\mathcal{O}}^{kj}(\mu),$$

que es lo que figurará en la ecuación de Callan-Johnson (matricial).

Esto implica en particular que solo ciertas combinaciones lineales específicas de los \mathcal{O}_i tienen una dimensión de escalamiento Δ_i

bien definida: aquellas combinaciones que son eigenvectores de $\gamma_{\mathcal{O}}^{ij}$.

Regresemos ahora a la ecuación de Callan-Tymanzik para φ^4 ,

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N\gamma_\varphi \right) \tilde{G}_N(p; g_2, g_4, \mu) = 0.$$

Podemos determinar las funciones β y γ usando los resultados que obtuvimos ya para la renormalización de esta teoría a 1 lazo, en el esquema en la escala deslizante μ .

De la p. 848 sabemos que $\delta Z^{(1)} = 0$, así que a este orden todavía $\tilde{z} = 1$, y por tanto la dimensión anómala

$$\gamma_\varphi = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{\tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \mu} \Big|_\Lambda = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

De la p. 847 tenemos Λ fijo y por tanto también $\lambda_0(\Lambda)$, $m_0(\Lambda)$

$$\delta\lambda^{(1)} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right\},$$

que usando $\delta\lambda \equiv \tilde{z} \lambda_0 - \lambda$ (p. 649) implica que

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right\} + \mathcal{O}(\lambda^3),$$

o en sentido inverso (ver inverso análogo en la p. 844),

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right\} + \mathcal{O}(\lambda_0^3).$$

Si por simplicidad consideramos primero el caso no masivo,

$$m=0 \iff g_2 \equiv \frac{m^2}{\mu^2} = 0 \quad (\iff m_{\text{fir}} = 0, \text{ p. 849})$$

esto se reduce a

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \lim_{m \rightarrow 0} \left\{ \underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}}}_{1} \underbrace{\ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right)}_{\ln\left(\frac{2}{\frac{2m^2}{\mu^2}}\right) = 2 \ln\left(\frac{\mu}{m}\right)} \right\},$$

$$\circ \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right). \quad \underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \ln\left(\frac{\mu}{m}\right)}_{\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)} \quad \text{No singular } \checkmark \quad (\text{cf. p. 843})$$

De aquí podemos concluir que la función beta para el acoplamiento

cuántico $g_4 \equiv \lambda$ es

$$\beta_4 = \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} \Big|_{\lambda} = \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} = \frac{3g_4^2}{16\pi^2}.$$

$\lambda_0(\mu), m_0(\mu)$ fijos

← diferencia entre λ_0 y $\lambda = g_4$
es de $\mathcal{O}(\lambda^2)$

Y evidentemente, en este caso la otra función beta es $\beta_2 = \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} = 0$.

Conociendo γ , β_4 y β_2 , podemos verificar que la ecuación de Callan-Symanzik

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N\gamma_\varphi \right) \tilde{G}_2(p; g_2, g_4, \mu) = 0.$$

se satisface para los 2 correladores renormalizados que ya tenemos a nuestra disposición a 1 lazo. Para

$$\tilde{G}_2(p^2) = \frac{i}{p^2 - \underbrace{m^2 - \Delta m^2(p^2)}_{\substack{\text{p. 658 } i\tilde{\Gamma}_2 = 0 \\ \text{p. 843}}}} = \frac{i}{p^2},$$

obviamente

$$\mu \frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial g_2} + 2\gamma_\varphi \tilde{G}_2 = 0. \quad \checkmark$$

Por otra parte, de la p. 847 sabemos que

$$\tilde{\Gamma}_4 = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ I(s) + I(t) + I(u) \right\} - i\delta \lambda^{(1)} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

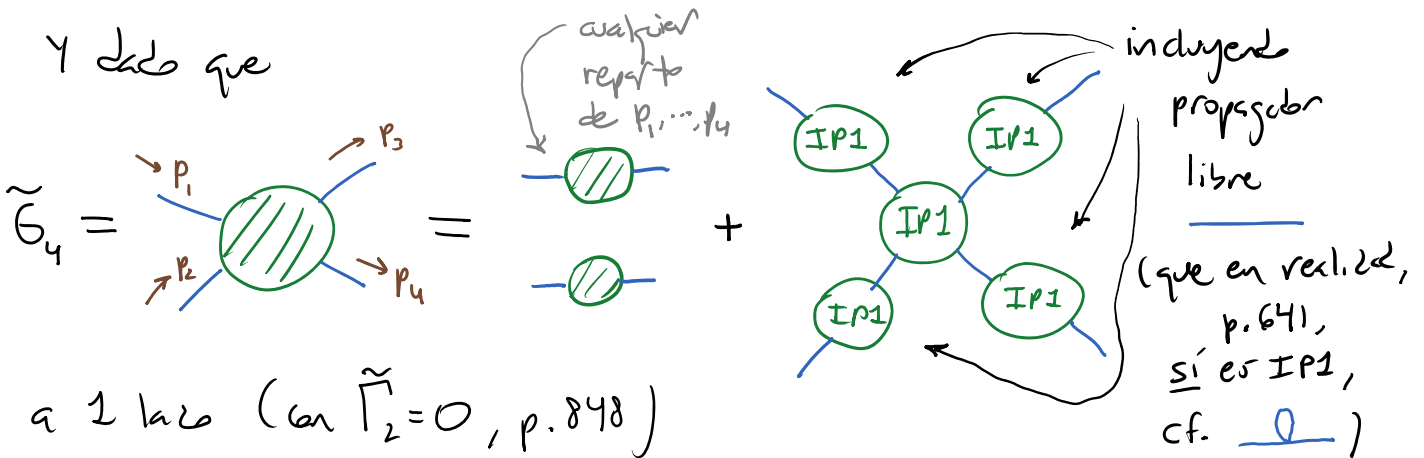
$$\text{con } I(s) = \frac{i}{8\pi^2} \left[\underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - 1}\right) + 1}_{\substack{m \rightarrow 0 \\ \rightarrow \ln\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{s}}\right) \quad (\text{p. 856})}} \right],$$

$$\text{y } \delta \lambda^{(1)} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right)}_{\substack{m \rightarrow 0 \\ \rightarrow \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}} \right\},$$

es decir,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_4 &= -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{s}}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{t}}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{u}}\right) + 3 - 3\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \right\} \\ &= -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{s}}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{t}}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{u}}\right) + 3 \right\} \quad \text{cf. p.844} \end{aligned}$$

Y dado que



$$\tilde{G}_4 = \underbrace{\tilde{G}_2(p_1^2) \tilde{G}_2(p_2^2)}_{\text{podemos ignorar en Callan-Symanzik (a este orden)}} + \text{otros disconexos} + \tilde{G}_2(p_1^2) \tilde{G}_2(p_2^2) \tilde{G}_2(p_3^2) \tilde{G}_2(p_4^2) \tilde{\Gamma}_4$$

$$\approx \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \frac{i}{p_3^2} \frac{i}{p_4^2} \left[-ig_4 + \frac{ig_4^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\mu}{s}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{t}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{u}\right) + 3 \right\} \right].$$

Podemos ver entonces que

$$\begin{aligned} &\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + 4\gamma_4 \right) \tilde{G}_4 \quad \beta_4 \text{ p.856} \\ &= \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \frac{i}{p_3^2} \frac{i}{p_4^2} \left[\frac{ig_4^2}{16\pi^2} \left\{ 3 \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial(\ln \mu)} \right\} + \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \left\{ -i + \sigma(g_4) \right\} \right] \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

19: 31/10/17

De hecho, en la teoría con $g_2=0$, cuando ya tenemos en mano 2 correladores renormalizados, como en este caso \tilde{G}_2 y \tilde{G}_4 , en lugar de proceder como en las pp. 855-856, determinando explícitamente $\lambda_0(\lambda)$ y $\gamma(\lambda)$ y luego invirtiendo para obtener $\lambda(\lambda_0, \mu)$ y $\gamma(\lambda_0, \mu)$ y calcular γ_φ y β_4 directamente a partir de sus definiciones, un atajo es exigir que \tilde{G}_2 y \tilde{G}_4 satisfagan la ecuación de Callan-Symanzik, y a partir de ello deducir γ_φ y β_4 en términos de g_4 , sin involucrar a λ y $\lambda_0(\lambda)$:

$$0 = \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + 2\gamma_\varphi \right] \tilde{G}_2 \Rightarrow \boxed{\gamma_\varphi = 0}, \checkmark$$

y $\frac{i}{p^2}$

$$0 = \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + 4\gamma_\varphi \right] \tilde{G}_4$$

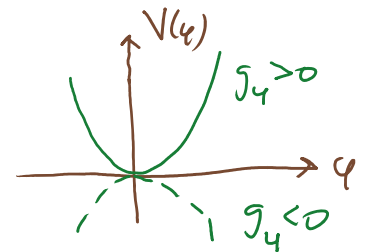
$$\frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \frac{i}{p_3^2} \frac{i}{p_4^2} \left[-ig_4 + \frac{ig_4^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{t}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{u}\right) + 3 \right\} \right]$$

$$= \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \frac{i}{p_3^2} \frac{i}{p_4^2} \left[\frac{ig_4^2}{16\pi^2} \{3\} + \beta_4 \{-i + O(g_4)\} \right] \Rightarrow \boxed{\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2}}. \checkmark$$

Una característica que podemos ver en estos resultados, y que es completamente genérica, es que **las funciones beta y las dimensiones anómalas dependen únicamente de los acoplamientos**: $\beta_i = \beta_i(g_j)$, $\gamma_c = \gamma_c(g_j)$. La razón es que β_i y γ_c son adimensionales, y al estar asociados a correladores renormalizados G_N , NO pueden depender de Λ , así que, por análisis dimensional, tampoco pueden depender de μ (puesto que no hay otras escalas involucradas: m ya figura como $g_2 \equiv \frac{m}{\mu}$, y ciertamente β_i y γ_c no dependen de las posiciones x_n o momentos p_n).

El hecho de que $\gamma_\varphi \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln Z_\varphi)}{\partial(\ln \mu)} = 0$ nos dice que (a 1 lazo) $Z_\varphi = 1$, y por tanto el campo renormalizado $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ no tiene dependencia de μ , de modo que su dimensión de escalamiento sigue siendo $\Delta_\varphi = D_\varphi = 1$.

Sabemos que necesitamos $g_4 = \lambda \geq 0$ para que la teoría tenga un vacío estable,



y nuestro resultado $\beta_4 \equiv \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} = \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \geq 0$ nos dice que g_4 crece con la energía μ , o equivalentemente, decrece en el flujo de renormalización. En otras palabras, el acoplamiento

$g_4 \equiv \lambda$ es marginally irrelevante (p. 840).

Más explícitamente, la solución exacta de la ecuación de flujo

$$\mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} = \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{dg_4}{g_4^2} = \frac{3d\mu}{16\pi^2\mu} \quad \longleftrightarrow \quad \int \frac{dg_4}{g_4^2} = \int \frac{3d\mu}{16\pi^2\mu}$$

es

$$g_4(\mu) = \frac{g_4(\mu_{\text{ref}})}{1 - \frac{3g_4(\mu_{\text{ref}})}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}\right)}$$

← con μ_{ref} una escala arbitraria de referencia (= cte. de integración = dato inicial)

como es fácil verificar:

$$\mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} = \frac{-\cancel{\mu} g_4(\mu_{\text{ref}}) \left(-\frac{3g_4(\mu_{\text{ref}})}{16\pi^2 \cancel{\mu}}\right)}{\left(1 - \frac{3g_4(\mu_{\text{ref}})}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}\right)\right)^2} = \frac{3g_4^2(\mu)}{16\pi^2} \quad \checkmark$$

Si nos creamos literalmente este resultado, vemos que no solo ocurre que g_4 crece con la energía (decrece con el flujo de renormalización), sino que de hecho diverge a la escala a la cual se hace cero el denominador, $\mu_\infty \equiv \mu_{\text{ref}} \exp\left(\frac{16\pi^2}{3g_4(\mu_{\text{ref}})}\right)$, divergencia conocida como el polo de Landau (¿y Pomerenchuk?).

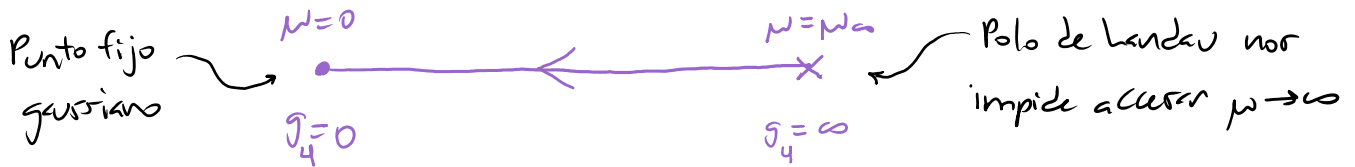
Con esta definición, podemos reescribir

$$g_4(\mu) = \frac{16\pi^2}{3 \ln(\mu_\infty/\mu)}, \quad \text{donde la divergencia es más evidente.}$$

← aquí μ_∞ juega el papel de cte. de integración

$$g_4(\mu) = \frac{16\pi^2}{3 \ln(\mu_0/\mu)}$$

El diagrama del flujo sería entonces:



Por supuesto, la expansión perturbativa se vuelve inválida cuando $g_4 \sim 1$, no digamos $g_4 = \infty$, así que NO podemos confiar en nuestro resultado a 1 lazo,

$$g_4(\mu) \approx \frac{g_4(\mu_{\text{ref}})}{1 - \frac{3g_4(\mu_{\text{ref}})}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}\right)} \quad \leftarrow \text{válido si } g_4(\mu) \ll 1$$

(aún si $g_4(\mu_{\text{ref}}) \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}\right) \sim 1$)

para predecir la existencia del polo de Landau.

Lo que podemos decir es que, aún si $g_4(\mu_{\text{ref}}) \ll 1$, $g_4(\mu)$ parece crecer sin límite conforme μ aumenta, predicando una

región de acoplamiento fuerte para $\mu \gtrsim \mu_0$. Es interesante notar

L23: 08/05/19

que, a pesar de que a nivel clásico nuestro teoría en el caso no masivo,

$g_2 = 0$, no tenía ninguna escala intrínseca m_{fir} (era invariante de escala),

a nivel cuántico el hecho de que g_4 corre con μ implica el surgimiento

de la escala intrínseca μ_0 . Este fenómeno se llama transmutación

dimensional: a partir del parámetro adimensional g_4 obtenemos μ_0 ,

en dimensión de masa (viola simetría: ejemplo de una "anomalía").

$$\mu_\infty \equiv \mu_{\text{ref}} \exp\left(\frac{16\pi^2}{3g_4(\mu_{\text{ref}})}\right)$$

A falta de otros escollos para comparar, distintos valores de μ_∞ (\leftrightarrow elecciones g_4) describen no diferentes teorías, sino diferentes elecciones de unidades. (Lo mismo tendríamos en la p. 830 para un solo campo libre con masa m.)

En principio, podría ocurrir que en la región de acoplamiento fuerte el flujo proviniere de un punto fijo UV, $g_4(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} g_4^* < \infty$; pero evidencias numéricas apuntan a que en $d=4$ esto No ocurre, de modo que la teoría ϕ^4 no está bien definida a altas energías. Si insistimos en tener $g_4(\mu_{\text{ref}}) > 0$ a algunos escollos finitos μ_{ref} , entonces para evitar que $g_4(\mu)$ explote tendremos que considerar la teoría con un corte físico Λ , que limite $\mu \leq \Lambda$ (posiblemente $\Lambda \sim \mu_\infty$). Si, por el contrario, queremos ser capaces de retirar el corte, teniendo $g_4(\infty) < \infty$, entonces tendremos $g_4(\mu_{\text{ref}}) = 0$ para cualquier μ_{ref} finitos. Esta condición se conoce como "trivialidad": en $d=4$, No existe la teoría ϕ^4 interactuante ($g_4(\mu) \neq 0$ para $\mu < \infty$) en el límite continuo ($\Lambda \rightarrow \infty$).

Todo lo anterior fue consecuencia de que el acoplamiento g_4 resultó ser marginamente irrelevante, es decir, las correcciones cuánticas lo hicieron dejar de ser marginal y pasar a ser irrelevante, decreciendo lentamente con el flujo de renormalización, o lo que es lo

mismo, crecer lentamente con la energía. Recordando (de la p. 838) que irrelevante es sinónimo de no renormalizable, lo que hemos visto se traduce en que, si bien la teoría ϕ^4 es (estrictamente) renormalizable por conteo de potencias, por efecto de los lazos (y no perturbativamente) resulta ser no renormalizable.

Evidentemente, la situación será análoga para cualquier teoría marginalmente irrelevante, o peor aún, irrelevante, es decir, para cualquier teoría que (por efectos cuánticos o directamente por conteo de potencias) sea no renormalizable. Este tipo de interacciones se vuelven despreciables a bajas energías; pero, a menos de que provengan de un punto fijo UV (es decir, a menos de que los $g_i(\mu)$ dejen de crecer), implican que la teoría no está bien definida a energías arbitrariamente altas, sino que debe considerarse en un conteo UV explícito $\Lambda < \infty$.

El verdadero problema con las teorías no renormalizables no es entonces el hecho de que en cada orden sucesivo de la expansión perturbativa den lugar a nuevas divergencias, que requieren infinitos contraterminos, sino que, a menos que los efectos de acoplamiento fuerte (normalmente fuera de nuestro escrutinio) generen un punto fijo UV,

NO están bien definidas en el límite continuo $\Lambda \rightarrow \infty$; no son "completas en el UV". Pero SÍ tienen sentido con un $\Lambda < \infty$.

Para tener este tema mejor ubicado, conviene listar los diferentes comportamientos posibles en una teoría de campos. Imaginemos que por alguna mágica razón conociéramos la función beta exacta para algún acoplamiento, $\beta(g)$. Opciones para la forma de esta función son:

a) Si $\beta(g)$ es ^{$g(\mu)$ creciente} positiva y creciente, y

$$\int_{g(\mu)}^{\infty} \frac{dg'}{\beta(g')} \equiv \ln\left(\frac{\mu_{\infty}}{\mu}\right) < \infty,$$

$\uparrow \equiv 25/24\mu^2$

entonces tenemos una singularidad a energía finita (polo de Landau):

$g(\mu) \rightarrow \infty$ en $\mu = \mu_{\infty} < \infty$, justo como en ϕ^4 a un lazo.

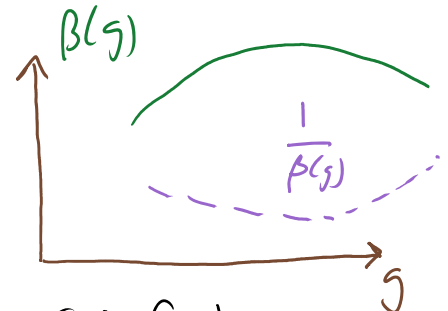
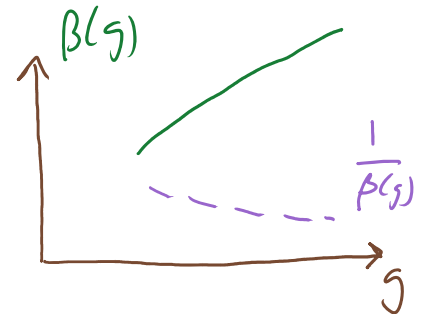
b) Si $\beta(g)$ es ^{$g(\mu)$ creciente} positiva; pero

$$\int_{g(\mu)}^{\infty} \frac{dg'}{\beta(g')} \equiv \ln\left(\frac{\mu_{\infty}}{\mu}\right) = \infty,$$

entonces tenemos una singularidad a energía infinita:

$g(\mu) \rightarrow \infty$ en $\mu \rightarrow \infty$.

En los casos a) y b) la teoría NO es completa en el UV.

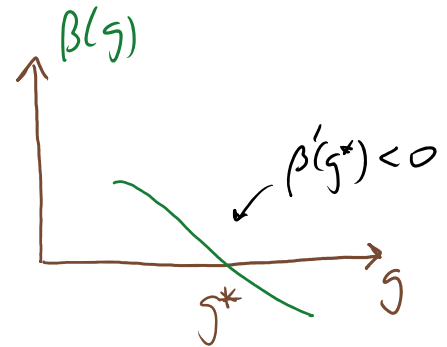


c) Si $\beta(g)$ inicia positiva; pero cruza cero en algún valor $g=g^*$, $\beta(g^*)=0$, entonces g^* es un

punto fijo estable (o atractivo) en el UV

(punto fijo UV) : $g(\mu) \rightarrow g^*$

cundo $\mu \rightarrow \infty$, ya sea desde $g < g^*$ (donde $\beta > 0$, indicando que $g(\mu)$ es creciente) o desde $g > g^*$ (donde $\beta < 0$, indicando que $g(\mu)$ es decreciente). La teoría sí es entonces completa, o "asintóticamente segura", en el UV, donde se vuelve conforme, y es interactuante.

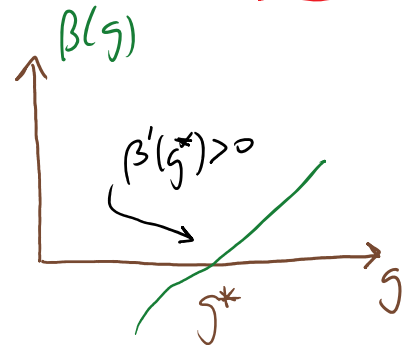


d) Si $\beta(g)$ inicia negativa; pero cruza cero en algún valor $g=g^*$, $\beta(g^*)=0$, entonces g^* es un

punto fijo estable (o atractivo) en el IR

(punto fijo IR) : $g(\mu) \rightarrow g^*$

cundo $\mu \rightarrow 0$, ya sea desde $g < g^*$ (donde $\beta < 0$, indicando que $g(\mu)$ crece conforme μ decrece) o desde $g > g^*$ (donde $\beta > 0$, indicando que $g(\mu)$ decrece al disminuir μ). El UV es inerte.



e) Si $\beta(g) < 0$ y cruza cero en $g^* = 0$

(o sea decir, $g=0$ es un punto fijo UV)

entonces la teoría es asintóticamente

libre: $g(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0$. La teoría

SI es entonces completa en el UV,

donde se vuelve conforme y libre. ¡Entendendolos bien su definición!

(En el IR, podríamos tener $g(\mu) \rightarrow \infty$ a $\mu_0 \leq \infty$ análogamente a los casos a) y b), o aproximarnos a otro punto fijo, como en d).)

f) Si $\beta(g) > 0$ y cruza cero en $g^* = 0$

(o sea decir, $g=0$ es un punto fijo IR)

entonces la teoría es libre en el IR

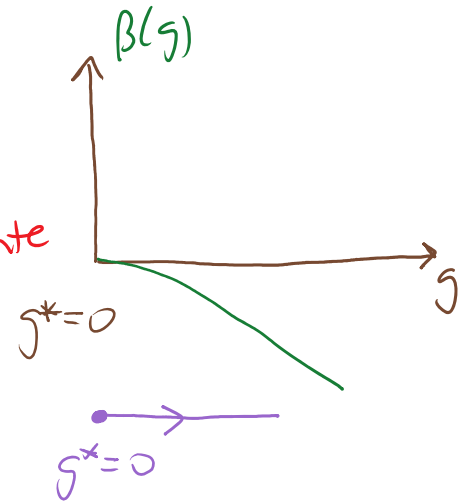
(en inglés, "IR free"):

$g(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0$ (tal como φ^4 en $m=0$).

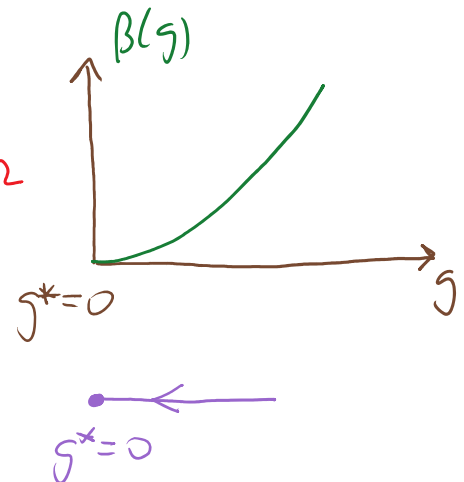
(En el UV, podríamos tener $g(\mu) \rightarrow \infty$

a $\mu_0 \leq \infty$, como en los casos a) y b), o aproximarnos a otro punto fijo, como en c).)

← límite $g^* \rightarrow 0$ del caso c)



← límite $g^* \rightarrow 0$ del caso d)



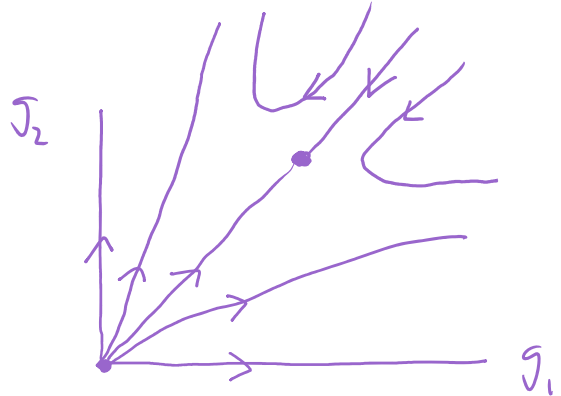
Por supuesto, cuando hay más de un acoplamiento, g_i ,

debe ocurrir que todo los $\beta_i(g_1^*, g_2^*, \dots) = 0$ para tener un punto fijo. P.ej., en una teoría con

2 acoplamientos y

$$\beta_1(g_1, g_2) = -g_1 + g_1 g_2,$$

$$\beta_2(g_1, g_2) = -g_2 + g_1 g_2,$$



tenemos 2 puntos fijos: uno gaussiano ($g_1 = g_2 = 0$), atractivo en el UV, y uno fuertemente acoplado ($g_1 = g_2 = 1$), atractivo en el IR. El flujo que intercala entre ambos denota una teoría que está bien definida a todo las energías.

En cualquier teoría, en la vecindad de un punto fijo g_i^* ($\beta_i(g_i^*) = 0$), es decir, $S = S_{g^*} + \int d^d x \delta g_j \tilde{O}_j(x)$, siempre podemos linearizar el flujo:

$$\beta_i(g^* + \delta g) = \omega \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g^* + \delta g} = A_{ij} \delta g_j + \mathcal{O}(\delta g_j^2).$$

CFI \nearrow \nwarrow det. (dependen de g_j^*)

Eligiendo una base para las fluctuaciones $\check{\delta} g_j \equiv C_{jk} \delta g_k$ que diagonalice a la matriz A_{ij} , esto es

$$\omega \left. \frac{\partial \check{\beta}_i}{\partial \check{g}_j} \right|_{\check{g}^* + \check{\delta} g_j} = (\Delta_i - d) \check{\delta} g_i + \mathcal{O}(\check{\delta} g_j^2) \Rightarrow \check{\delta} g_i(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega'} \right) \check{\delta} g_i(\omega'),$$

\nwarrow dimensión clásica de \check{O}_i $\int d^d x \check{\delta} g_i \check{O}_i$ cf. p. 153

donde $\Delta_i \equiv D_i - \gamma_i$ es la dimensión de escalamiento (o conforme) de $\check{O}_i(x)$.

Las Δ_i están entonces bien definidas en torno a un punto fijo

Dado ($\Delta_i = D_i$ en caso gaussiano), y $\Delta_i - d \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0$ indica $\tilde{\sigma}_i$ relevante
marginal -
irrelevante

[20:07/11/17]

↖ puede ser distinta para diferentes g^*

En cualquier teoría dada, si uno conoce las funciones β y γ , a partir de la ecuación de Callen-Symanzik se pueden hacer alguna inferencia sobre el comportamiento de los corretores. Siguiendo con el ejemplo de la teoría ϕ^4 no masiva, por análisis dimensional podemos escribir el propagador renormalizado en la forma

$$\tilde{G}_2(p^2) = \frac{i}{p^2} f(-p^2/\mu^2, g_4(\mu)) = -\frac{i}{|p|^2} f(|p|^2/\mu^2),$$

donde incluimos el signo menos ^{↖ omitir por ahora} porque nuevamente consideraremos momentos tipo espacio, $p^2 < 0$, y denotamos $|p| \equiv \sqrt{-p^2}$. En esta forma vemos que

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{G}_2(p^2) = -\mu \frac{i}{|p|^2} f'(|p|^2/\mu^2) \left(-\frac{2|p|^2}{\mu^3}\right) = \frac{2i}{\mu^2} f'(|p|^2/\mu^2)$$

$$y \quad |p| \frac{\partial}{\partial |p|} \tilde{G}_2(p^2) = \underbrace{+|p| \frac{2i}{|p|^3} f(|p|^2/\mu^2)}_{-2\tilde{G}_2(p^2)} - \underbrace{|p| \frac{i}{|p|^2} f'(|p|^2/\mu^2) \frac{2|p|}{\mu^2}}_{\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{G}_2(p^2)},$$

de modo que podemos reescribir la ec. de Callen-Symanzik (p. 852)

seguir restringiendo al caso no masivo, $g_2=0$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + 2\gamma_\varphi \right) \tilde{G}_2(p^2, g_4(\mu), \mu) = 0$$

en la forma (más cercana a lo que en realidad escribirían Callan y Symanzik)

$$\left(-|p| \frac{\partial}{\partial |p|} + \beta_4(g_4) \frac{\partial}{\partial g_4} - 2 + 2\gamma_\varphi(g_4) \right) \tilde{G}_2(p^2, g_4(\mu), \mu) = 0,$$

que nos informa sobre la dependencia de p a μ fija.

En el caso libre $\beta_4=0=\gamma_\varphi$, y la ecuación implica correctamente que $\tilde{G}_2 = -\frac{i}{|p|^2} = \frac{i}{p^2}$. En el caso interactuante, puede encontrarse la

solución exacta en términos de un acoplamiento que corre con

el momento $|p|$, $\bar{g}_4(|p|, g_4(\mu))$, de acuerdo con

$$|p| \frac{\partial}{\partial |p|} \bar{g}_4 = \beta_4(\bar{g}_4), \quad \bar{g}_4(|p|=\mu, g_4(\mu)) = g_4(\mu).$$

Esta relación, llamada a veces LA ecuación del grupo de renormalización, simplemente quiere decir que utilizamos la ecuación que define a β_4

(p.851) para evolucionar g_4 desde la escala μ hasta la escala $|p|$:



Si tenemos ya $g_4(\mu)$ para μ arbitraria, entonces $\bar{g}_4 = g_4(\mu=|p|)$. P.ej.

en φ^4 sin masa $\bar{g}_4(|p|, g_4(\mu)) \simeq \frac{g_4(\mu)}{1 - \frac{3g_4(\mu)}{16\pi^2} \ln\left(\frac{|p|}{\mu}\right)}$ (cf. $\alpha_{ef}(F^2)$ en p.758)

Con esta definición, la solución a Callen-Tymenzik [ver p.ej. Perkin sec. 12.3] toma la forma

$$\tilde{G}_2(p^2, g_4(\mu), \mu) = \frac{i}{p^2} \mathcal{Y}_2(\bar{g}_4(|p|, g_4)) \exp \left[2 \int_0^{\ln(|p|/\mu)} dt \chi_4(\bar{g}_4(\mu e^t, g_4)) \right].$$

escala integrals
entre μ y $|p|$

propagador libre
(unidades correctas)

efecto integral del renormalizado
de $\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)$ por el cambio en z

L29: 13/05/19

Este resultado sigue siendo no perturbativo. \mathcal{Y}_2 aquí es todavía una función arbitraria, que quedaría por determinar; pero el punto importante es que solo depende de $|p|$ a través del acoplamiento corriente $\bar{g}_4(|p|)$.

El mismo análisis se puede aplicar a otros correladores, si consideramos que todos sus argumentos p_n dependen de UNA misma escala de momento. P.ej., para la función de 4 puntos con $p_n^2 = -|p|^2$ y $s, t, u \sim -|p|^2$, se obtiene

$$\tilde{G}_4(|p|, g_4) = \left(\frac{-i}{|p|^2} \right)^4 \mathcal{Y}_4(\bar{g}_4(|p|, g_4)) \exp \left[4 \int_0^{\ln(|p|/\mu)} dt \chi_4(\bar{g}_4(\mu e^t, g_4)) \right],$$

donde nuevamente la cantidad importante es el acoplamiento corriente $\bar{g}_4(|p|)$.

Si disminuimos $|p|$ hasta coincidir con μ , el exponencial se hace 1

y $\bar{g}_4 = g_4$, así que $\tilde{G}_2(l|\mu, g_4) = \frac{i}{p^2} \gamma_2(g_4)$ y $\tilde{G}_4(l|\mu, g_4) = \frac{1}{p^8} \gamma_4(g_4)$.

Estos resultados deben coincidir con los que podremos obtener usando la expansión perturbativa en potencias de g_4 , así que de la comparación podremos deducir las funciones $\gamma_2(g_4)$ y $\gamma_4(g_4)$. Lo que aprendemos gracias al grupo de renormalización es que, para conocer los correladores a otra escala l (más alta o más baja que μ), basta con evaluar estas mismas funciones γ_2 y γ_4 en el valor apropiado del acoplamiento corriente, $\bar{g}_4(l|\mu, g_4(\mu)) = g_4(\mu=l)$. Esto confirmamos lo que en la p. 845 habíamos dicho solo de manera más esquemática: que en verdad es $g_4(l|\mu)$ el acoplamiento de interés físico a la escala experimental l .

No es muy difícil extender nuestros resultados de la teoría ϕ^4 al caso con masa. En la p. 848 vimos que

$$\delta m_{(1)}^2 = -\frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right) \right]$$

es decir

$$m_0^2 = \frac{m^2 + \delta m_{(1)}^2}{Z \rightarrow 1} = m^2 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right) \right].$$

OJO: $\delta m_{(1)}^2 \neq 0$ incluso si $m^2 = 0$
(renormalización aditiva y no solo multiplicativa)

Lo primero que debemos notar aquí es que la dependencia de m^2 es un poco complicada: no está escrita como una serie de potencias

en m^2 o $g_2 \equiv m^2/\mu^2$. La razón es clara: el acoplamiento m^2 está asociado a un término acuértico, es decir, libre, y tenemos la costumbre de incorporarlo de manera exacta en el propagador. Después de separar el lagrangiano de modo (p.649) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{ct}$, con $\mathcal{L}_{ren} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$, tratamos a φ^2 no como una interacción, sino como parte del propagador libre $\frac{i}{p^2 - m^2}$, y en el esquema de renormalización que elegimos en la p.848, el significado de m^2 es que $\tilde{\Gamma}_2(p^2) \Big|_{p^2 = -\mu^2} = 0$, que (junto con $\frac{d}{dp^2} \tilde{\Gamma}_2(p^2) \Big|_{p^2 = -\mu^2} = 0$) equivale a pedir que $\tilde{G}_2(p^2 = -\mu^2) = \frac{i}{p^2 - m^2}$.

Dentro de este esquema, si al orden más bajo invertir la relación entre m_0^2 y m^2 escrita en la página anterior obtendremos

$$m^2 = m_0^2 + \frac{\lambda_0}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m_0^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2} + 1 \right) \right].$$

diferencia con λ es de $\mathcal{O}(\lambda_0^2)$
 diferencia con m^2 es de $\mathcal{O}(\lambda_0)$

A este orden, la función beta para el acoplamiento de masa es por tanto simplemente

$$\beta_2 \equiv \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, m_0, \lambda_0} \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \Big|_{\Lambda, m_0, \lambda_0} = -2g_2$$

dependencia $g_2(\mu)$
 a este orden es puramente la clásica

Por otra parte, de la primera ecuación de la p. 856 tenemos

diferencia en m es de $O(\lambda_0)$

$$g_4 \equiv \lambda = \lambda_0 - \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{m_0}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right\},$$

antes consideramos $m=0$ \rightarrow $\underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda}{m_0}\right)}_{\equiv f(\mu)} \quad \underbrace{\ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} - 1}\right)}_{\ln\left(\frac{f(\mu)+1}{f(\mu)-1}\right)}$

así que

$$\beta_4 = \mu \left(\frac{\partial g_4}{\partial \mu} \right) \Big|_{\lambda} = \frac{3\lambda_0^2}{32\pi^2} \mu \left[\ln\left(\frac{f(\mu)+1}{f(\mu)-1}\right) + f(\mu) \left(\frac{1}{f(\mu)+1} - \frac{1}{f(\mu)-1} \right) \right] \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

$\leftarrow m_0(\lambda), \lambda_0(\lambda)$ fijos

$$\underbrace{\frac{-2}{f(\mu)^2-1}}_{-\frac{2}{f(\mu)^2-1}} \quad \underbrace{\frac{-\frac{8m_0^2}{\mu^3}}{2f(\mu)}}_{-\frac{1}{\mu} \frac{(f(\mu)^2-1)}{f(\mu)}}$$

es decir,

$$\beta_4 = \frac{3\lambda_0^2}{32\pi^2} \mu \left[-\frac{1}{\mu} \frac{(f(\mu)^2-1)}{f(\mu)} \ln\left(\frac{f(\mu)+1}{f(\mu)-1}\right) + \frac{2}{\mu} \right]$$

$$= \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \left[1 - \frac{f(\mu)^2-1}{2f(\mu)} \ln\left(\frac{f(\mu)+1}{f(\mu)-1}\right) \right].$$

Esto es lo mismo que

$$\beta_4 = \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \left[1 - \frac{2m_0^2/\mu^2}{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right],$$

o usando $\lambda_0^2 \approx \lambda^2 \equiv g_4^2$, $m_0^2 \approx m^2 \equiv g_2 \mu^2$,

$$\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \left[1 - \frac{2g_2}{\sqrt{1+4g_2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+4g_2} + 1}{\sqrt{1+4g_2} - 1}\right) \right].$$

$$\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \left[1 - \frac{2g_2}{\sqrt{1+4g_2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1+4g_2} + 1}{\sqrt{1+4g_2} - 1} \right) \right]$$

Tal como esperáramos, para $\mu \gg m = m_{\text{fir}}$ tenemos $g_2 = \frac{m^2}{\mu^2} \rightarrow 0$ y por tanto $\beta_4 \rightarrow \frac{3g_4^2}{16\pi^2}$, el resultado que encontramos para el caso no masivo. Par otra parte, para $\mu \sim m = m_{\text{fir}}$, $g_2 \approx 1$ y el flujo de g_4 se hace más lento. Para $\mu \ll m$ ($g_2 \gg 1$),

$$\beta_4 \approx \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \left[1 - \sqrt{g_2} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{g_2}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{g_2}}} \right) \right] \approx \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \left[1 - \underbrace{\sqrt{g_2}}_{\frac{1}{\sqrt{g_2}}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{g_2}} \right) \right] \rightarrow 0.$$

(En esta región por supuesto NO hubiera tenido sentido hacer una expansión perturbativa en potencias de g_2 .) Claramente $g_2 \rightarrow \infty$ con $g_4 \rightarrow \text{cte.}$ significa que la teoría se vuelve vacía: nos quedamos sin los grados de libertad de la partícula/campo φ con masa m , y es por ello que g_4 deja de correr, es decir, los lazos de φ ya NO contribuyen.

Esta es una idea genérica: en una teoría con partículas de masas físicas m_1, m_2, \dots , aquellas con $m_n \gg \mu$ se 'desacoplan' y NO contribuyen a las funciones β (aunque los detalles de este desacoplamiento dependen del esquema de renormalización).

L21: 09/11/17 (-Zanin)

Otra opción es tratar a g_2 perturbativamente, igual que a g_4 . Es decir, de $\mathcal{L}_{\text{ren}} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ podemos

extraer como propagador solo a $\frac{i}{p^2}$, e interpretar a φ^2 como un vértice de 2 patas, $\text{---}\bullet\text{---} = -im^2 = -ig_2 \mu^2$, tal como φ^4 nos da un vértice de 4 patas, $\times = -i\lambda = -ig_4$. Este punto de vista va más de acuerdo con la perspectiva que hemos ganado en este capítulo, en donde reconocemos a $\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2$ como el punto fijo gaussiano y hacemos nuestros cálculos perturbativos en torno a este punto, deformando con el acoplamiento relevante g_2 y el marginal (marginamente irrelevante) g_4 . Por supuesto, lo malo de este enfoque es que nos restringe a $g_2 \ll 1$, es decir, $\mu \gg m$.

Al orden más bajo en los acoplamientos, tenemos ahora

$$\tilde{\Gamma}_2(p^2) = \underbrace{\text{---}\bullet\text{---}}_{-ig_2 \mu^2} + \underbrace{\text{---}\bigcirc\text{---}}_{-\frac{ig_4}{32\pi^2} \Lambda^2} + \underbrace{\text{---}\otimes_1\text{---}}_{i(\delta Z'' p^2 - \delta m_{(1)}^2 - \delta g_2'' \mu^2)} + \mathcal{O}(g_4^2, g_2^2, g_2 g_4).$$

límite $m \rightarrow 0$ del resultado en la p. 848 para renormalización aditiva de m_0^2 , que mantiene $m^2 = 0$ (p. 872) para divergencias $\propto g_2$

Imponiendo $\frac{d}{dp^2} \tilde{\Gamma}_2(p^2) \Big|_{p^2 = -\mu^2} = 0$ deducimos que $\delta Z'' = 0$, y pidiendo que $\tilde{\Gamma}_2(p^2 = -\mu^2) = -ig_2 \mu^2$ (lo cual implica, usando $\Delta m^2 = i \tilde{\Gamma}_2$, que

que $\tilde{G}_2(p^2 = -\mu^2) = \frac{i}{p^2 - \Delta m^2} = \frac{i}{p^2 - g_2 \mu^2}$, justo igual que en la p. 848),

deducir que $\Delta m_{(1)}^2 = \frac{g_4}{32\pi^2} \Lambda^2$ y $\delta g_2^{(1)} = 0$. De esto concluir

nuevamente que $Z=1 \Rightarrow \gamma_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln Z)}{\partial(\ln \mu)} = 0$ y $g_{2,0} = \frac{g_2 + \delta g_2^{(1)}}{Z^2} = g_2$

$\Rightarrow \beta_2 = \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} = -2g_2$. La primera corrección cuántica a δg_2 y

β_2 provendría de $\underbrace{0}_{\propto g_2 g_4}$.

Por otra parte,

$$\tilde{\Gamma}_4 = \text{X} + \underbrace{\text{diagramas}}_{\propto g_4^2} + \text{diagramas} + \text{diagramas} + \text{diagramas} + \mathcal{O}(g_4^3, g_4^2 g_2),$$

resultados iguales a lo que antes obtuvimos en el límite $m \rightarrow 0$ (p. 856)

así que a este orden seguiremos teniendo $\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2}$ (las primeras

correcciones $\propto g_2$ vendrán de diagramas como $\text{diagrama} \propto g_4^2 g_2$).

Una tercera opción para probar el caso de masa finita fue ideada por Weinberg en 1973, y se emplea frecuentemente. En lugar de separar el término $-\frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2$ en una parte renormalizada $-\frac{1}{2} m^2 \phi^2$ y un contratérmino $-\frac{1}{2} \Delta m^2 \phi^2$, y luego especificar lo que significa m^2 usando una condición de renormalización que involucre a

alguna amplitud propia $\tilde{\Gamma}_N$ (normalmente $\tilde{\Gamma}_2$), podemos optar por definir m^2 de modo que tengamos directamente

$$\frac{1}{2} m_0^2 \varphi_0^2 = \frac{1}{2} m^2 [\varphi^2], \text{ donde } [\varphi^2] \text{ denota el}$$

operador compuesto ya renormalizado, $[\varphi^2(x)] \equiv \frac{\varphi_0^2(x)}{Z_{\varphi^2}(\mu)}$

(recorder la discusión en las pp. 852-854), y por tanto,

$$m^2(\mu) \equiv Z_{\varphi^2}(\mu) m_0^2.$$

El punto es que con esta definición

$$Z_{\text{ren}} = \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 [\varphi^2] - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4, \text{ y al hacer la expansión}$$

perтурbativa de un correlador $G_N = \langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \} | \Omega \rangle$

en potencias de m^2 , el término de orden $(m^2)^n$ involucrará a

$$(m^2)^n \int d^4 y_1 \dots d^4 y_n \underbrace{\langle \Omega | T \{ [\varphi^2(y_1)] \dots [\varphi^2(y_n)] \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \} | \Omega \rangle}_{\equiv G_{N\varphi, n\varphi^2}},$$

que por definición de $[\varphi^2]$, será finito. Dado que el término de

masa NO da lugar a divergencias, podemos entonces definir a

los otros acoplamiento de la teoría (en nuestro ejemplo favorito, λ)

tal como si tuviéramos $m^2 = 0$ (recordando el otro término

en δm^2 para absorber la divergencia cuadrática, que es aditiva, p. 872).

Es obvio entonces que, en este esquema, las funciones beta de los acoplamiento no acrítilos no dependen, en absoluto de m^2 o g_2 : $\beta_4 = 3g_4^2/16\pi^2 + \mathcal{O}(g_4^3)$.

El efecto de la masa figura directamente en la ecuación de Callan-Jymanzik: de la p.852 sabemos que el término de orden $(m^2)^n$ dentro de G_N , proporcional a $G_{N\varphi, n\varphi^2}$, satisface la ecuación

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + n \gamma_{\varphi^2} + N \gamma_{\varphi} \right) G_{N\varphi, n\varphi^2} = 0.$$

$$\zeta \equiv \frac{\partial(\ln Z_{\varphi^2})}{\partial(\ln \mu)} \quad G_N \sim \sum_{n=0}^{\infty} (m^2)^n G_{N\varphi, n\varphi^2}$$

Pero dentro de G_N , el término $(m^2)^n G_{N\varphi, n\varphi^2}$ se puede identificar porque es el único que es eigenfunción de $m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}$ con eigenvalor n : $m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} (m^2)^n = n (m^2)^n$. La ecuación de C-J para G_N puede escribirse entonces en la forma

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \gamma_{\varphi^2} m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + N \gamma_{\varphi} \right) G_N = 0.$$

Si ahora definimos $g_2 \equiv \frac{m^2}{\mu^2}$, entonces $m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \Big|_{\mu} = g_2 \frac{\partial}{\partial g_2} \Big|_{\mu}$, y en el término $\propto (m^2)^n G_{N\varphi, n\varphi^2} = g_2^n \mu^{2n} G_{N\varphi, n\varphi^2}$, la derivada $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$,

considerar ahora a g_2 fija en lugar de m^2 fija, dará un factor adicional de $Z_{\mu\varphi, \varphi^2}$. Llegamos por tanto a

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + (-2 + \gamma_{\varphi^2}) g_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N \gamma_{\varphi} \right] G_N = 0,$$

o definiendo $\beta_2 \equiv (-2 + \gamma_{\varphi^2}) g_2$,

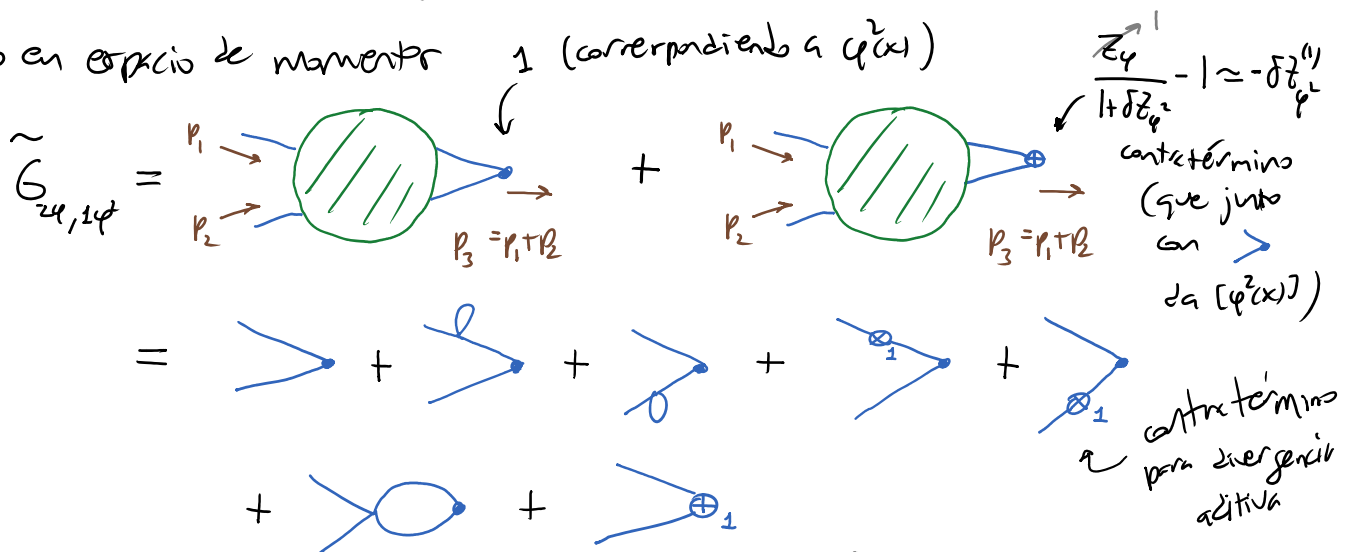
$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N \gamma_{\varphi} \right) G_N = 0,$$

que es idéntica a la ecuación que tenemos ya en la p. 852.

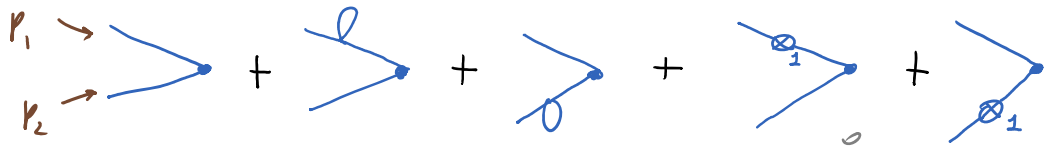
Para calcular γ_{φ^2} , y en ello β_2 , necesitamos el factor de renormalización Z_{φ^2} en $[\varphi^2(x)] \equiv \frac{\varphi_0^2(x)}{Z_{\varphi^2}(\mu)} \equiv \frac{\varphi_0^2(x)}{1 + \delta Z_{\varphi^2}} \equiv \frac{(\sqrt{Z_{\varphi}})^2 \varphi^2(x)}{1 + \delta Z_{\varphi^2}}$.

Por antes de potenciar, el único correlador con $[\varphi^2]$ que es primitivamente divergente es $G_{2\varphi, 2\varphi^2} = \langle \Omega | T \{ [\varphi^2(x)] \varphi(x_1) \varphi(x_2) \} | \Omega \rangle$,

o en espacio de momentos 1 (correspondiendo a $\varphi^2(x)$)



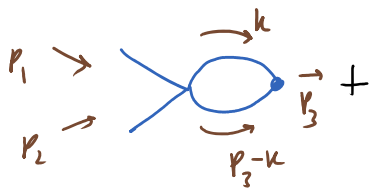
Las divergencias en el primer renglón estaban igualmente presentes en $G_{4\varphi,0\varphi^2} = G_4$, y sistemas de k p.848 que se cancelan con el otro término correspondiente (calculados en $m^2=0$):



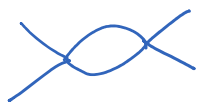
$$= 2 \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \left[1 + \underbrace{\left(-\frac{i g_4}{32\pi^2} \Lambda^2 \right)}_{\text{p.848}} \left(\frac{i}{p_1^2} + \frac{i}{p_2^2} \right) + i \left(\cancel{\delta \mathcal{L}_{\varphi^2}^{(1)}} - \delta m_{(1)}^2 \right) \frac{i}{p_1^2} + i \left(\cancel{\delta \mathcal{L}_{\varphi^2}^{(1)}} - \delta m_{(1)}^2 \right) \frac{i}{p_2^2} \right]$$

$$= 2 \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \cdot \underbrace{\left(-\frac{g_4}{32\pi^2} \Lambda^2 \right)}_{\text{p.848}}$$

El k2 del segundo renglón, en cambio, NO estaba presente en G_4 , y nos da la nueva divergencia, que requiere reemplazar φ^2 por $[\varphi^2]$:



$$= 2 \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \left[(-i g_4) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \frac{i}{(p_1+p_2-k)^2} - i \delta \mathcal{L}_{\varphi^2}^{(1)} \right]$$

misma integral que en  (con $m^2=0$) $\rightarrow \frac{1}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-5}\right)$ p.847,856 $\leftarrow (p_1+p_2)^2 = p_3^2$

Imponiendo como condición de renormalización

$$\tilde{G}_{2\varphi,1\varphi^2}(p_1^2 = -\mu^2, p_2^2 = -\mu^2, p_3^2 = -\mu^2) = 2 \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2}$$

\leftarrow resultados a nivel árbol

deducir que $\delta \tau_{\varphi^2}^{(1)} = -\frac{g_4}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \iff \tau_{\varphi^2} = 1 - \frac{g_4}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right),$

y por tanto

$\gamma_{\varphi^2} \equiv \frac{\partial(\ln \tau_{\varphi^2})}{\partial(\ln \mu)} \simeq \frac{\partial \delta \tau_{\varphi^2}^{(1)}}{\partial(\ln \mu)} = \frac{g_4}{16\pi^2}.$ (cf. $\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2}$)

por canal s,t,u \swarrow \nwarrow *por 2 vértices*

L25: 20/05/19

Usando este resultado en la definición $\beta_2 \equiv (-2 + \gamma_{\varphi^2}) g_2$ de la

p. 880, obtenemos

$\beta_2 = \left(-2 + \frac{g_4}{16\pi^2}\right) g_2$

tasa de cambio de g_2 se vuelve más lenta

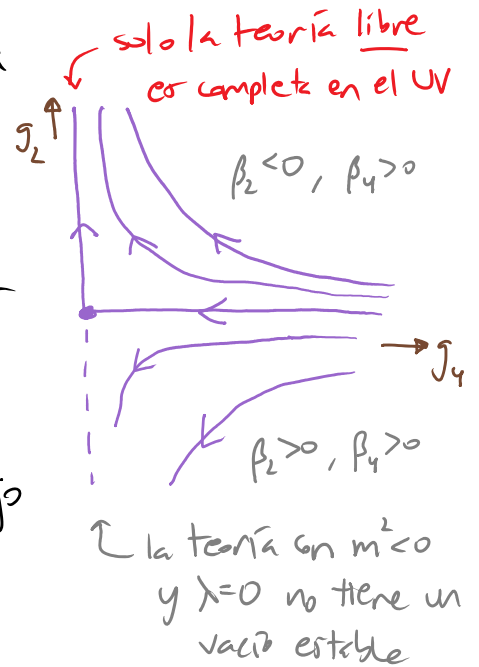
clásica \curvearrowright \curvearrowleft cuántica

sin dependencia de g_2

Recordando que $\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2}$, los flujos

del grupo de renormalización lucen entonces (en la región perturbativa $g_4 \ll 1$) como en

el diagrama de la derecha. El único punto fijo es el trivial ($g_2=0, g_4=0$).



Ocurre algo interesante si examinamos esta misma teoría

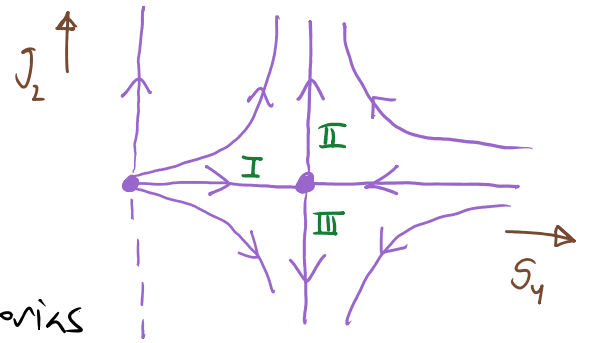
$\int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right]$ en $d < 4$, donde $D_\varphi = \frac{d}{2} - 1$ y $D_\lambda = 4 - d$,

así que $g_4 \equiv \lambda \mu^{d-4}$. En este caso, se encuentra que $D_{m^2} = 2 \forall d$

$\beta_4 = \underbrace{(d-4)}_{< 0} g_4 + \underbrace{\frac{3g_4^2}{16\pi^2}}_{\text{cuántica}} + \mathcal{O}(g_4^3), \quad \beta_2 = \underbrace{\left(-2 + \frac{g_4}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g_4^2)\right)}_{\text{clásica}} g_2.$

clásica: g_4 relevante *cuántica* *clásica* *cuántica*

Vemos entonces que si $d=4-\epsilon$ con $0 < \epsilon \ll 1$, encontramos un punto fijo no trivial en $g_4^* = \frac{16\pi^2}{3} \epsilon$, $g_2^* = 0$, que está dentro de la región perturbativa y es por tanto confiable. Se le conoce como el punto fijo de Wilson-Fisher, y se sabe que existe también para $d=3$ y $d=2$ ($\epsilon=1$ y $\epsilon=2$). Los flujos del grupo de renormalización lucen ahora como en el diagrama de la derecha. Las trayectorias marcadas I, II y III son teorías intermedias completas en el UV (es posible retirar el corte, $\Lambda \rightarrow \infty$). La teoría I es además conforme en el IR (la II y III se vuelven vacías). Aunque por supuesto, si $\epsilon \ll 1$, no tendríamos claro qué significan estas teorías "en $d=4-\epsilon$ dimensiones" más allá de los diagramas de Feynman (en regularización dimensional).



El punto fijo de Wilson-Fisher (frecuentemente, en su generalización al caso de más de un campo escalar) juega un papel importante en mecánica estadística / materia condensada, en el estudio de transiciones de fase de segundo orden de muchos sistemas muy diferentes, como imanes, fluidos como el agua, el modelo de Ising, etc. [Ver, p.ej.,

Perkin sec. 12.5 y cap. 13, o Weinberg II sec. 18.5.] El hecho de que sistemas muy distintos en el UV pueden tener el mismo punto fijo IR se conoce como "universalidad".

Un punto importante es que en este esquema de renormalización, g_2 no aparece en las funciones beta de los g_n con $n \neq 2$, donde g_2 no aparece en las funciones beta de los g_n con $n \neq 2$, NO es posible ver explícitamente el desacoplamiento de las partículas con masas físicas $m_{\text{fir}} \gg \mu$ (p. 875). Lo mismo ocurre en cualquier otro "esquema independiente de masas", como p.ej. el esquema MS o $\overline{\text{MS}}$ dentro de la regularización dimensional. En estos casos, lo que se acostumbra hacer es implementar a mano el desacoplamiento: al cruzar el "umbral" de $\mu > m_{\text{fir}}$ a $\mu < m_{\text{fir}}$, la partícula en cuestión ya NO se toma en cuenta para el corrimiento de los acoplamientos. Esto es burdo, pero funciona.

Pasemos ahora a QED. Recordemos de las pp. 736, 779 que con regularización dimensional,

$$e^2 = Z_3 \frac{Z_1}{Z_2} \mu^{d-4} e_0^2 = Z_3 \mu^{-\epsilon} e_0^2, \text{ es decir, la renormalización del acoplamiento electromagnético se debe únicamente al rescalamiento del campo de norma, } A^\mu(x) \equiv A_0^\mu(x) / \sqrt{Z_3}. \text{ Y en las pp. 794-795 vimos que}$$

lización del acoplamiento electromagnético se debe únicamente al rescalamiento del campo de norma, $A^\mu(x) \equiv A_0^\mu(x) / \sqrt{Z_3}$. Y en las pp. 794-795 vimos que

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \mathcal{O}(e^4)$$

contiene δZ_3

$$= i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \Pi(p^2)$$

$$\text{con } \Pi(p^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x^2-x) \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2 + (x^2-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right) - \gamma \right] - \delta Z_3^{(1)}$$

polo: divergencia logarítmica

En el esquema MS (p.785, un esquema con escalas deslizante μ), elegimos $\delta Z_3^{(1)}$ para cancelar ni más ni menos que el polo $\propto \frac{1}{\epsilon}$,

$$\delta Z_3^{(1)} = \frac{e^2}{2\pi^2} \underbrace{\int_0^1 dx (x^2-x)}_{-1/6 \text{ p.795}} \frac{2}{\epsilon} = -\frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon},$$

$$\text{de modo que } Z_3 = 1 + \delta Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(e^4).$$

Para calcular β_e con un método realmente sistemático, notemos que $e_0 \stackrel{\text{p.834}}{=} \mu^{\epsilon/2} Z_3^{-1/2} e$ es independiente de μ ,

$$\Rightarrow \ln e_0 = \frac{\epsilon}{2} \ln \mu - \frac{1}{2} \ln Z_3 + \ln e \quad \text{también lo es.}$$

$\underbrace{\ln Z_3}_{\delta Z_3^{(1)} + \mathcal{O}(e^4)}$

Diferenciando con respecto a $\ln \mu$,

$$0 = \frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \delta Z_3^{(1)}}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \ln \mu} + \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial \ln \mu} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\partial e}{\partial \ln \mu} \left(\underbrace{-\frac{1}{2} \frac{\partial \delta Z_3^{(1)}}{\partial e}}_{\frac{e}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon}} + \frac{1}{e} \right)$$

Sabemos que $\frac{\partial e}{\partial \ln \mu}$ es finita cuando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\text{i.e., } \frac{\partial e}{\partial \ln \mu} = \beta_e(e) + \epsilon B(e), \quad \text{con } \beta_e \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{\partial e}{\partial \mu} \Big|_{\epsilon, e_0, m_0}$$

$$\text{Tenemos entonces } 0 = \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{(\beta_e + \varepsilon B)}_{\frac{\partial e}{\partial \ln \mu}} \left(\underbrace{\left(\frac{e}{6\pi} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \right)}_{-\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_3^{(4)}}{\partial e}} \right).$$

Empatando los coeficientes de orden ε ,

$$0 = \frac{1}{2} + B \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow B = -\frac{e}{2},$$

y empatando los coeficientes de orden ε^0 ,

$$0 = \beta_e \frac{1}{\varepsilon} + B \frac{e}{6\pi^2} \Rightarrow \boxed{\beta_e = -\frac{e^2}{6\pi} \quad B = \frac{e^3}{12\pi^2}}.$$

Por supuesto, los coeficientes de orden ε^{-1} y más altos también deben empatar; pero eso involucra al resultado a $L \geq 2$ lazos $\delta Z^{(L)} \sim e^{2L} \left(\frac{1}{\varepsilon^L} + \frac{1}{\varepsilon^{L-1}} + \dots + \frac{1}{\varepsilon} \right)$.

Es fácil extender este cálculo a una teoría más general, con un acoplamiento λ no necesariamente adimensional, y sin limitarnos a orden de un lazo. De la p. 837, sabemos que la dimensión del acoplamiento de un lazo λ_0 es

$$D = d - \underbrace{\partial}_{\text{número de derivadas}} - \sum_c n_c \underbrace{D_c}_{\frac{d}{2} + s_c - 1} = d \left(1 - \frac{n}{2}\right) + n - \sum_c n_c s_c, \quad \underbrace{\sum_c n_c}_{\text{número total de patrones}}$$

y definiremos entonces su versión adimensional $g_0 \equiv \frac{\lambda_0}{\mu^{D_0}}$.

En regularización dimensional, tomamos $d = \underline{d} - \epsilon$, así que
 $\underline{d} = \underline{D} - \epsilon(1 - \frac{n}{2})$. El acoplamiento

renormalizado es $g \equiv \underbrace{Z_1^{p_1} Z_2^{p_2} Z_3^{p_3} \dots}_{\equiv Z} g_0 = Z \frac{\lambda_0}{\mu^{\underline{d}}}$, p.ej. 4

USAR $\bar{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\gamma/2} \mu$
p. 785

donde nuevamente tendremos que, en el esquema MS o \overline{MS} ,

$$Z_i = 1 + \delta Z_i = 1 + \frac{Z_i^{[1]}(g)}{\epsilon} + \frac{Z_i^{[2]}(g)}{\epsilon^2} + \frac{Z_i^{[3]}(g)}{\epsilon^3} + \dots$$

↑
 Z primera contribución proviene de 2 lazos
 primera contribución proviene de 1 lazo

De aquí se sigue que $\lambda_0 = \mu^{\underline{d}} Z^{-1} g$

$$\Rightarrow \ln \lambda_0 = \underline{d} \ln \mu - \ln Z + \ln g$$

$$\equiv \underbrace{J_{[1]}(g)}_{\frac{J_{[1]}(g)}{\epsilon}} + \frac{J_{[2]}(g)}{\epsilon^2} + \dots$$

con $J_{[1]}(g) = p_1 Z_1^{[1]}(g) + p_2 Z_2^{[1]}(g) + p_3 Z_3^{[1]}(g) + \dots$

Diferenciando $\ln \lambda_0$ con respecto a $\ln \mu$, tenemos

$$0 = \underline{d} - \frac{\partial \ln Z}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial \ln \mu} + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \ln \mu},$$

es decir,

$$0 = \underbrace{\mathcal{D} - \varepsilon(1 - \frac{n}{2})}_{p.887} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial \ln \mu}}_{\beta_g + \varepsilon B, p.885} \left(\underbrace{-\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial g}}_{\frac{J'_{[11]}}{\varepsilon} + \frac{J'_{[22]}}{\varepsilon^2} + \dots, p.887} + \frac{1}{g} \right).$$

donde $J'_{[ij]} \equiv \frac{\partial}{\partial g} J_{[ij]}(g)$

Reordenando por potencias de ε , esto es

$$0 = \varepsilon \left((1 - \frac{n}{2}) + \frac{B}{g} \right) + \varepsilon^0 \left(\mathcal{D} + \frac{\beta_g}{g} - B J'_{[11]} \right) + \varepsilon^{-1} \left(-\beta_g J'_{[11]} - B J'_{[22]} \right) + \dots,$$

de donde leemos que $B = -g(1 - \frac{n}{2})$ y

$$\beta_g = -g \mathcal{D} + g B J'_{[11]} = -g \mathcal{D} - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) g^2 J'_{[11]}$$

dependencia de μ clásica,
por $[\lambda_0] = \mathcal{D}$

dependencia cuántica,
por lazo $\Rightarrow \mathcal{Z} \neq 1$

Solo contribuye a β_g el coeficiente del polo simple (\leftrightarrow divergencia logarítmica) $J_{[11]}(g) = p_1 Z_1^{[11]}(g) + p_2 Z_2^{[11]}(g) + p_3 Z_3^{[11]}(g) + \dots$

así que podemos resumir

residuo (\equiv coef de $\frac{1}{\varepsilon}$)

$$\beta_g(g) = -g \mathcal{D} - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) g^2 \frac{\partial}{\partial g} [p_1 \text{Res } Z_1 + p_2 \text{Res } Z_2 + \dots].$$

En QED₄: $\mathcal{D} = 0$, $n = 3$, $p_3 = \frac{1}{2}$ y $\text{Res } Z_3 = -\frac{e^2}{6\pi^2} + \mathcal{O}(e^4)$, p.884 p.885

así que recuperamos la función beta de la p.886,

$$\beta_e = \frac{e^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e^5)$$

En términos de la constante de estructura fina $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$, la función beta es

$$\beta_\alpha \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \Big|_{\epsilon, \alpha_0, m_0} = \frac{e^4}{24\pi^3}, \text{ es decir, } \beta_\alpha = \frac{2\alpha^2}{3\pi} + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

$$= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) = \frac{e}{2\pi} \beta_e$$

Notando que esta expresión tiene exactamente la misma forma que la función beta para e^4 (p.856), $\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2}$, podemos de inmediato transcribir la solución (p.861)



$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_{\text{ref}})}{1 - \frac{2\alpha(\mu_{\text{ref}})}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}\right)} \equiv \frac{3\pi}{2 \ln(\mu_\infty/\mu)}$$

← por desacoplamiento (p.875),
 - usar solo para $\mu > m$

Aprendemos entonces que el acoplamiento electromagnético α (ó e) es marginalmente irrelevante: crece con la energía, y, si pudiéramos confiar en el resultado a un lazo, sería divergente (tendría un polo de Landau) en $\mu_\infty \equiv \mu_{\text{ref}} \exp\left(\frac{3\pi}{2\alpha(\mu_{\text{ref}})}\right)$ (QED fue de hecho la teoría que analizó Landau). Lo que sí podemos decir es que QED se vuelve fuertemente acoplada para $\mu \gtrsim \mu_\infty$.

A falta de un punto fijo en el UV, concluimos que, justo como φ^4 , **¡¡ QED no existe (como teoría interactuante, $\alpha(\mu) \neq 0$, y a el límite continuo, $\Lambda \rightarrow \infty$) !!** En otros palabras, QED resulta ser, en última instancia,

no renormalizable, y debe considerarse en un corte explícito, $\Lambda \sim \mu_\infty$.

Tal como en φ^4 , este hecho No invalida los cálculos perturbativos que hemos hecho (con todo y renormalización) en este curso y el anterior;

solo restringe su rango de validez a escoger $\mu \ll \mu_\infty$. Dado que

en nuestro universo $\alpha(\mu_{\text{ref}}) \approx 1/137$ a $\mu_{\text{ref}} \approx (m_e)_{\text{fir}} \approx 0.5 \text{ MeV}$,

tenemos $\mu_\infty \equiv \mu_{\text{ref}} \exp\left(\frac{3\pi}{2\alpha(\mu_{\text{ref}})}\right) \approx 0.5 \text{ MeV} \exp(646) \approx 10^{280} \text{ MeV}$

$$\approx 10^{273} E_{\text{LHC}} \approx 10^{258} M_{\text{plank}},$$

$\uparrow \sim 10 \text{ TeV}$
 $\uparrow \sim 10^{19} \text{ GeV}$

¡ así que los impresionantes acuerdos que se han encontrado entre QED perturbativa y los experimentos distan mucho de estar a riesgo!

Pero conceptualmente, sí es interesante saber que **QED no es una teoría completa en el UV**. Obviamente, en $\mu \sim M_{\text{plank}} \ll \mu_\infty$ QED debe modificarse para incorporar efectos de gravedad cuántica, y mucho antes de eso, en $\mu \sim 10^2 \text{ GeV} \ll M_{\text{plank}}$ sabemos que pasa a formar parte de la teoría electrodébil, $U(1)_{\text{EM}} \subset SU(2)_I \times U(1)_Y$, así que hay nuevos

efectos fríos que deben considerarse. La parte asociada al grupo $U(1)_Y$ (de "hipercarga débil") es una copia de QED, y por tanto tampoco es completa en el UV. Así que, incluso si fuera solo por esto y por φ^4 , ¡sabemos que el Modelo Estándar NO puede ser la última palabra! ^{Higgs}

En los años 60 y principios de los 70 se tenía poca confianza en el lenguaje de teoría cuántica de campos. La razón más sofisticada era precisamente que se creía que en cualquier teoría de campos la función beta sería siempre positiva, como en φ^4 y en QED, dando lugar entonces a este mismo problema de trivialidad, de modo que en últimas instancias la teoría NO estaría bien definida. David Gross, en particular, se propuso meter a todas las teorías de campos, estudiando caso por caso y mostrando sistemáticamente que $\beta > 0$. En 1973, cuando solo le quedaban por descartar las teorías de norma no abelianas, y se puso a hacer los cálculos correspondientes con su estudiante de doctorado Frank Wilczek, ¡descubrieron que en ese caso SI es posible tener $\beta < 0$! David Politzer, estudiante de Sidney Coleman, descubrió lo mismo al mismo tiempo, de manera independiente (y también Gerard 't Hooft, un año antes; pero no publicó su resultado). Este fue el descubrimiento de la libertad asintótica,

que condujo de inmediato a la aceptación de QED como la descripción correcta de la interacción fuerte (y en ello, a la consolidación del Modelo Estándar), y derivó en el Premio Nobel para Gross, Politzer y Wilczek en 2004.

Los cálculos de dimensiones anómalas, y de la función beta de QED en un esquema distinto a MS o \overline{MS} , los dejaremos para la Tarea 16.

Una propiedad que es útil conocer es que, si bien la definición de los acoplamiento y campo renormalizados, y por tanto de las funciones β y γ en una teoría dada, dependen del esquema o prescripción de renormalización, hay unos cuantos aspectos que son independientes del esquema, básicamente aquellos que pueden tener consecuencias físicas:

- ① La existencia (aunque no la ubicación) de un punto fijo del grupo de renormalización (es decir, $\beta_g = 0$ en $g = g^*$ implica que $\beta_{\bar{g}} = 0$ en $\bar{g} = \bar{g}^*$).
- ② El valor de las dimensiones anómalas en un punto fijo, γ_c en $g = g^*$.
- ③ La derivada de la función β en un punto fijo, $\frac{\partial}{\partial g} \beta_g$ en $g = g^*$.
- ④ Los primeros 2 términos en la función β (coef. denotados b_0, b_1) [ver final de sec. 18.3 en Weinberg II], y el primer término en la función γ .

P.ej.

en QED $\beta_e = \underbrace{\frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2}}_{\text{independientes del esquema}} + \mathcal{O}(e^7)$

en φ^4 $\beta_g = \frac{3g^2}{16\pi^2} - \frac{3g^3}{128\pi^4} + \mathcal{O}(g^4)$

dependen del esquema

L26: 22/05/19 L23: 16/11/17

Hasta ahora hemos discutido el grupo de renormalización desde la perspectiva de Callan y Symanzik (o Gell-Mann y Low), donde variamos la escala de renormalización μ , manteniendo el corte UV Λ fijo. Pero ya desde la p. 825 mencionamos que existe también el grupo de renormalización Wilsoniano, donde variamos Λ manteniendo μ fijo.

Desde la perspectiva de Wilson, toda teoría de campos está definida en un cierto corte Λ_{fir} que tiene significado físico, y especifica la región de validez de la teoría, $p < \Lambda_{\text{fir}}$. P.ej., para teorías que describen sistemas de materia condensada, $\Lambda_{\text{fir}} \lesssim 1/a$, donde a es la distancia interatómica, y para el Modelo Estándar, $\Lambda_{\text{fir}} \lesssim M_{\text{planc}}$. Nunca existen entonces verdaderas divergencias UV.

La pregunta central en este enfoque es cómo evolucionan los acoplamientos de nuevo $g_{i,0}(\Lambda)$ cuando Λ decrece. Sabemos que toda la información de la teoría está contenida en la función de partición (o funcional

generatriz) $Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp(iS + \int d^4x J\varphi)$. Pasando a espacio de momentos $\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(p)$ ($\int_x d^4x \varphi(x) = \int_p \tilde{\varphi}(p)$), haciendo una rotación de Wick a la versión euclídeana, e imponiendo el corte UV $p^2 \leq \Lambda^2$, esto es

$$Z[J]_{\Lambda} = \int_{p \leq \Lambda} \mathcal{D}\tilde{\varphi} \exp(-S_E), \text{ donde hemos incluido en } S_E \text{ al término}$$

↳ acción euclídeana

con la fuente J . Para que la física no cambie cuando variamos Λ , debe ser el caso entonces que la acción sí depende de Λ de una manera específica, tal que

↳ quitamos "E" de euclídeana

$$Z_{\Lambda} \equiv \int \mathcal{D}\tilde{\varphi}_{\Lambda} \exp(-S_{\Lambda}) = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi}_{\Lambda'} \exp(-S_{\Lambda'}) \equiv Z_{\Lambda'}.$$

Esto es la ecuación básica del grupo de renormalización Wilsoniano, y es análoga a la ecuación que en el enfoque de Callan-Symanzik escribimos (a nivel de correlador en lugar de Z) en la p. 850. La acción S_{Λ} se conoce como la acción efectiva (Wilsoniana). Está relacionada con, pero es en general distinta a, la acción efectiva LP1, Γ , de la Tarea 15: S_{Λ} define una teoría cuántica (con corte Λ), ^{↳ incluye lazos} mientras que Γ es "clásica" en el sentido de usarse solo a nivel árbol.

Para analizar explícitamente el efecto de disminuir el corte UV de Λ a $\Lambda' < \Lambda$, conviene adaptar una notación que distinga entre



los modos de Fourier $\tilde{\varphi}(p)$ que son "pesados" o "UV", con $\Lambda' \leq p < \Lambda$,

y aquellos que son "ligeros" o "IR", con $p < \Lambda'$. Denotaremos

$$\tilde{\Phi}(p) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(p) & \text{si } \Lambda' \leq p < \Lambda \\ 0 & \text{si } p < \Lambda' \end{cases}, \quad \tilde{\phi}(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Lambda' \leq p < \Lambda \\ \tilde{\varphi}(p) & \text{si } p < \Lambda' \end{cases},$$

de modo que podemos escribir $\tilde{\varphi}(p) = \tilde{\Phi}(p) + \tilde{\phi}(p)$, y también

$\varphi(x) = \Phi(x) + \phi(x)$ para las correspondientes transformadas de Fourier.

Vemos entonces que la exigencia de que

$$\int \mathcal{D}\tilde{\varphi}_{\Lambda'} e^{-S_{\Lambda'}} = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi}_{\Lambda} e^{-S_{\Lambda}}$$

equivale a

$$\int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-S_{\Lambda'}} = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \mathcal{D}\tilde{\Phi} e^{-S_{\Lambda}},$$

es decir,

$$e^{-S_{\Lambda'}} = \int \mathcal{D}\tilde{\Phi} e^{-S_{\Lambda}}.$$

Esta fórmula nos da en principio un método para calcular la acción efectiva wilsoniana en una teoría genérica. En la práctica, por supuesto, solo podemos hacer explícitamente los cálculos si la teoría es débilmente acoplada.

Para ser concreto, digamos que la acción efectiva inicial, que define la teoría a la escala del corte Λ , es

$$S_{\Lambda}[\varphi] = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right).$$

signos apropiados para acción euclídea

En términos de nuestra notación de secciones y capitular anteriores en este curso, todas las cantidades aquí deberían llevar un subíndice "0", porque son denudos (asociados a la escala del corte Λ); pero por brevedad lo omitiremos.

Resulta natural definir como antes acoplamiento adimensional, solo que ahora la escala energética que tenemos a nuestra disposición para hacerlo es Λ en lugar de μ :

$$g_2(\Lambda) \equiv m^2 \Lambda^{-2}, \quad g_4(\Lambda) \equiv \lambda \Lambda^{d-4},$$

donde queda sobreentendido que $m^2 = m^2(\Lambda)$ y $\lambda = \lambda(\Lambda)$ (y, de nuevo, los acoplamientos en los que estamos trabajando aquí son denudos, $g_i = g_{i,0}$.)

Usando $\varphi = \phi + \Phi$, podemos escribir

$$\begin{aligned} S_{\Lambda}[\varphi] &= \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi + \partial_{\mu} \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 (\phi + \Phi)^2 + \frac{\lambda}{4!} (\phi + \Phi)^4 \right\} \\ &= S_{\Lambda}[\phi] + \int d^d x \left\{ \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \Phi + m^2 \phi \Phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi^3 \Phi + \frac{1}{4} \phi^2 \Phi^2 + \frac{1}{6} \phi \Phi^3 + \frac{1}{4!} \Phi^4 \right) \right\} \end{aligned}$$

$\phi^4 + 4\phi^3\Phi + 6\phi^2\Phi^2 + 4\phi\Phi^3 + \Phi^4$

Dado que $\int \int^2 x \phi(x) \Phi(x) = \int \frac{\int^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\int^2 k}{(2\pi)^2} \int \int^2 x \overbrace{e^{i(p+k)\cdot x}}^{(2\pi)^2 \delta^{(2)}(p+k)} \tilde{\phi}(p) \tilde{\Phi}(k) = 0$
 porque $\tilde{\phi}(p^0) \tilde{\Phi}(-p^0) = 0$ (los modos pesado y ligero no tienen ningún traspase en espacio de momento), y similarmente

$$\int \int^2 x \partial_\omega \phi(x) \partial^\omega \Phi(x) = \int \frac{\int^2 p}{(2\pi)^2} (ip_\omega \tilde{\phi}(p)) (-ip^\omega \tilde{\Phi}(-p)) = 0,$$

los 2 términos en el primer renglón dentro de las llaves en S_Λ se anulan, y tenemos

$$S_\Lambda[\varphi] = S_\Lambda[\phi] + \int \int^2 x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\omega \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi^3 \Phi + \frac{1}{4} \phi^2 \Phi^2 + \frac{1}{6} \phi \Phi^3 + \frac{1}{4!} \Phi^4 \right) \right\} \\ \equiv S_{uv, \text{int}}[\phi, \Phi]$$

Para obtener la acción efectiva a escala Λ' , debemos (p. 892) calcular la integral funcional sobre Φ , pesada con S_Λ :

$$e^{-S_{\Lambda'}[\phi]} = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_\Lambda[\phi+\Phi]} = e^{-S_\Lambda[\phi]} \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_{uv, \text{int}}[\phi, \Phi]}.$$

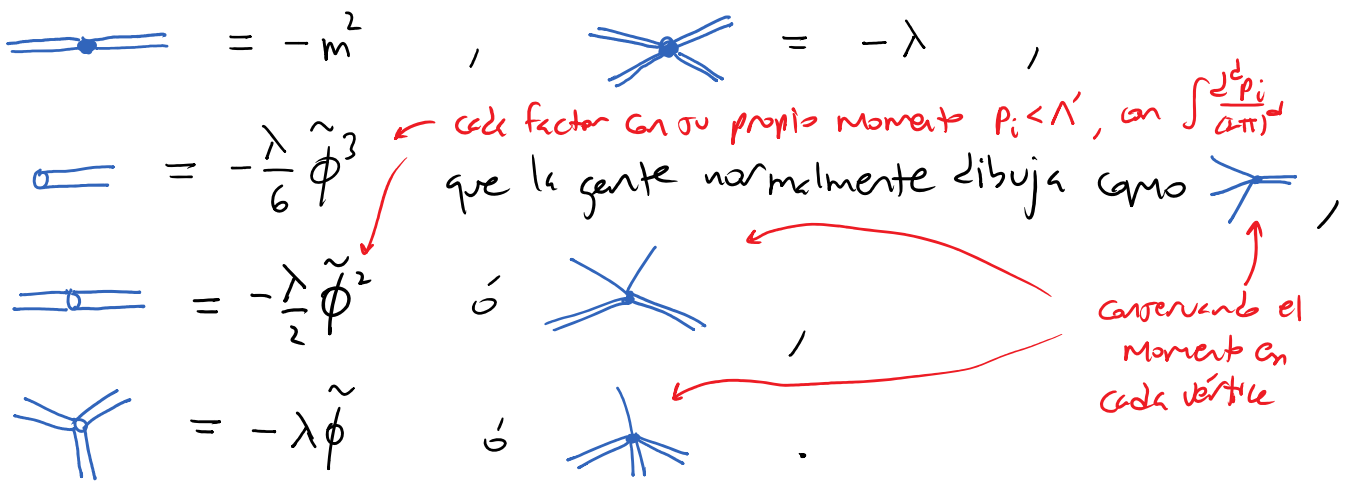
Sabemos muy bien cómo hacer esta integral de forma perturbativa (pp. 559-569 y 404-418, especialmente 413-415): el resultado estará dado por la exponencial de la suma de todas las 'burbujas de vacío' (diagramas sin patas externas) que pueden dibujarse con las reglas de Feynman deducidas a partir de la acción $S_{uv, \text{int}}[\phi, \Phi]$, donde $\Phi(x)$ se toma como el campo que

estamos cuantizando (pues es sobre él que integrar funcionalmente),
 y $\phi(x)$ es simplemente un campo clásico con un perfil fijo, que
 figura en las constantes de acoplamiento (dependientes ahora de x).

Como estamos mayormente interesados en el caso con $m \ll \Lambda' < \Lambda$,
 trataremos incluso al término de masa ($\propto g_2 \ll 1$) de forma
 perturbativa. A partir de los términos de interacción en la acción,

$$S_{w, int}^{int} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi^3 \Phi + \frac{1}{4} \phi^2 \Phi^2 + \frac{1}{6} \phi \Phi^3 + \frac{1}{4!} \Phi^4 \right) \right\},$$

y denotando con una línea doble a Φ , las reglas de Feynman
 para los vértices a espacio de momentos son



El propagador se obtiene de $\int d^2x \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2$, tomando en cuenta la

restricción del momento:

$$\text{---} = \frac{1}{p^2} \Theta(p; \Lambda', \Lambda) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } \Lambda' \leq p < \Lambda \\ 0 & \text{si no} \end{cases} .$$

Un ejemplo de una burbuja de vacío es  (ó ) ,

que podemos determinar explícitamente:

factor de simetría, p.418 $p_1+p_2=p_3$

$$p \equiv p_1+p_2 \quad p_3+p_4=p \quad k+p$$

$$= \frac{1}{2^2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_3}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) \tilde{\phi}(p_3) \tilde{\phi}(p_4) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+p)^2}$$

$\Lambda' \leq k < \Lambda$

este lado dará un resultado finito \rightarrow

o desarrollando en Taylor en potencias de $p_i < k$,

$$\text{Diagram} = \frac{\lambda^2}{16} \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_3}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) \tilde{\phi}(p_3) \tilde{\phi}(p_4) \left\{ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^4} + \mathcal{O}(p_i^2) \right\}$$

$\Lambda' \leq k < \Lambda$

$$= \frac{\lambda^2}{16} \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_3}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) \tilde{\phi}(p_3) \tilde{\phi}(p_4) \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\Omega_{d-1} \int_{\Lambda'}^{\Lambda} \frac{k^{d-1} dk}{k^4}$$

p.781 $\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \left[\frac{k^{d-4}}{d-4} \right]_{\Lambda'}^{\Lambda}$

De vuelta en espacio de posiciones, esto es

factorizar, por conveniencia $\leftarrow \approx 1+(d-4)\ln \Lambda$

$$\text{Diagram} = \frac{1}{4!} \int d^d x \phi^4(x) \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{\Lambda^{d-4} - \Lambda'^{d-4}}{d-4} \right) \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{1}{4!} \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right) \int d^d x \phi^4$$

$$\text{En } \exp(-S_{\Lambda'}[\phi]) = \exp(-S_{\Lambda}[\phi]) \int d\Phi \exp(-S_{uv,IR}[\Phi, \phi]) ,$$

$$\exp\left(-\int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right\}\right) \exp\left(\text{Diagram} + \text{otros burbujas de vacío}\right)$$



este diagrama tiene el efecto de cambiar el acoplamiento asintótico,

$$S_{\Lambda'}[\phi] \supset \int d^d x \left\{ \frac{\lambda'}{4!} \phi^4 \right\} \quad \text{con} \quad \lambda' \equiv \lambda(\Lambda) + \Delta\lambda(\Lambda, \Lambda') ,$$

dando nuestro resultado determinando explícitamente $\Delta\lambda$:



$$\Delta\lambda = -\frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{\Lambda^{d-4} - \Lambda'^{d-4}}{d-4} \right) \quad \text{en } d \text{ arbitraria,}$$

$$\Delta\lambda = -\frac{3\lambda(\Lambda)^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right) \quad \text{en } d=4.$$

Para ser más precisos, este es el efecto del diagrama  (o ) cuando apenas tomamos en cuenta la parte de orden cero en p_i^w . Los términos sucesivos darán contribuciones a $S_{\Lambda'}$ que involucren a $\tilde{\phi}(p_1)\tilde{\phi}(p_2)\tilde{\phi}(p_3)\tilde{\phi}(p_4)$ multiplicados por potencias de p_i^w , lo cual se traduce en espacios de posiciones a términos con derivadas de los 4 campos ligeros $\phi(x)$, como p.ej. $\int d^d x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \phi^2$.

Este tipo de términos se genera a pesar de que **NO** estaban presentes en S_{Λ} . Y además de términos con más derivadas, tendremos

términos con potencias más altas de $\phi(x)$. P.ej. el diagrama

 (o ) contribuye a $S_{\Lambda'}$ un término $\propto \int d^d x \phi^6(x)$ y otros términos con derivadas de estos 6 $\phi(x)$.

Vemos entonces que la acción efectiva a escala Λ' toma la forma

$$S_{\Lambda'}[\phi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (Z + \Delta Z) (\partial_{\mu} \phi)^2 + \frac{1}{2} (m^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda + \Delta \lambda) \phi^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{6!} (\lambda_6 + \Delta \lambda_6) \phi^6 + \frac{1}{4} (\lambda_{4,2} + \Delta \lambda_{4,2}) (\partial_{\mu} \phi)^2 \phi^2 + \dots \right\}$$

$\curvearrowright \equiv \lambda_{2,2}$ $\curvearrowright \equiv \lambda_2 \equiv \lambda_{2,0}$ $\curvearrowright \equiv \lambda_4 \equiv \lambda_{4,0}$
 $\curvearrowright \equiv \lambda_{6,0}$ \swarrow no necesariamente renormalizable

que es simplemente la acción más general que respeta las simetrías del problema (Poincaré y el cambio discreto de fase $\phi \rightarrow -\phi$).

Hemos adoptado una notación en la cual $\lambda_{n,l}$ denota el acoplamiento en un término con n potencias del campo y l derivadas (que tiene entonces dimensión $D_{n,l} = d + n(1 - \frac{d}{2}) - l$, p.709) y cuando $l=0$, $\lambda_{n,0} \equiv \lambda_n$. A pesar de que habríamos empezado específicamente con $Z=1$ y $\lambda_6 = \lambda_{4,2} = \dots = 0$, incluimos estas variables en $S_{\Lambda'}$ para abrir de una vez el caso en el que habríamos empezado con una S_{Λ} más general.

Para poder hacer una comparación más directa entre nuestras 2 acciones efectivas, es útil hacer 2 cosas:

- 1) Para incorporar el hecho de que S_{Λ} se usa con $p < \Lambda$ y $S_{\Lambda'}$ con $p < \Lambda'$, nos conviene reescalar los momentos (y por tanto las distancias) en la teoría primada, definiendo

$$p' \equiv p \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda'} \quad \longleftrightarrow \quad x' = x \cdot \frac{\Lambda'}{\Lambda},$$

de tal forma que $p < \Lambda'$ equivale a $p' < \Lambda$. Después de este recalcamento,

$$S_{\Lambda'} = \int d^d x' \left(\frac{\Lambda}{\Lambda'} \right)^d \left\{ \frac{1}{2} (z + \Delta z) \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^2 (\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda + \Delta \lambda) \phi^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{6!} (\lambda_6 + \Delta \lambda_6) \phi^6 + \frac{1}{4} (\lambda_{4,2} + \Delta \lambda_{4,2}) \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^2 (\partial'_\mu \phi)^2 \phi^2 + \dots \right\}$$

2) Para tener el término cinético normalizado de la misma manera en $S_{\Lambda'}$ y S_Λ , conviene definir en la teoría primera un campo recalcado $\phi' = \sqrt{\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{2-d} \frac{z + \Delta z}{z}} \phi$ (en nuestro ejemplo $z=1$),

y de paso renombrar $\phi' \rightarrow \varphi'$. Obtendremos entonces

$$S_{\Lambda'} = \int d^d x' \left\{ \frac{1}{2} z (\partial'_\mu \varphi')^2 + \frac{1}{2} (m^2 + \Delta m^2) \frac{z}{z + \Delta z} \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{-2} \varphi'^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4!} (\lambda + \Delta \lambda) \frac{z^2}{(z + \Delta z)^2} \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{2-d} \varphi'^4 + \frac{1}{6!} (\lambda_6 + \Delta \lambda_6) \frac{z^3}{(z + \Delta z)^3} \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{2d-6} \varphi'^6 \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (\lambda_{4,2} + \Delta \lambda_{4,2}) \frac{z^2}{(z + \Delta z)^2} \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{d-2} (\partial'_\mu \varphi')^2 \varphi'^2 + \dots \right\}$$

$$\equiv \int d^d x' \left\{ \frac{1}{2} z (\partial'_\mu \varphi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \varphi'^2 + \frac{1}{4!} \lambda' \varphi'^4 + \frac{1}{6!} \lambda'_6 \varphi'^6 + \frac{1}{4} \lambda'_{4,2} (\partial'_\mu \varphi')^2 \varphi'^2 + \dots \right\}$$

1 por convención (\Rightarrow propagador = $\frac{1}{p^2}$)

con acoplamiento

$$m'^2 \equiv (m^2 + \Delta m^2) \frac{z}{z + \Delta z} \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{-2},$$

← Notar que Δm^2 aquí es distinto a la p. 641

$$\lambda' \equiv (\lambda + \Delta \lambda) \frac{z^2}{(z + \Delta z)^2} \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{d-4},$$

← Notar que esta definición de λ' es distinta a la que tenemos en la p. 899

$$\lambda'_6 \equiv (\lambda_6 + \Delta \lambda_6) \frac{z^3}{(z + \Delta z)^3} \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{2d-6},$$

$$\lambda'_{4,2} \equiv (\lambda_{4,2} + \Delta \lambda_{4,2}) \frac{z^2}{(z + \Delta z)^2} \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{d-2},$$

y más en general,

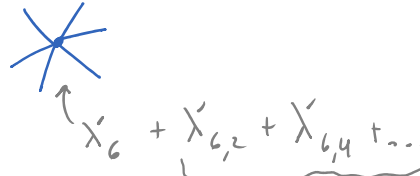
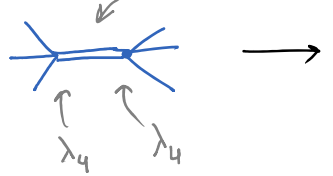
$$\lambda'_{n,l} = (\lambda_{n,l} + \Delta \lambda_{n,l}) \left(\frac{z}{z + \Delta z} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{D_{n,l}}, \text{ con } D_{n,l} = d + n(1 - \frac{d}{2}) - l.$$

Con esto vemos que el efecto neto de cambiar el conteo UV es cambiar los acoplamientos desnudos $\lambda_{n,l}$ que definen a la teoría, con las reglas de transformación específicas $\lambda_{n,l} \rightarrow \lambda'_{n,l}(\lambda; \Lambda, \Lambda')$. En otras palabras, cuando decidimos omitir de nuestra descripción a los modos UV en la franja $\Lambda' \leq p < \Lambda$, podemos compensar su ausencia agregando nuevas interacciones (o modificando las ya existentes) entre los modos IR ($p < \Lambda'$).

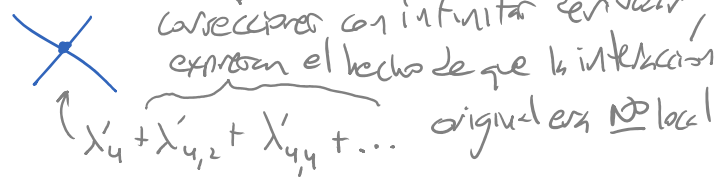
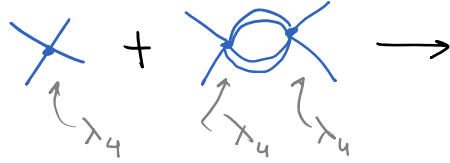
L24: 21/11/17

Φ_s actúan como intermediarios de interacciones entre ϕ_s

P.ej.,

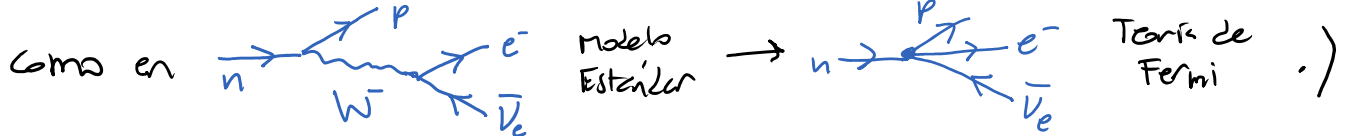


ó

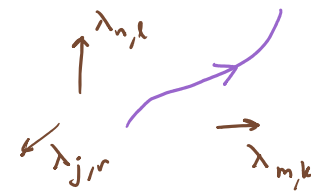


Correcciones con infinitas derivadas, expresan el hecho de que las interacciones originales no local

(Esta idea de "integrar para sacar" ("integrate out") grado de libertad puede usarse para un campo completo, $e^{-S_{eff}[\psi]} \equiv \int \mathcal{D}W e^{-S[\psi, W]}$, con $m_W \gg m_\psi$,



La versión infinitesimal de esta transformación, con $\Lambda \rightarrow \Lambda' = \Lambda + \delta\Lambda$ y $\lambda_{n,l} \rightarrow \lambda'_{n,l} = \lambda_{n,l} + \delta\lambda_{n,l}$, define el fluj del grupo de renormalización Wilsoniano: una trayectoria en el espacio de teorías.



La teoría libre no masiva, $\lambda_{n,l} = 0 \forall n,l$ (excepto $\lambda_{2,2} \equiv \bar{z} = 1$), es un punto fijo de la transformación $\lambda \rightarrow \lambda'$, porque los modos de Fourier están desacoplados entre sí. Cerca de este punto fijo, las correcciones $\Delta\lambda_{n,l}$ (incluyendo $\Delta\bar{z}$) son entonces pequeños, y tenemos simplemente $\lambda'_{n,l} \approx \lambda_{n,l} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)^{D_{n,l}}$,

de donde vemos que, al ir a bajas energías, los acoplamientos con dimensión

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{n,l} > 0 \text{ (relevantes o súper-renormalizables) } \underline{\text{crecen}}, \\ D_{n,l} = 0 \text{ (marginales o estrict. renormalizables) } \underline{\text{se mantienen igual}}, \\ D_{n,l} < 0 \text{ (irrelevantes o no renormalizables) } \underline{\text{decrecen}}, \end{array} \right.$$

lo cual coincide exactamente con lo que aprendimos en el grupo de renormalización de Callan-Symanzik. ✓

En el caso de los acoplamiento que a orden más bajo son marginales, las correcciones más altas deciden si crecen o decrecen al disminuir Λ , es decir, si son marginalmente relevantes o marginalmente irrelevantes (o exactamente marginales). P.ej., para $\lambda \equiv \lambda_4 \equiv \lambda_{4,0}$ en $d=4$,

de la p. 897 sabemos que $\Delta\lambda = -\frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)$, así que

$$\lambda' = \left(\lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right) \right) \left(\frac{\Lambda}{\Lambda'} \right)^{D_{4,0}} ,$$

$\begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \searrow 0 \\ \text{--- } \mathcal{O}(\lambda^2) \end{array}$

es decir, $\lambda' = \lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)$. ← recordamos que estos acoplamiento son donde

Podemos ver que este resultado, obtenido con un corte flotante Λ' , es idéntico al que obtuvimos en la p. 856 con un corte de deslizante μ ,

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) .$$

Podemos recuperar la función beta como $\beta \equiv \Lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \Lambda} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \approx \frac{3\lambda'^2}{16\pi^2}$.
 LZ: 10/06/16

Claramente, si queremos estudiar a nuestra teoría a la escala experimental p , nos conviene usar la acción efectiva S_p , definida a la escala $\Lambda \sim p$, cuyos suplementos ya incluyen las contribuciones de todos los modos con energías mayores a p , con lo cual nuestras predicciones a nivel árbol darán una mejor aproximación. Si usáramos en cambio S_Λ , que es lo que habíamos hecho inicialmente en este curso, las contribuciones de los modos UV entre p y Λ aparecen abruptamente cuando calculamos los, dando correcciones grander a los resultados a nivel árbol, que parecen invalidar la expansión perturbativa.

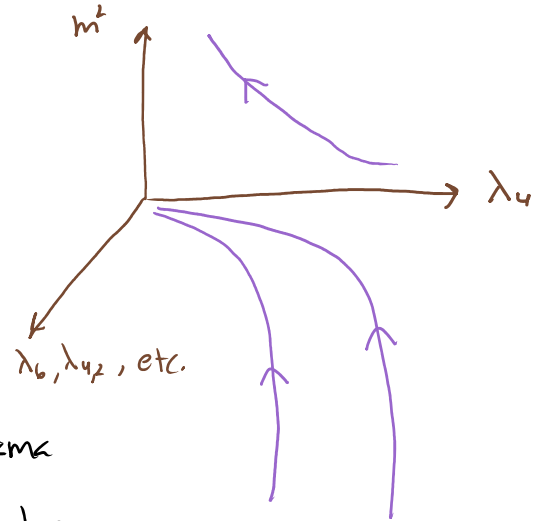
Con esto entendamos entonces el diagrama que teníamos en la p. 825 para el grupo de renormalización wilsoniano,



que además hemos visto que contiene la misma información que su contraparte de Callan-Symanzik,



En ambos enfoques, hemos visto que los acoplamiento irrelevantes (no renormalizables) decrecen rápidamente al ir a bajas energías. En otras palabras, los flujos de renormalización tienen la importante propiedad de que se enfocan sobre el subespacio de acoplamiento renormalizables (= relevantes + marginales),



Como en el ejemplo en $d=4$ ilustrado en el diagrama de la derecha. Esta es una simplificación drástica, porque solo hay un número finito de acoplamiento relevantes o marginales, mientras que el número de acoplamiento irrelevantes es infinito.

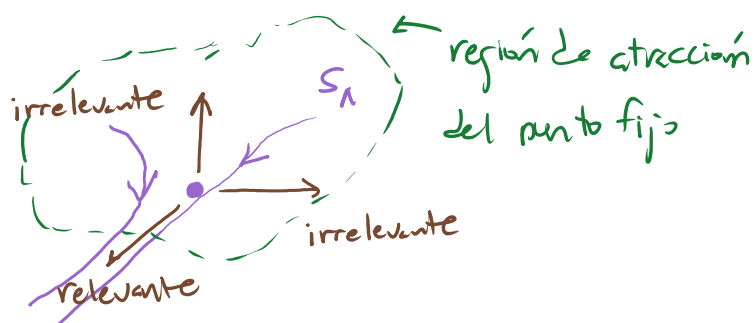
En algunas teorías puede ser que no exista ningún acoplamiento renormalizable. Este es el caso, p.ej., de una teoría en $d=4$ que solo contenga campos espinorales: la interacción más sencilla, $(\bar{\Psi}\Psi)^2$, es irrelevante. Y también es el caso de la gravedad en $d > 2$: la acción de Einstein-Hilbert, $S_{EH} = \frac{1}{8\pi G_N} \int d^d x \sqrt{-g} R$, en términos del campo del gravitón $h_{\mu\nu}(x)$ canónicamente normalizado, $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{G_N} h_{\mu\nu}(x)$, si contiene interacciones, $S_{EH} \sim \int d^d x (\partial h \partial h + \sqrt{G_N} h \partial h \partial h + (\sqrt{G_N})^2 h^2 \partial h \partial h + \dots)$; pero dado que $\sqrt{G_N}$ tiene dimensión $D = 1 - \frac{d}{2} < 0$, todos ellos son irrelevantes.

En estos casos, cuando vamos a bajas energías y los acoplamientos irrelevantes se apagan, la teoría renormalizable que obtenemos es una teoría libre. P.ej., la gravedad es despreciable para $p \ll M_{\text{Planck}}$.

Cuando aprendimos a renormalizar, los capítulos atrás, nuestra idea era retirar el corte Λ ($\Lambda \rightarrow \infty$) lo más pronto posible, después de haber reescrito nuestras predicciones en términos de parámetros renormalizados. Vimos que esta reescritura involucra un número finito o infinito de parámetros dependiendo de si la teoría es renormalizable o no renormalizable, ¡con lo cual pareció una casualidad muy afortunada que el Modelo Estándar sea renormalizable (Tarea 12)! Con el enfoque de Wilson, entendemos que esto NO es una casualidad: sin importar qué tan complicada sea la teoría a la escala del corte físico Λ_{fir} , ¡al examinarla a energías $p \ll \Lambda_{\text{fir}}$ inevitablemente encontraremos que se reduce a una acción efectiva renormalizable!

Esta es justamente la visión que tenemos del Modelo Estándar hoy en día: que es "solo" una teoría efectiva, válida a bajas energías, que eventualmente habremos de reemplazar por una teoría mejor — la cual nos gustaría que incorpore a la gravedad, e idealmente sea completa en el UV.

La contraparte del hecho de que desde esta nueva perspectiva los acoplamientos no renormalizables ya no nos importan, es que sabemos bien que los acoplamientos relevantes (super-renormalizables), como la masa m^4 , crecen rápidamente al ir a bajos energías. Así que, si queremos que tengan un valor razonable a la escala experimental $p \ll \Lambda$, debemos ajustar su valor a que sea muy pequeño a la escala del corte Λ . En otros palabras, debemos asegurarnos de que S_Λ esté muy cerca de un punto fijo del grupo de renormalización, en lo que a los acoplamientos relevantes se refiere.



En resumen, para definir una teoría de campos con $\Lambda \gg p$, debemos empezar con una teoría conforme y decidir los valores iniciales para cada uno de los acoplamientos que son relevantes en torno a ese punto fijo. El valor de los acoplamientos irrelevantes y el significado preciso del corte Λ no importan (dentro de la región de atracción de la CFT); muchas teorías distintas en el UV coinciden en $p \ll \Lambda$: pertenecen a la misma "clase de universalidad".

12. Cuantización de Teoría No Abelianda

En las p. 329-334, vimos que la teoría de Maxwell, con grupo de norma $U(1)$, puede fácilmente generalizarse al caso de un grupo de norma no abeliano G (opciones para G son $SU(N)$, $SO(N)$, $Sp(N)$, los grupos excepcionales E_6, E_7, E_8, F_4 y G_2 , o productos de dos o más de estos factores y/o $U(1)$ s), con generadores T^α $\alpha=1, \dots, \dim G$ (p.ej. $\dim SU(N) = N^2 - 1$) y relaciones de conmutación $[T^\alpha, T^\beta] = i f^{\alpha\beta\gamma} T^\gamma$. ctes. de estructura totalmente antisimétricas (con elección de base T^α)

El resultado es la teoría de Yang-Mills (Shaw)

$$\mathcal{L}_{YM}(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \right]$$

con campo de norma $A_\mu(x) \equiv A_\mu^\alpha(x) T^\alpha$, tomando en cuenta convención habitual $\text{Tr}(T^\alpha T^\beta) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}$
 campo matricial \rightarrow $\dim G$ campos vectoriales reales \uparrow
 (valores en el álgebra de Lie de G)

e intensidad de campo $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu] \equiv F_{\mu\nu}^\alpha T^\alpha$, acoplamiento

es decir, $F_{\mu\nu}^\alpha(x) = \partial_\mu A_\nu^\alpha(x) - \partial_\nu A_\mu^\alpha(x) - g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma$.

L25 = 23/11/17

con $\mathcal{L}_m(\varphi_I, \partial_\mu \varphi_I)$ invariante bajo transformaciones de G globales, entonces definiendo la derivada covariante

$$\mathbb{D}_\mu \equiv \partial_\mu + ig A_\mu(x) ,$$

encontramos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m(A, \partial A) + \mathcal{L}_m(\varphi, \mathbb{D}_\mu \varphi)$ es invariante bajo transformaciones de G locales, donde los generadores T^α dentro de $\mathbb{D}_\mu \varphi$ deben por supuesto también estar en la representación r , $[\mathbb{D}_\mu \varphi(x)]_I \equiv \partial_\mu \varphi_I(x) + ig A_\mu^\alpha [T^\alpha]_{II} \varphi_I(x)$.

Lo importante de esta definición es que, bajo transformaciones de norma, $\mathbb{D}_\mu \varphi$ transforma exactamente igual que φ ,

$$[\mathbb{D}_\mu \varphi(x)]_I \rightarrow [\mathbb{D}'_\mu \varphi(x)]_I = \exp(i\theta^\alpha(x) T^\alpha)_{II} [\mathbb{D}_\mu \varphi(x)]_I .$$

Los grupos usados más frecuentemente son $G = SU(N)$.

Las representaciones más frecuentes son

↑ Modelo Estándar
SU(3) x SU(2) x U(1)

- La fundamental, que básicamente es la que define al grupo, $r = \underline{N}$ en el caso de $SU(N)$, donde el índice interno $I = 1, \dots, N$.
- La adjunta, denotada $r = G$, a la cual pertenecen los generadores del álgebra, así que $I \leftrightarrow \alpha = 1, \dots, \dim r = \dim G$. Más explícitamente,

La matriz que representa al generador T^α en la representación adjunta es $(T_\alpha^\alpha)_{\beta\gamma} \equiv i f^{\alpha\beta\gamma}$. Para $G = SU(N)$, la adjunta tiene dimensión $\dim G = N^2 - 1$ (= matrices $N \times N$ hermitianas y sin traza).

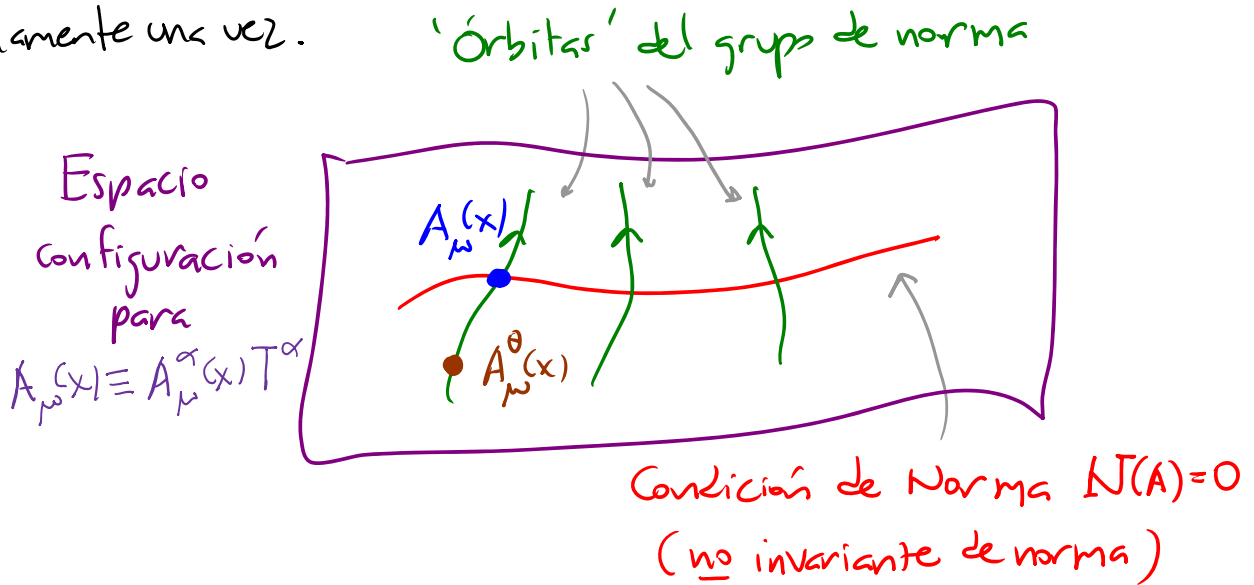
- La antifundamental, que es la representación conjugada $= (T_r^\alpha)^T$
 $(\exp(i\theta^\alpha (T_r^\alpha)))^* \underset{\text{rep}}{\equiv} \exp(-i\theta^\alpha (T_r^\alpha)^*) \equiv \exp(i\theta^\alpha (T_{\bar{r}}^\alpha)) \leftrightarrow (T_{\bar{r}}^\alpha) \equiv -\overline{(T_r^\alpha)^*}$
 a la fundamental, $r = \bar{N}$ para $G = SU(N)$. En el caso especial de $SU(2)$, N y \bar{N} son equivalentes; pero para $N > 2$ son distintos.

La generalización no abeliana de QED, donde acoplamos $A_\mu(x)$ a un campo de Dirac $\psi_{\underline{I}}(x)$, es entonces (p. 333)

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \text{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}].$$

Con $G = SU(3)$ y $r = \underline{N}$, esto define a la Cromodinámica Cuántica (QCD), nombre que puede extenderse a otros G ó r . El campo $\psi(x)$ describe en ese caso a un (sabor específico de) quark, con índice de color $I = 1, \dots, N$, ^{o podríamos llamarlo c} y $A_\mu(x)$ está asociado a los $\dim G = 3^2 - 1 = 8$ distintos tipos de gluones, portadores de la fuerza fuerte.
 [28: 12/06/19]

Al cuantizar esta teoría por el método de integral funcional, ingenuamente definiríamos la funcional generatriz como $\int DA_\mu^\alpha D\psi D\bar{\psi} e^{iS}$; pero esto tiene el mismo problema que en el caso abeliano: es divergente por la invariancia de norma (redundancia). Para definir la teoría correctamente, debemos fijar la norma, de tal modo que cada configuración física se incluya en la integral de camino solamente una vez.



En las pp. 571-77, aprendimos el método de Fadeev-Popov para hacer esto de manera cuidadosa. Veremos que fijar la norma se traduce en reemplazar

$$\int DA_\mu^\alpha e^{iS} \rightarrow \int DA_\mu^\alpha(x) \underbrace{\delta^{(\infty)}[N(A)]}_{\text{delta de Dirac funcional}} \underbrace{\Delta_{FP}[A]}_{\text{determinante de Fadeev-Popov de la medida apropiada}} e^{iS}$$

↑ índice α oculto

imponer condición de norma $N(A)=0$

Al igual que en las pp. 577-578, nos conviene elegir la norma de Lorentz modificada $N_\omega[A^\mu] \equiv \partial_\nu A_\mu^\omega(x) - \omega_\mu(x)$, con $\omega(x)$ una función arbitraria. Y para lidiar con $\delta^{(\infty)}(N_\omega[A])$, tal como allá integrar sobre $\omega(x)$ con un peso gaussiano, $\int D\omega \exp(-i \int d^4x \frac{\omega_\alpha(x)\omega_\alpha(x)}{2\xi})$, donde el ancho ξ es arbitrario. El resultado neto es reemplazar

$$\int DA_\mu \delta^{(\infty)}[N(A)] \Delta_{FP}[A] e^{iS} \longrightarrow \int DA_\mu \Delta_{FP}[A] e^{i(S+S_\xi)}$$

donde aparece el término fijador de norma

$$S_\xi \equiv \int d^4x \mathcal{L}_\xi \equiv \int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A_\mu)(\partial \cdot A_\mu).$$

← Hace que la parte cinética sea invertible (⇒ propagador libre)

Hartz aquí todo es idéntico al caso abeliano. La diferencia radica en la forma que tiene la determinante de Faddeev-Popov

$$\Delta_{FP}[A_\mu] \equiv \det \left(\frac{\delta N(A^\theta)}{\delta \theta(x)} \right) \Big|_{N(A^\theta)=0} \quad (\text{p. 574}).$$

En Maxwell, $A_\mu^\theta(y) = A_\mu(y) - \partial_\mu \theta(y)$, por lo que

$$\frac{\delta N(A^\theta)}{\delta \theta(x)} = \frac{\delta}{\delta \theta(x)} \underbrace{(\partial \cdot A(y) - \partial^2 \theta(y) - \omega(y))}_{\partial^\nu A_\nu^\theta(y)} = -\partial^2 \delta^{(4)}(x-y) \text{ es independiente de } A_\mu.$$

En Yang-Mills, en cambio, la transformación de norma en su versión infinitesimal (que es todo lo que necesitamos para tomar la derivada) es (p.908)

$$A_\mu^\alpha(y) \rightarrow A_\mu^{\prime\alpha}(y) = A_\mu^\alpha(y) - f^{\alpha\beta\gamma} \Theta(y) A_\mu^\gamma(y) - \frac{1}{g} \partial_\mu \Theta^\alpha(y),$$

de modo que

$$\frac{\delta N(A_\mu^\alpha)}{\delta \Theta^\beta(x)} = \frac{\delta}{\delta \Theta^\beta(x)} \left(\partial \cdot A^\alpha - f^{\alpha\beta\gamma} \partial^\mu (\Theta^\beta A_\mu^\gamma) - \frac{1}{g} \partial^2 \Theta^\alpha - \omega^\alpha \right)$$

evaluar en y

$$= -f^{\alpha\beta\gamma} \partial^\mu (A_\mu^\gamma \delta^{(4)}(x-y)) - \frac{1}{g} \delta^{\alpha\beta} \partial^2 \delta^{(4)}(x-y)$$

$$= -\frac{1}{g} \partial^\mu \left[(\delta^{\alpha\beta} \partial_\mu + g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma) \delta^{(4)}(x-y) \right]$$

$$\text{p.910} \quad \delta^{\alpha\beta} \partial_\mu + i g (T_G^\alpha)_{\beta\gamma} A_\mu^\gamma = (D_\mu)_{\beta\gamma}^{\alpha\beta} \text{ derivada covariante actuando sobre un campo en la adjunta}$$

p.909

depende de A_μ .

Así que, mientras que en el caso abeliano Δ_{FP} era simplemente una constante que podemos sacar de la integral, en el caso no abeliano da una modificación importante a la medida de integración sobre A_μ . El último truco de Faddeev y Popov (que habíamos anticipado ya en la p.579) fue reescribir Δ_{FP} aprovechando el hecho de que una determinante funcional es

precisamente lo que resulta de hacer una integral funcional sobre campos fermiónicos, tal como vimos en las pp. 603-605, 615:

$$\det(\partial^\mu D_\mu) = \int Dc D\bar{c} \exp \left[i \int d^4x \underbrace{\bar{c} (\partial^\mu D_\mu) c}_{-\int d^4x \partial^\mu \bar{c} D_\mu c} \right].$$

$\begin{array}{l} \text{segundo campo fermiónico, } \uparrow \\ \text{independiente de } c \text{ (} \bar{c} \neq c^* \text{)} \\ \leftarrow \text{a veces llamado } b \end{array}$

$c(x)$ y $\bar{c}(x)$ son campos auxiliares reales, que se conocen como fantomas de Faddeev-Popov. A pesar de ser escalares bajo Lorentz, son fermiónicos, con lo cual violan el teorema de espin-estadística (p.272). Esto ocurre porque violan una de las suposiciones del teorema: el espacio de Hilbert que generen contiene estados con normas negativas. Podrían asustarnos entonces (¡por eso lo de fantomas!); pero los usaremos solo como objetos auxiliares, que figuran de manera importante únicamente en los pasos intermedios de los cálculos en teorías de normas no abelianas.

Recordando de la p.916 que la derivada covariante D_μ que se obtiene dentro de Δ_{FP} es específicamente la que actúa sobre campos en la adjunta, vemos que tanto el fantoma c como el "antifantoma" \bar{c} deben pertenecer a esta representación, así que tienen un índice implícito α .

En resumen, el proceso de cuantización de la teoría de norma no abelianas acaba agregando 2 términos a la acción:

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}(F^2) \rightarrow \underbrace{-\frac{1}{2} \text{Tr}(F^2)}_{\mathcal{L}_M} + \underbrace{\frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2}_{\mathcal{L}_\xi} - \underbrace{\bar{c} \partial^\mu D_\mu c}_{\mathcal{L}_f}.$$

\nearrow suma implícita sobre índice culto α

Junto con esto con la parte de materia, nuestra teoría completa es

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi - \frac{1}{2} \text{Tr}(F^2) + \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 - \bar{c} \partial^\mu D_\mu c.$$

El término fijador de norma puede reescribirse alternativamente como

$$\mathcal{L}_\xi = -\frac{\xi}{2} B^2 + B \partial \cdot A = -\frac{\xi}{2} B^\alpha B^\alpha + B^\alpha \partial_\mu A^\mu_\alpha$$

índice α implícitamente arriba o abajo

donde nos hemos inventado un nuevo campo auxiliar (bosónico) $B(x)$ (conocido como campo de Lautrup-Nakanishi), que no es dinámico: no tiene términos cinéticos. La integral $\int dB$ es gaussiana, por lo que el resultado de hacerla será (pp. 529-530) simplemente eliminar B en su ecuación de movimiento, $B^\alpha = \frac{1}{\xi} \partial_\mu A^\mu_\alpha$, lo cual nos lleva de vuelta a la forma original del lagrangiano fijador de norma,

$$-\frac{\xi}{2} B^\alpha B^\alpha + B^\alpha \partial_\mu A^\mu_\alpha = -\frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 + \frac{1}{\xi} (\partial \cdot A)^2 = +\frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2. \quad \checkmark$$

La utilidad del campo B es que nos permite notar más fácilmente

que nuestra teoría, obtenida después de fijar la norma, tiene una simetría continua global como herencia de las transformaciones de norma.

Se trata de la transformación de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST)

$$\delta A_\mu^\alpha = \epsilon (D_\mu)^\alpha{}_\beta c^\beta, \quad \delta \psi_I = -ig \epsilon c^\alpha (T^\alpha)_{II'} \psi_{I'},$$

$$\delta c^\alpha = \frac{1}{2} g f^{\alpha\beta\gamma} c^\beta c^\gamma, \quad \delta \bar{c}^\alpha = \epsilon B^\alpha, \quad \delta B^\alpha = 0.$$

no lineal
en los campos
(como la
inv. de norma)

Esta transformación mezcla campos bosónicos con fermiónicos, así que el parámetro infinitesimal de la transformación, ϵ , es anticomutativo. Como consecuencia de esta simetría, existe una carga conservada, Q_{BRST} ($Q^2=0$).

Esta nos permite distinguir, dentro del espacio de Hilbert completo, incluyendo los fantasmas, cuáles estados son físicos: Análogo a Gupta-Bleuler (pp. 364-6)

$$Q_{BRST} |fis\rangle = 0, \quad |fis\rangle \simeq |fis\rangle + Q_{BRST} |algo\rangle$$

[ver Perkin 16.4, Weinberg II 15.7]. La simetría BRST conduce a identidades de Ward, llamadas identidades de Skyrme-Taylor [Collins 2.13].

Lo que hemos escrito en la p. 913 es el lagrangiano desnudo de la teoría, donde los campos, la masa y el acoplamiento debieran tener un subíndice 0. Separando la parte renormalizada y los contra términos, tenemos $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{ct}$, con

$$\mathcal{L}_{\text{ren}} = \underbrace{\bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi}_{\bar{\Psi}i\cancel{\partial}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - g\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi} - \frac{1}{2}\text{Tr}(F^2) + \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 + \partial^\mu \bar{c} D_\mu c$$

$$\underbrace{\bar{\Psi}i\cancel{\partial}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - g\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi}_{-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha - g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2} \quad \partial^\mu \bar{c}^\alpha \partial_\mu c^\alpha - g f^{\alpha\beta\gamma} \partial^\mu \bar{c}^\alpha A_\mu^\beta c^\gamma$$

← suma implícita sobre índices α, β, γ repetidos

$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha)^2 + g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma \partial_\mu A_\nu^\alpha - \frac{g^2}{4} f^{\alpha\beta\gamma} f^{\alpha\delta\eta} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma A_\delta^\alpha A_\eta^\delta$$

Todos los términos de interacción involucran el mismo acoplamiento

y

$$\mathcal{L}_{\text{ct}} = \delta z_2 \bar{\Psi}i\cancel{\partial}\Psi - \delta m \bar{\Psi}\Psi - g \delta z_1 \bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi$$

$$- \delta z_3 \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha)^2 + g \delta z_{1,3g} f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma \partial_\mu A_\nu^\alpha - \frac{g^2}{4} \delta z_{1,4g} (f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2$$

$$+ \delta z_{2f} \partial^\mu \bar{c}^\alpha \partial_\mu c^\alpha - g \delta z_{1,f} f^{\alpha\beta\gamma} \partial^\mu \bar{c}^\alpha A_\mu^\beta c^\gamma.$$

Análogamente a QED, aquí hemos definido

$$z_2 \sqrt{z_3} g_0 \equiv z_1 g, \quad (\sqrt{z_3})^3 g_0 \equiv z_{1,3g} g, \quad z_3^2 g_0^2 \equiv z_{1,4g} g^2, \quad z_{2f} \sqrt{z_3} g_0 \equiv z_{1,f} g,$$




y por supuesto $z_x \equiv 1 + \delta z_x$. Notamos que esto implica que

$$\boxed{\frac{g}{g_0 \sqrt{z_3}} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_{1,3g}} = \sqrt{\frac{z_3}{z_{1,4g}}} = \frac{z_{2,f}}{z_{1,f}}}$$

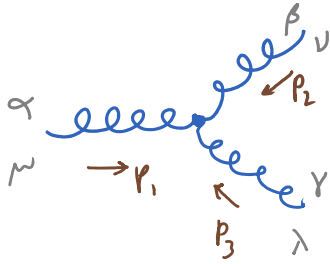
Al usar condiciones de renormalización para determinar los δZ_x en términos de correladores IP1 a 1 o más lazos, estas relaciones solo podrán mantenerse si hay en juego identidades de Ward apropiadas. Tal como en QED, estas identidades resultan indispensables para garantizar la renormalizabilidad de nuestra teoría no abeliana, que tiene 4 términos muy distintos controlados por el mismo acoplamiento g . En el contexto no abeliano, estas se conocen como identidades de Slavnov-Taylor, mencionadas en la p. 919.

De $\mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{ct}$ podemos deducir como siempre las reglas de Feynman. En espacio de momentos, los propagadores libres son:

$\xi = 1$ norma de Feynman
 $\xi = 0$ norma de Landau

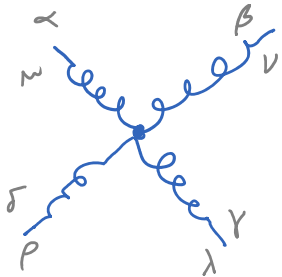
Gluón		=	$\frac{-i}{p^2} \left(\eta^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \delta_{\alpha\beta}$	
Quark		=	$\left(\frac{i}{p - m} \right)_{ba} \delta_{\alpha\beta}$	<i>si la flecha: cada A_μ^α es un campo real</i>
Fantasma		=	$\frac{i}{p^2} \delta^{\alpha\beta}$	<i>flecha no porque c sea complejo, sino porque $\bar{c} \neq c$</i>

Los vértices son:

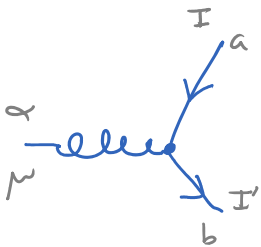


$$= -g f^{\alpha\beta\gamma} \left[\eta^{\mu\nu} (p_1 - p_2)^\lambda + \eta^{\nu\lambda} (p_2 - p_3)^\mu + \eta^{\lambda\mu} (p_3 - p_1)^\nu \right],$$

$-i(T_G^\alpha)_{\beta\gamma}$ generación en rep adjunta (p. 913)

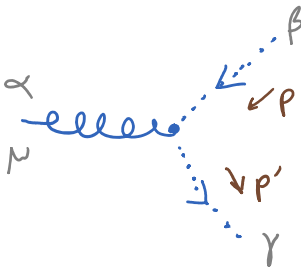


$$= -ig^2 \left[f^{\alpha\beta\eta} f^{\gamma\delta\eta} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}) \right. \\ \left. + f^{\alpha\delta\eta} f^{\beta\gamma\eta} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}) \right. \\ \left. + f^{\alpha\delta\eta} f^{\beta\gamma\eta} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\lambda} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\rho\nu}) \right],$$



$$= -ig \gamma_{ba}^\mu (T_r^\alpha)_{I'I}$$

\uparrow rep del quark (usualmente $r=N$)

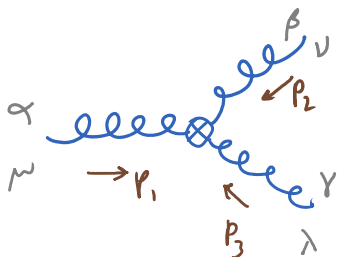


$$= -g f^{\alpha\beta\gamma} p'^\mu$$

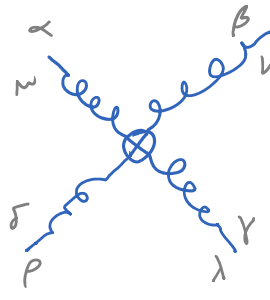
$-i(T_G^\alpha)_{\beta\gamma}$ rep adjunta

Y los contra términos son:


$$\text{ghost loop} = -i\delta_3^{\alpha\beta} (p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \delta^{\alpha\beta},$$



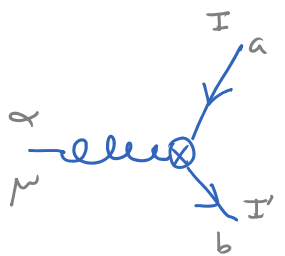
$$= -g\delta_{1,3\gamma} f^{\alpha\beta\gamma} \left[\eta^{\mu\nu} (p_1 - p_2)^\lambda + \eta^{\nu\lambda} (p_2 - p_3)^\mu + \eta^{\lambda\mu} (p_3 - p_1)^\nu \right],$$




$$= -ig^2 \delta_{1,45} \left[f^{\alpha\beta\eta} f^{\gamma\delta\eta} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}) + f^{\alpha\gamma\eta} f^{\beta\delta\eta} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\lambda\nu}) + f^{\alpha\delta\eta} f^{\beta\gamma\eta} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\lambda} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\rho\nu}) \right],$$



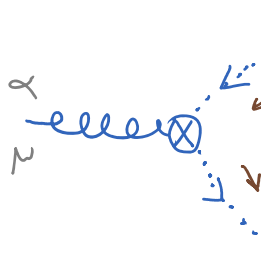
$$= (i\delta_{2,1} \not{p} - i\delta m) \delta_{I'I}$$



$$= -ig\delta_{2,1} \gamma_{ba}^{\mu} (T^{\alpha})_{I'I}$$



$$= i\delta_{2,f} p^2 \delta^{\alpha\beta}$$



$$= -g\delta_{1,f} f^{\alpha\beta\gamma} p'^{\mu}$$

Y debemos incluir un -1 por cada lazo fermiónico (de Ψ ó c).

L26: 20/11/17

Con estas reglas podemos hacer cálculos de correcciones, amplitudes, etc. se puede ver en esos cálculos que los fantasmas c, \bar{c} juegan siempre el papel de grado de libertad "negativo", que cancelan las polarizaciones longitudinales y temporales de los gluones A_{μ}^{α} , dejándonos solo con los modos de polarización transversal.

Examinaremos ahora el cálculo de la función beta para g , β_g . El punto de partida es la relación entre el acoplamiento desnudo g_0 y el acoplamiento renormalizado en un esquema de escala deslizante, $g = g(\mu)$. De la p. 920, tenemos 4 maneras distintas de escribir esta relación, refiriéndonos a los factores de renormalización Z_x para el quark, los fantasmas, el vértice de 3 gluones o el de 4 gluones. Conviene usar la primera opción, que en regularización dimensional toma la forma

$$g = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} \mu^{-\epsilon/2} g_0.$$

$Z_{1,q}$ $Z_{2,g}$ $Z_{3,g}$ para que g se mantenga adimensional

Según nuestra fórmula general de la p. 888, en el esquema \overline{MS} o \overline{MS} tenemos

$$\begin{aligned} \beta_g &= \underbrace{-g D_g}_{\uparrow 0} - \underbrace{\left(\frac{n}{2} - 1\right) g^2}_{\uparrow \frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial g} \left[\underbrace{p_1 \text{Re} z_1}_{\uparrow -1} + \underbrace{p_2 \text{Re} z_2}_{\uparrow +1} + \underbrace{p_3 \text{Re} z_3}_{\uparrow \frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial}{\partial g} \left[\text{Re} z_1 - \text{Re} z_2 - \frac{1}{2} \text{Re} z_3 \right], \end{aligned}$$

\swarrow número total de patrones \swarrow coef de pto $\frac{1}{\epsilon}$

$$\beta_g = \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial}{\partial g} \left[\text{Re} z_1 - \text{Re} z_2 - \frac{1}{2} \text{Re} z_3 \right]$$

Igual que en QED, la expansión perturbativa es en potencias de g^2 (en lugar de solo g). Usando $\frac{\partial}{\partial g} = \frac{\partial(g^2)}{\partial g} \frac{\partial}{\partial(g^2)} = 2g \frac{\partial}{\partial(g^2)}$, podemos reescribir

$$\beta_g = g \left(g^2 \frac{\partial}{\partial(g^2)} \right) \left[\text{Re} z_1 - \text{Re} z_2 - \frac{1}{2} \text{Re} z_3 \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{z_i \text{ a L lazo es de } \mathcal{O}(g^{2L})}$

da L al actuar sobre un término de L lazo

Así que al hacer cálculo solo a 1 lazo, tenemos simplemente

$$\beta_g = g \left[\text{Re} z_1^{(1)} - \text{Re} z_2^{(1)} - \frac{1}{2} \text{Re} z_3^{(1)} \right] \quad (L=1)$$

• Cálculo de $\delta z_2^{(1)}$: La autoenergía del quark es

$$-i \Sigma_{II'}(p) \equiv \text{Diagrama con un quark y un gluón en un lazo} \quad D=1$$

índice espinores
ab implícitos
como siempre

$$= \text{Diagrama con quark y gluón} + \text{Diagrama con un quark en un lazo} + \mathcal{O}(g^4)$$

$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-ig \gamma^{\mu'} (T_r^{\alpha'})_{II'}) \frac{i \delta_{JJ'}}{p+k-m} (-ig \gamma^{\mu} (T_r^{\alpha})_{JI}) \frac{(-i g_{\mu\nu} \delta_{\alpha\alpha'})}{k^2} + i (\delta z_2^{(1)} \not{p} - \delta m^{(1)}) \delta_{II'}$$

es norma de Feynman

L29: 17/06/19


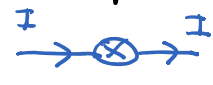
Podemos sacar enfrente los factores relacionados con el grupo no abeliano G :

$$\begin{aligned}
 -i \sum_{I'I} (\psi) &= \underbrace{(T_r^\alpha)_{IJ} (T_r^\alpha)_{JI}}_{(T_r^\alpha T_r^\alpha)_{I'I}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-ig\gamma_\mu) \frac{i}{\not{p}-\not{k}-m} (-ig\gamma^\mu) \frac{-i}{k^2} \\
 &\quad + \delta_{I'I} i(\delta z_2^{(1)} \not{p} - \delta m^{(1)}) + \mathcal{O}(g^4).
 \end{aligned}$$

El producto de generadores $T^\alpha T^\alpha$ (con suma implícita sobre $\alpha=1, \dots, \dim G$) conmuta con todos los T^β , y define al Casimir adriático del grupo G (p.64; el Casimir era \vec{J}^2 para $so(3)$ o $su(2)$). Por el lema de Schur (p.68), en cualquier representación irreducible (irrep) r , $T_r^\alpha T_r^\alpha$ debe ser proporcional a la identidad, ↖ a veces denotado C_2

$$(T_r^\alpha T_r^\alpha)_{I'I} = C(r) \delta_{I'I}$$

↖ depende de irrep

Vemos entonces que  $\propto \delta_{I'I}$, lo cual es buena noticia, porque permitirá que la divergencia logarítmica sea absorbible por  $= \delta_{I'I} i(\delta z_2 \not{p} - \delta m)$.

De la p. 805 sabemos además que (reemplazando $e \rightarrow g$)

$$\begin{aligned}
 -i \Sigma_{\text{QED}}^{(1)}(\not{p}) &= \frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \underbrace{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}_{\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{\frac{\epsilon/2}{2 - \frac{d}{2}}} \left((d-2) \not{x} \not{p} - d \cdot m \right) \\
 &\quad \underbrace{\left((1-x)m^2 + x m_g^2 - x(1-x)p^2 \right)}_{\substack{\text{corte IR} \\ \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots \text{ p. 703}}} \\
 &= \frac{i g^2}{(4\pi)^2} \left\{ \underbrace{\int_0^1 dx 2x \not{p}}_1 \left(\frac{2}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right) - 4m \left(\frac{2}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right) \right\} \\
 &= \frac{i g^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \not{p} - \frac{i g^2}{2\pi^2} \frac{1}{\epsilon} m + \mathcal{O}(\epsilon^0).
 \end{aligned}$$

Combinando esto con el prefactor no abeliano, tenemos

$$-i \Sigma_{\text{IPI}}^{(1)}(\not{p}) = \delta_{\text{IPI}} C(r) \left[\frac{i g^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} (\not{p} - 4m) + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right] + \delta_{\text{IPI}} i (\delta Z_2^{(1)} \not{p} - \delta m^{(1)}).$$

En el esquema MS, leemos de aquí que

$$\boxed{\delta Z_2^{(1)} = -\frac{g^2}{8\pi^2} C(r) \frac{1}{\epsilon}}$$

• Cálculo de $\delta Z_1^{(1)}$: el vértice vertido por el ghost es

$$-ig \left(\Gamma_\alpha^\mu \right)_{I'I} \equiv \text{Diagram 1} \quad D=0$$

$$= \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \mathcal{O}(g^4)$$

$$-ig \delta Z_1^{(1)} \gamma^\mu (T_r^\alpha)_{I'I}$$

Para el primer diagrama, podemos notar que

$$= \underbrace{\left(T_r^\beta \right)_{I'J'} \left(T_r^\alpha \right)_{JJ'} \left(T_r^\beta \right)_{JI}}_{\left(T_r^\beta T_r^\alpha T_r^\beta \right)_{I'I}}$$

$$-ig \Gamma_{\text{QED, lazo}}^\mu \quad D=0$$

El prefactor no abeliano lo podemos calcular como sigue:

$$T_r^\beta T_r^\alpha T_r^\beta = \underbrace{T_r^\beta T_r^\beta T_r^\alpha}_{C(r) \mathbb{1} \quad \text{p. 926}} + \underbrace{T_r^\beta [T_r^\alpha, T_r^\beta]}_{if^{\alpha\beta\gamma} T_r^\gamma \quad \text{p. 910}}$$

$$= C(r) T_r^\alpha + \underbrace{if^{\alpha\beta\gamma} T_r^\beta T_r^\gamma}_{f^{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2} [T_r^\beta, T_r^\gamma] \quad \text{por antisimetría de } f^{\alpha\beta\gamma}} \\ = C(r) T_r^\alpha + if^{\beta\gamma\delta} T_r^\delta$$

Recordemos ahora de la p. 913 que podemos reinterpretar

$if^{\beta\gamma\delta} = (T_G^\beta)_{\gamma\delta}$, el generador número β en la rep adjunta.

Así que $if^{\alpha\beta\gamma} if^{\beta\gamma\delta} = -if^{\beta\alpha\gamma} if^{\beta\gamma\delta} = -(T_G^\beta)_{\gamma\alpha} (T_G^\beta)_{\gamma\delta}$

$$= - \underbrace{(T_G^\beta T_G^\beta)_{\alpha\delta}}_{\text{Carimir en rep adjunta}} = -C(G) \delta_{\alpha\delta}.$$

Concluimos entonces que

$$T_r^\beta T_r^\alpha T_r^\beta = \left[C(r) - \frac{1}{2} C(G) \right] T_r^\alpha.$$

Por otra parte, sabemos que la divergencia en $-ig \Gamma_{\text{QED}, 1, 2}^{\text{N}}$ determina $\delta Z_{1, \text{QED}}^{(1)}$, que por la identidad de Ward de QED (p. 761), es igual a $\delta Z_{2, \text{QED}}^{(1)} = -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$ (p. 927).

Tenemos entonces

$$\delta Z_1^{(1)g} \leftarrow \text{contribución del diagrama con vértice del quark} = -\frac{g^2}{8\pi^2} \left[C(r) - \frac{1}{2} C(G) \right] \frac{1}{\epsilon}.$$

Notemos de paso que

$$\begin{aligned} C(G) \delta_{\alpha\delta} &\equiv (T_G^\beta T_G^\beta)_{\alpha\delta} = i f^{\beta\alpha\gamma} i f^{\beta\gamma\delta} = i f^{\alpha\beta\gamma} i f^{\delta\gamma\beta} \\ &= (T_G^\alpha)_{\beta\delta} (T_G^\delta)_{\gamma\beta} = \text{Tr}(T_G^\alpha T_G^\beta). \end{aligned}$$

Para otras representaciones, $r \neq G$, la última expresión NO coincide con el Casimir, pero SI es proporcional a la identidad (con una elección de base), y define el índice (de Dynkin) I de la rep (a veces denotado C, T o R):

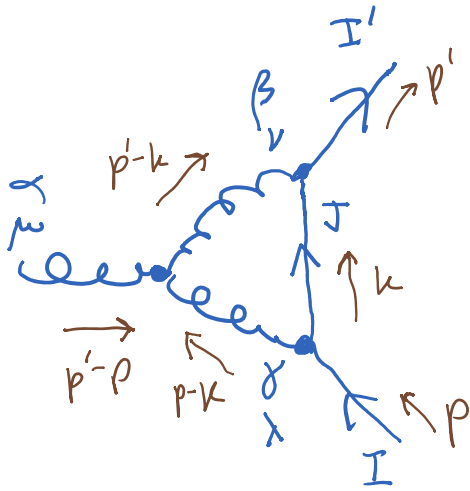
$$\text{Tr}(T_r^\alpha T_r^\beta) = I(r) \delta^{\alpha\beta}. \quad \leftarrow = T_r^\alpha T_r^\alpha \text{ p. 926}$$

Contrayendo con $\delta_{\alpha\beta}$, vemos que $\text{Tr}(C(r) \mathbb{1}_r) = I(r) \dim G$,

así que
$$I(r) = \frac{\dim(r)}{\dim(G)} C(r).$$

(Para más sobre factores no abelianos, ver p.ej. hep-ph/9802376.)

Procedamos ahora al segundo diagrama en el vértice vestido, que en la p. 928 denotamos g , y tiene también $D=0$:



$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-ig \gamma_\nu (T_r^\alpha)_{I'\sigma} \right) \frac{i}{k-m} \left(-ig \gamma_\lambda (T_r^\gamma)_{JI} \right) \times \frac{-i}{(p'-k)^2} \frac{-i}{(p-k)^2} (-g f^{\alpha\beta\gamma}) \times \left[\eta^{\mu\nu} (p'-p+p'-k)^\lambda + \eta^{\nu\lambda} (-p'+k-p+k)^\mu + \eta^{\lambda\mu} (p-k-p'+p)^\nu \right].$$

El prefactor no adelanto es ahora la componente II de

$$f^{\alpha\beta\gamma} T_r^\beta T_r^\gamma = \frac{1}{2} f^{\alpha\beta\gamma} [T_r^\beta, T_r^\gamma] \quad \leftarrow \text{por antisimetría de } f^{\alpha\beta\gamma}$$

$$= \frac{1}{2} f^{\alpha\beta\gamma} \underbrace{if^{\beta\gamma\delta} T_r^\delta}_{\text{p. 929}} = \frac{i}{2} C(G) T_r^\alpha.$$

Del resto del diagrama, nos interesa solo la divergencia logarítmica (\leftrightarrow polo $\frac{1}{\epsilon}$), que viene de ignorar p, p', m en comparación con k :

$$g = -\frac{g^3}{2} C(G) T^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\nu k \gamma_\lambda \frac{\eta^{\mu\nu} k^\lambda - 2\eta^{\nu\lambda} k^\mu + \eta^{\lambda\mu} k^\nu}{(k^2)^3} + O(\epsilon^0).$$

↑
 $k^\rho \gamma_\rho$

En el integrando, por simetría esférica ($\overset{\text{Vick}}{\longleftrightarrow}$ Lorentz) podemos como de costumbre reemplazar $k^\mu k^\lambda \rightarrow \eta^{\mu\lambda} \frac{k^2}{d}$, así que

$$\delta = -\frac{g^3}{2} C_2(G) T^r \frac{1}{d} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2)^2} \left[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma_\lambda}_{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \right)} \underbrace{-2\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma_\lambda}_{(4d-4) \gamma^\mu} + \gamma^\nu \gamma_\nu \gamma^\mu \right] + O(\epsilon^0).$$

p. 785 12 p. 787

$$\Rightarrow \delta = -\frac{ig^3}{(4\pi)^2} \frac{3}{2} C(G) T^r \gamma^\mu \left(\frac{2}{\epsilon} + O(\epsilon^0) \right).$$

La contribución de este diagrama a $\delta Z_1^{(1)}$ es entonces

$$\delta Z_1^{(1)g} = -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{3}{2} C(G) \frac{1}{\epsilon},$$

y combinado con el resultado de la p. 930, obtenemos en total

$$\boxed{\delta Z_1^{(1)} = \delta Z_1^{(1)\eta} + \delta Z_1^{(1)g} = -\frac{g^2}{8\pi^2} [C(r) + C(G)] \frac{1}{\epsilon}}.$$

$$-\frac{g^2}{8\pi^2} [C(r) - \frac{1}{2} C(G)] \frac{1}{\epsilon} \quad \uparrow$$

Recordando de la p. 927 que $\delta Z_2^{(1)} = -\frac{g^2}{8\pi^2} C(r) \frac{1}{\epsilon}$,

veremos que la contribución $C(G)$ del diagrama g hace que

$\delta Z_1^{(1)} \neq \delta Z_2^{(1)}$, y por tanto $Z_1 \neq Z_2$. Esto es distinto

a QED: las identidades de Ward en el caso no abeliano

son menos restrictivas.

• Cálculo de $\delta Z_3^{(1)}$: la autoenergía del gluón es

$$i\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(p) \equiv \text{Diagram with incoming gluon } (\mu, \alpha, p) \text{ and outgoing gluon } (\nu, \beta, p) \text{ connected by a loop labeled } \text{IP1} \text{ in } D=2$$

$$= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6}$$

$-i\delta Z_3^{(1)}(p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \delta^{\alpha\beta}$

Vayamos diagrama por diagrama:

$$q \equiv \text{Diagram 1} = \underbrace{(T_r^\beta)_{JI} (T_r^\alpha)_{IJ}}_{\text{Tr}(T_r^\beta T_r^\alpha)} \Pi_{\text{QED}}^{\mu\nu}$$

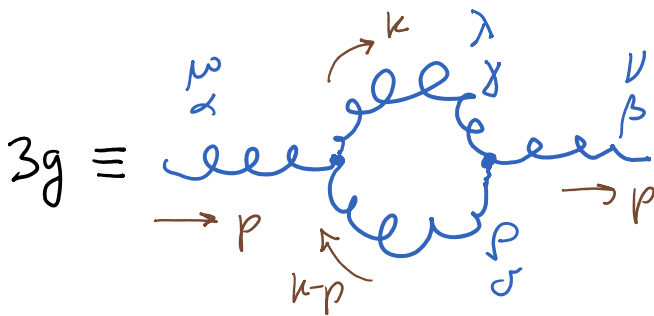
↑ incluye (-1) por lazo de quark

p.930 $I(r) \delta^{\alpha\beta}$

Recordando de la p. 801 que en MS $\delta Z_3^{(1)} = -\frac{g^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$,
tenemos entonces

$$\delta Z_3^{(1)g} = -\frac{g^2}{6\pi^2} I(r) \frac{1}{\epsilon}.$$

Veamos ahora



$$D=2$$

$$= \frac{1}{2} (-g)^2 \underbrace{f^{\alpha\gamma\delta} f^{\gamma\beta\delta}}_{C(\theta) \delta^{\alpha\beta} \text{ p. 929}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\eta^{\mu\lambda} (p+k)^\mu + \eta^{\lambda\rho} (-k-k+p)^\rho + \eta^{\rho\mu} (k-p-p)^\mu \right] \\ \times \left[\delta_\lambda^\nu (k+p)_\rho + \delta_\rho^\nu (-p+k-p)_\lambda + \eta_{\rho\lambda} (-k+p-k)^\nu \right] \frac{-i}{k^2} \frac{-i}{(k-p)^2}.$$

Por análisis dimensional, la divergencia logarítmica debe ser cuadrática en p (y en regularización dimensional, se anula la divergencia cuadrática, que hubiera sido de $\mathcal{O}(p^0)$). El cálculo explícito conduce a

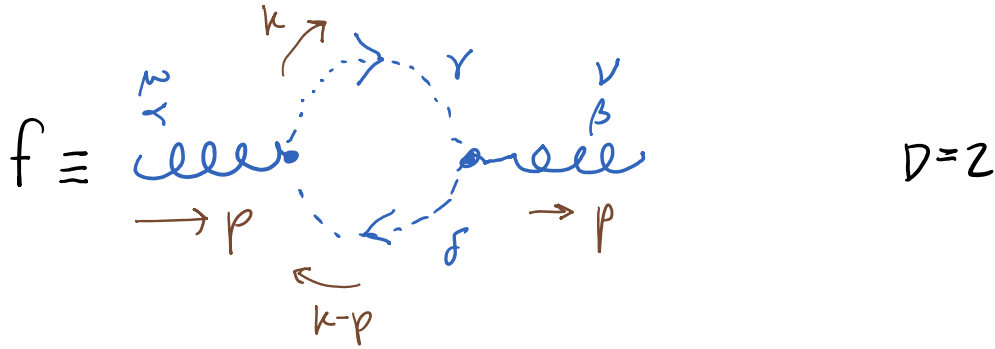
$$3g = -\frac{ig^2}{16\pi^2} C(\theta) \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{19}{6} \eta^{\mu\nu} p^2 + \frac{11}{3} p^\mu p^\nu \right).$$

Notamos que esta contribución a $\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ NO es transversal, así que NO podría ser cancelada por el contratermino disponible, ~~el término~~ $= -i\delta Z_3^{(1)} (p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \delta^{\alpha\beta}$, y NO podemos entonces deducir de ella por sí sola una contribución $\delta Z_3^{(1)}$. Nos hacen falta los diagramas restantes a este mismo orden.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_g \equiv & \text{Diagrama de un lazo con líneas de gluones y fantasmas} \\
 & \text{simetría} \\
 = & \frac{1}{2} (-ig^2) \left[f^{\alpha\beta\delta} f^{\gamma\delta\sigma} (\dots) + f^{\alpha\delta\sigma} f^{\beta\gamma\sigma} (\eta^{\mu\nu} \delta_\lambda^\nu - \delta_\lambda^\mu \eta^{\nu\sigma}) \right. \\
 & \left. + f^{\alpha\delta\sigma} f^{\beta\gamma\sigma} (\eta^{\mu\nu} \delta_\lambda^\nu - \delta_\lambda^\mu \eta^{\nu\sigma}) \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2} \\
 & \text{Divergencia cuadrática pura, se anula en regularización dimensional}
 \end{aligned}$$

$= 0$

Solo nos resta por considerar la contribución del lazo de fantasmas,



$$= (-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \frac{i}{(k-p)^2} (-g f^{\alpha\delta\gamma} k^\mu) (-g f^{\beta\delta\delta} (k-p)^\nu)$$

↖ lazo fermiónico

$$= +g^2 \underbrace{f^{\alpha\delta\gamma} f^{\beta\delta\delta}}_{\substack{\text{p. 929} \\ (CG) \delta^{\alpha\beta}}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k-p)^\nu}{k^2 (k-p)^2} \quad \begin{array}{l} \lambda \equiv k - xp, \\ M^2 \equiv (x-x')p^2 \end{array}$$

$$\text{p. 668} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(\lambda^\mu + xp^\mu)(\lambda^\nu + (x-1)p^\nu)}{[\lambda^2 - M^2]^2}$$

Nuevamente la divergencia logarítmica proviene de los términos cuadráticos en p . El cálculo conduce a

$$f = -\frac{ig^2}{16\pi^2} (CG) \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{1}{12} \eta^{\mu\nu} p^2 - \frac{1}{6} p^\mu p^\nu \right).$$

Esta contribución a la autoenergía del gluón tampoco es transversa, y tampoco puede cancelarse con el

contratérmino disponible. Así que no podemos leer en $\delta Z_3^{(1)F}$,

Al sumar el lazo de fantomas al lazo de gluón, obtenemos

$$\begin{aligned}
 3g + f &= \frac{(1)g^2}{3f} \Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + \frac{(1)g^2}{f} \Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \\
 &= -\frac{ig^2}{16\pi^2} C(G) \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{\epsilon} \left[\underbrace{\left(-\frac{15}{6} - \frac{1}{6}\right)}_{-\frac{10}{3}} \eta^{\mu\nu} p^2 + \underbrace{\left(\frac{11}{3} - \frac{1}{3}\right)}_{\frac{10}{3}} p^\mu p^\nu \right] \\
 &= \frac{ig^2}{16\pi^2} \frac{10}{3} \frac{1}{\epsilon} C(G) \delta^{\alpha\beta} \left[\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right],
 \end{aligned}$$

contribución a $\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ que si es transversa, y si puede cancelarse con $\text{cero} \otimes \text{cero} = -i\delta Z_3^{(1)} (p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \delta^{\alpha\beta}$.

Esto ejemplifica la idea más general de que, en la cuantización covariante con el método de Fadeev-Popov, los gluones longitudinales y temporales están presentes en los lazos; pero su contribución es cancelada por la de los fantomas. Decidimos entonces que

$$\delta Z_3^{(1)gf} = \frac{g^2}{8\pi^2} C(G) \frac{5}{3} \frac{1}{\epsilon} .$$

Y al combinar esto con el resultado de la p. 934,

$$\delta Z_3^{(1)} = \delta Z_3^{(1)g} + \delta Z_3^{(1)gf} = \frac{g^2}{8\pi^2} \left[-\frac{4}{3} I(r) + \frac{5}{3} C(G) \right] \frac{1}{\epsilon}$$

Usando esto junto con $\delta Z_1^{(1)}$ de la p. 932 y $\delta Z_2^{(1)}$ de la p. 927 en la fórmula para la función beta de la p. 925, llegamos al resultado final

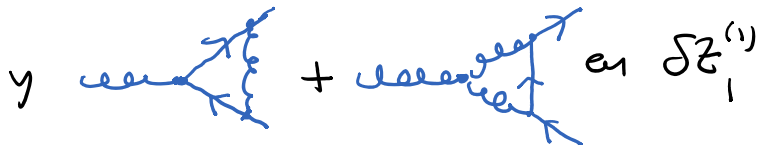
$$\beta_g = \frac{g^3}{8\pi^2} \left\{ \underbrace{+ [-C(r) - C(G)]}_{\text{Por } \delta Z_1^{(1)}} - \underbrace{[-C(r)]}_{\text{Por } \delta Z_2^{(1)}} - \frac{1}{2} \underbrace{\left[-\frac{4}{3} I(r) + \frac{5}{3} C(G) \right]}_{\text{Por } \delta Z_3^{(1)}} \right\}$$

es decir,

$$\beta_g = \frac{g^3}{16\pi^2} \left[-\frac{11}{3} C(G) + \frac{4}{3} I(r) \right]$$

recordar que $I(r) = \frac{\dim r}{\dim G} C(r)$
p. 930

Contribución de $\delta Z_3^{(1)}$ Contribución de $\delta Z_1^{(1)}$



Aparecerá N_s veces si hubiera N_s especies ("sabores") de quarks

Para los grupos mencionados en la p. 910, los valores del Casimir y el índice siempre son positivos. P.ej.,

en $su(N)$, $I(N) = \frac{1}{2}$ y $C(G) = N$.

Es preciso que $\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F_{\alpha}^{\mu\nu}$ pp. 910, 913

$$\beta_g = \frac{g^3}{16\pi^2} \left[-\frac{11}{3} C(\mathfrak{g}) + \frac{4}{3} I(\mathfrak{r}) \right]$$

Para otros tipos de campo de materia, el coeficiente $+\frac{4}{3}$ enfrente de $C(\mathfrak{r})$ se modifica de la siguiente manera:

fermión de Dirac $+\frac{4}{3}$, fermión de Weyl $+\frac{2}{3}$, fermión de Majorana $+\frac{2}{3}$, escalar complejo $+\frac{1}{3}$, escalar real $+\frac{1}{6}$.

El punto importante es que los campos de materia siempre hacen una contribución positiva a la función β . La contribución de los bosones de norma, en cambio, es negativa!! De aquí concluimos que una teoría no abeliana con pocos campos de materia tiene función β negativa, es decir, es asintóticamente libre (p.867).

Para QCD con $G = SU(N_c)$ y N_s sabores de quarks en la representación fundamental,

$$\beta_g = \frac{g^3}{16\pi^2} \left(-\frac{11}{3} N_c + \frac{2}{3} N_s \right) \equiv -\frac{b}{8\pi} g^3 \longleftrightarrow \alpha_{YM} \equiv \frac{g^2}{4\pi} \quad \beta_{\alpha_{YM}} = -b \alpha_{YM}^2$$

así que tenemos libertad asintótica si $N_s < \frac{11}{2} N_c$ (p.ej. $N_s \leq 16$ para $N_c = 3$). De la p. 886 sabemos entonces que α_{YM} corre como

$$\alpha_{YM}(\mu) = \frac{\alpha_{YM}(\mu_{ref})}{1 + b \alpha_{YM}(\mu_{ref}) \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{ref}}\right)} \equiv \frac{1}{b \ln(\mu/\mu_{ref})}, \text{ con } \alpha_{YM}(\mu_{ref}) \gtrsim 1.$$

↳ escalas intrínsecas
En QCD, $\mu_{ref} = \Lambda_{QCD}$

[30:19/04/19]

13. ANOMALÍAS

Hemos mencionado en varios momentos que las simetrías de una teoría clásica de campos pueden ser violadas al pasar al nivel cuántico, en cuyo caso decimos que existe una anomalía. El paso clave es la regularización: hemos visto que ciertos cortes UV pueden NO respetar alguna simetría. El punto importante es que existen situaciones en las que no existe ningún corte que sea compatible con todas las simetrías de interés, y debemos elegir entonces cuáles queremos preservar.

Cuando la anomalía aparece en una simetría global, implica que la corriente de Noether asociada $J^\mu_{(X)}$ en realidad NO se conserva a nivel cuántico, lo cual puede tener consecuencias físicas interesantes. Pero cuando tenemos una anomalía en una invariancia (que no simetría) local, concluimos algo mucho más drástico: que la teoría NO es consistente a nivel cuántico.

Discutiremos ahora el caso más notorio donde esto ocurre. Hasta ahora hemos analizado teorías de norma como QED o QCD, donde el campo de norma $A_\omega(x)$ se acopla a un espinor de Dirac $\psi(x)$.

Sabemos que podemos descomponer a $\psi(x)$ en 2 espinores de Weyl (p.236),

$$\psi(x) = \psi_I(x) + \psi_D(x), \quad \text{con} \quad \psi_{\frac{I}{D}}(x) \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} \mp \gamma^5)\psi(x).$$

$\underbrace{i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}_{\text{matrices de proyección}}$
 $\equiv P_{\frac{I}{D}}$

\uparrow izquierdo \uparrow derecho
 $=$ quiralidad negativa $=$ quiralidad positiva

(ψ_I y ψ_D se intercambian bajo paridad, $M(P) = \gamma^0$.)
 En la base de Weyl, $P_I = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $P_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$,
 de modo que

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_I(x) \\ \psi_D(x) \end{pmatrix}.$$

Un acoplamiento al campo de norma que involucre a $\psi(x)$ completo, $D_\omega \psi = (\partial_\omega + ig A_\omega^{\lambda T \lambda}) \psi(x)$, trata a ψ_I y ψ_D en el mismo pre, y es lo

que se tiene en una teoría de norma no quiral.
 Es el caso de QED y QCD. Si por el contrario Ψ_I y Ψ_D NO tienen las mismas interacciones de norma, entonces hablamos de una teoría de norma quiral. Es el caso de la teoría electrodébil, donde el campo de norma $SU(2)$ se acopla solo a la parte izquierda de los campos fermiónicos.

El ejemplo más sencillo de una teoría quiral es un campo de norma $U(1)$ acoplado únicamente a un espino de Weyl izquierdo con carga $Q=+1$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i \Psi_I^\dagger \underbrace{\bar{\sigma}^\mu}_{=(\mathbb{1}, -\vec{\sigma})} (\partial_\mu + ig A_\mu) \Psi_I$$

p.250

Esto puede reescribirse en términos de un campo de Dirac en la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i \underbrace{\bar{\Psi} \gamma^\mu}_{\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}} (\partial_\mu + ig A_\mu) \underbrace{P_I \Psi}_{\left. \begin{array}{l} \text{usando} \\ P_\pm \gamma^\mu = \gamma^\mu P_\pm \\ P_I^2 = P_I \end{array} \right\}}$$

donde $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_I(x) \\ \Psi_D(x) \end{pmatrix}$ con $\Psi_D(x)$ arbitrario. Si valor

es irrelevante, porque P_{\pm} lo elimina por completo de la acción.

Vale la pena resaltar que no es posible escribir un término de masa para ψ_{\pm} , porque (p.250)

$$m\bar{\psi}\psi = m\psi_{\pm}^{\dagger}\psi_{\pm} + m\psi_{\pm}^{\dagger}\psi_{\pm}, \quad \text{y} \quad m\bar{\psi}_{\pm}\psi_{\pm} = 0.$$

Al no haber masa, tenemos simetría quiral, y por tanto clásicamente la corriente quiral $J_5^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^5\psi$ se conserva, $\partial_{\mu}J_5^{\mu} = 0$, lo cual es importante porque estamos acoplando esta corriente a A_{μ} :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -g\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}P_{\pm}\psi = -\frac{1}{2}(A_{\mu}J^{\mu} - A_{\mu}J_5^{\mu}).$$

Aun así, veremos que a nivel cuántico son precisamente los términos con γ^5 los que causan problema, porque en última instancia J_5^{μ} no se conserva.

Con la teoría escrita en términos de $\psi(x)$,

$$\mathcal{L} \supset i\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + igA_{\mu})P_{\pm}\psi,$$

podemos de inmediato leer las reglas de Feynman para el propagador del fermión y el vértice,

$$\rightarrow = P_I \frac{i \not{p}}{p^2} \quad \text{---} = -ig \gamma^\mu P_I \cdot$$

Con esto podemos calcular por ejemplo el diagrama de polarización del vacío a un lazo,

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = \text{---}^{\mu} \text{---}^{\nu} + \text{---} \otimes_1 \text{---} + \mathcal{O}(g^4)$$

$D=2$

$$= i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) - i \delta Z_3^{(1)} (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) + \mathcal{O}(g^4)$$

$$(-1) (-ig)^2 (i)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [P_I (\not{p} + \not{l}) (\gamma^\mu P_I) P_I \not{l} (\gamma^\nu P_I)]}{(p+l)^2 l^2}$$

La traza se puede simplificar (usando $P_I \gamma^\mu = \gamma^\mu P_I$, $P_I^2 = P_I$) y

$$\text{Tr} [(\not{p} + \not{l}) \gamma^\mu \not{l} \gamma^\nu P_I] = \frac{1}{2} \text{Tr} [(\not{p} + \not{l}) \gamma^\mu \not{l} \gamma^\nu] \leftarrow \begin{matrix} \text{mitad del} \\ \text{resultado para } \psi \end{matrix}$$

$$- \frac{1}{2} \text{Tr} [(\not{p} + \not{l}) \gamma^\mu \not{l} \gamma^\nu \gamma^5] \quad \text{completo}$$

$$\stackrel{p.485}{=} 4i \epsilon^{\rho\mu\sigma\nu} (p+l)_\rho l_\sigma, \quad \leftarrow \begin{matrix} 0 \text{ por antisimetría} \\ \text{en } p \text{ o } l \end{matrix}$$

con lo cual tenemos

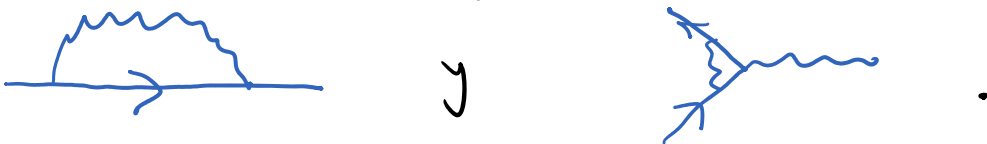
$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2} \Pi_{\text{Dirac}}^{\mu\nu}(p) - 2i g^2 \epsilon^{\rho\mu\sigma\nu} p_\rho \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\sigma}{(p+l)^2 l^2} - i \delta Z_3^{(1)} (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) + \mathcal{O}(g^4).$$

La integral es divergente; pero en cualquier regularización invariante de Lorentz solo puede ser proporcional a p_σ , con lo cual el término proveniente de δ^5 se anula, $\epsilon^{\rho\mu\sigma\nu} p_\rho p_\sigma = 0$. Concluimos entonces que

$$\Pi_{\text{Weyl}}^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2} \Pi_{\text{Dirac}}^{\mu\nu}(p) \propto \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu,$$

lo cual es lógico físicamente porque un campo de Dirac equivale a 2 campos de Weyl, y además no permite verificar que $p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) = \Pi^{\mu\nu}(p) p_\nu = 0$, como esperamos por invariancia de norma \leftrightarrow Ward \leftrightarrow simetría $U(1)$ global.

Similarmente, se puede ver que no hay novedades interesantes en los diagramas primitivamente divergentes



Con esto queda claro que, tal como afirmamos en la

p. 939, la contribución de un fermión de Weyl al primer coeficiente de la función β es la mitad de la contribución de un fermión de Dirac.

La novedad importante aparecerá al considerar la amplitud $\Gamma^{\mu\nu\rho}$ en 3 patas externas de fotón

$$i\Gamma^{\mu\nu\rho}(p, q, r) = \int_{D=1} \rho \left[\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \right],$$

$r = -p - q$

que en el caso de un fermión de Dirac se analiza por invariancia bajo conjugación de carga (p. 756) $C: \psi \rightarrow \psi^c$. Para un fermión de Weyl no tenemos esa invariancia, así que debemos calcular los diagramas:

$$i\Gamma^{\mu\nu\rho}(p, q, r) = (-1)(-ig)^3 (ig)^3 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\text{Tr}[(l-p)\gamma^\mu \not{l} \gamma^\nu (l+q)\gamma^\rho P_{\pm}]}{(l-p)^2 l^2 (l+q)^2} + \frac{\text{Tr}[(l-p)\gamma^\nu \not{l} \gamma^\mu (l+q)\gamma^\rho P_{\pm}]}{(l-q)^2 l^2 (l+p)^2} \right\} + \mathcal{O}(g^5).$$

El término en $\frac{1}{2}\mathbb{1}$ en P_{\pm} simplemente da otra vez la mitad del resultado para el ψ completo, que en este caso sabemos que es cero. Podemos reemplazar entonces $P_{\pm} \rightarrow -\frac{1}{2}\gamma^5$.

Por invariancia de norma \leftrightarrow Ward \leftrightarrow simetría global $U(1)$,
la amplitud se debe anular cuando cualquiera de los 3 fotones tiene
polarización longitudinal:

$$p_\mu \Gamma^{\mu\nu\rho}(p, f, r) = f_\mu \Gamma^{\mu\nu\rho}(p, f, r) = r_\rho \Gamma^{\mu\nu\rho}(p, f, r) = 0.$$

$\swarrow r = -p - f$

Revisemos primero el último enunciado, que involucra la traza

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{k}-\not{p})\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu (\not{k}+\not{f})\gamma^\rho \gamma_5] &= -\frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{k}-\not{p})\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu (\not{k}+\not{f})(-\not{p}-\not{f})\gamma_5] \\ &\stackrel{\text{ciclicidad y propiedades de } \gamma_5}{=} +\frac{1}{2} \text{Tr}[\not{k}\gamma^\nu (\not{k}+\not{f})^2 (\not{k}-\not{p})\gamma^\mu \gamma_5] - \frac{1}{2} \text{Tr}[\not{k}\gamma^\nu (\not{k}+\not{f}) (\not{k}-\not{p})^2 \gamma^\mu \gamma_5] \\ &\stackrel{\text{p.485}}{=} 2i \epsilon^{\sigma\nu\tau\mu} \left[\underbrace{\not{k}_\sigma (\not{k}-\not{p})_\tau}_{\circ} (\not{k}+\not{f})^2 - \not{k}_\sigma (\not{k}+\not{f})_\tau (\not{k}-\not{p})^2 \right] \\ &\stackrel{\text{antisimetría}}{=} -2i \epsilon^{\sigma\nu\tau\mu} \left[\not{k}_\sigma \not{p}_\tau (\not{k}+\not{f})^2 + \not{k}_\sigma \not{f}_\tau (\not{k}-\not{p})^2 \right]. \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} r_\rho \Gamma^{\mu\nu\rho}(p, f, r) &= -2g^3 \epsilon^{\sigma\nu\tau\mu} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left[\frac{\not{k}_\sigma \not{p}_\tau}{\ell^2 (\ell-p)^2} + \frac{\not{k}_\sigma \not{f}_\tau}{\ell^2 (\ell+f)^2} \right] \\ &\quad + \left(\begin{matrix} p \\ \mu \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} f \\ \nu \end{matrix} \right) + \mathcal{O}(g^5). \end{aligned}$$

La primera integral solo depende de p , así que cualquier

regularización invariante de Lorentz dada

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\sigma p_\tau}{l^2 (l-p)^2} = c \overset{\text{divergente}}{p_\sigma p_\tau}, \text{ que se anula al cancelar}$$

con $\epsilon^{\sigma\nu\tau\omega}$. Similarmente,

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\sigma f_\tau}{l^2 (l+f)^2} = -c f_\sigma f_\tau, \text{ que también se anula.}$$

Con esto logramos verificar que $\gamma_\rho \Gamma^{\mu\nu\rho}(p, f, r) = 0$. ✓

Por otra parte,

$$P_\mu \Gamma^{\mu\nu\rho}(p, f, r) = i g^3 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2} \text{Tr}[(l-p)\not{\rho} \not{l} \gamma^\nu (l+f) \gamma^\rho \gamma_5]}{(l-p)^2 l^2 (l+f)^2}$$

$$+ \left(\begin{matrix} p \\ \mu \leftrightarrow \\ \nu \end{matrix} \right) + \mathcal{O}(g^5).$$

Reescribiendo $\not{\rho} = -(\not{l}-\not{p}) + \not{l}$, la traza se convierte en

$$-\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\underbrace{(l-p)^2}_{(l-p)^2} \not{l} \gamma^\nu (l+f) \gamma^\rho \gamma_5 \right] + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(l-p) \underbrace{\not{l}^2}_{l^2} \gamma^\nu (l+f) \gamma^\rho \gamma_5 \right]$$

$$= -2i \epsilon^{\sigma\nu\tau\rho} \left[(l-p)^2 l_\sigma (l+f)_\tau - l^2 (l-p)_\sigma (l+f)_\tau \right]$$

$$= -2i \epsilon^{\sigma\nu\tau\rho} \left[(l-p)^2 l_\sigma f_\tau - l^2 (l-p)_\sigma (p+f)_\tau \right].$$

Con esto llegamos a

$$P_{\mu}^{\nu} \Gamma_{(p, f, r)}^{\mu\nu\rho} = 2g^3 \epsilon^{\sigma\nu\rho} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left[\frac{l_{\sigma} \tau_z}{l^2 (l+f)^2} - \frac{(l-p)_{\sigma} (p+f)_z}{(l-p)^2 (l+f)^2} \right] + \left(p \leftrightarrow f \right) + \mathcal{O}(g^5).$$

La primera integral da un resultado proporcional a $\tau_{\sigma} \tau_z$, que se anula al contraer con $\epsilon^{\sigma\nu\rho}$. La segunda se anularía también si pudiéramos correr la variable de integración $l \rightarrow l+p$, obteniendo entonces $\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_{\sigma} (p+f)_z}{l^2 (l+p+f)^2} \propto (p+f)_{\sigma} (p+f)_z$.

Pero al tratarse de una integral divergente, NO podemos correr simplemente la variable de integración, porque debemos tener un corte UV. Para ser más exactos, podríamos correr $l \rightarrow l+p$ si estuviéramos trabajando en regularización dimensional (porque $\int d^d l f(l+p) = \int d^d l f(l)$ fue parte de la definición de $\int d^d l$ en la p.776); pero en ese caso tendríamos que haber modificado nuestras manipulaciones que involucraron a $\gamma_5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, porque $\{\gamma^{\mu}, \gamma_5\} = 0$ para $\mu=0,1,2,3$, pero $[\gamma^{\mu}, \gamma_5] = 0$ para otros valores de μ .

La regularización dimensional tiene entonces un problema específicamente con la definición de γ_5 , y por tanto, con una teoría quiral. La aparición de γ_5 ocasiona que se tenga invariancia de Lorentz solo para $n=0,1,2,3$; pero no para el espaciotiempo completo. Esto no es solo un problema técnico que pudiera quizás resolverse inventando algún truco: el punto es que la posibilidad misma de definir espinores de Weyl depende fuertemente del valor de la dimensión espaciotemporal d .

Regresemos entonces a la integral que tenemos,

$$I_{\sigma\epsilon}(p, \not{q}) \equiv \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(\not{\ell} - \not{p})_\sigma (\not{\ell} + \not{q})_\epsilon}{(\not{\ell} - \not{p})^2 (\not{\ell} + \not{q})^2} = (\not{q})_\epsilon \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(\not{\ell} - \not{p})_\sigma}{(\not{\ell} - \not{p})^2 (\not{\ell} + \not{q})^2},$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv f_\sigma(\not{\ell} - \not{p})}$

que es linealmente divergente.

Podemos desarrollar f en Taylor alrededor de $\not{\ell}$:

$$f_\sigma(\not{\ell} - \not{p}) = \underbrace{f_\sigma(\not{\ell})}_{\text{da contribución}} - p^\omega \underbrace{\partial_\omega f_\sigma(\not{\ell})}_{\text{dará término de superficie en } I_{\sigma\epsilon}} + \text{términos que decaen más rápido y no contribuyen a } I_{\sigma\epsilon}.$$

$c(\not{q})_\sigma (\not{q})_\epsilon$
 en $I_{\sigma\epsilon}$

Después de una rotación de Wick al caso euclideo,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \partial_\omega f_\sigma(l) &= i \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 l^2 l_\omega f_\sigma(l) \frac{l_\sigma}{l^2(l+p+\zeta)^2} \\
 &\quad d\Omega_\omega \text{ elemento de superficie} \\
 &= i \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \frac{l_\omega l_\sigma}{(l+p+\zeta)^2} \\
 &\quad \rightarrow \int d\Omega_4 \frac{l_\omega l_\sigma}{l^2} \\
 &\quad \stackrel{\text{p.786}}{=} \frac{\Omega_4}{4} \eta_{\omega\sigma} \quad \text{con } \Omega_4 = 2\pi^2 \quad \text{p.781} \\
 &= \frac{i}{32\pi^2} \eta_{\omega\sigma} .
 \end{aligned}$$

Aprendemos entonces que


$$I_{\sigma\zeta}(p, \zeta) \equiv \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(l-p)_\sigma (l+\zeta)_\zeta}{(l-p)^2 (l+\zeta)^2} = c (p+\zeta)_\sigma (p+\zeta)_\zeta - \frac{i}{32\pi^2} P_\sigma(p+\zeta)_\zeta ,$$

con lo cual

$$P_\mu \Gamma^{\mu\nu\rho} (p, \zeta, r) = \frac{i g^3}{8\pi^2} \epsilon^{\sigma\nu\zeta\rho} P_\sigma \zeta_\zeta + \mathcal{O}(g^5) \neq 0 .$$

Un cálculo completamente análogo conduce a

$$g_{\nu} \Gamma^{\mu\nu\rho} (p, \not{f}, r) = \frac{i g^3}{8\pi^2} \epsilon^{\sigma\rho\tau\omega} g_{\sigma} p_{\tau} + \mathcal{O}(g^5) \neq 0.$$

El hecho de que hemos obtenido un resultado asimétrico entre las 3 patas de fotón  se debe a que desde el principio nuestra definición de Γ NO era simétrica bajo

$p \leftrightarrow f \leftrightarrow r$, y después regularizar la integral $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$ de modo que fuera esféricamente simétrica con respecto a k^μ . Podríamos haber impuesto simetría esférica con respecto a una variable corrida $k^\mu + a(p+f)^\mu + b(p-f)^\mu$, con a, b constantes arbitrarias. Repitiendo los cálculos en este caso, se encuentra

$$p_{\mu} \Gamma^{\mu\nu\rho} (p, \not{f}, r) = -\frac{i g^3}{8\pi^2} (1-b) \epsilon^{\nu\rho\sigma\tau} g_{\sigma} r_{\tau} + \mathcal{O}(g^5),$$

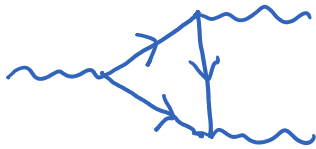
$$g_{\nu} \Gamma^{\mu\nu\rho} (p, \not{f}, r) = -\frac{i g^3}{8\pi^2} (1-b) \epsilon^{\rho\mu\sigma\tau} r_{\sigma} p_{\tau} + \mathcal{O}(g^5),$$

$$r_{\rho} \Gamma^{\mu\nu\rho} (p, \not{f}, r) = -\frac{i g^3}{8\pi^2} 2b \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} p_{\sigma} f_{\tau} + \mathcal{O}(g^5).$$

Antes tendríamos $b=0$, así lo cual $p_{\mu} \Gamma^{\mu\nu\rho} \neq 0$, $g_{\nu} \Gamma^{\mu\nu\rho} \neq 0$. Si elegimos $b=1$, tendríamos $r_{\rho} \Gamma^{\mu\nu\rho} \neq 0$. Si elegimos $b=1/2$,

lograr que el resultado sea simétrico entre los 3 pines de fotones (esto es lo que se encuentra con regularización dimensional). Pero el punto importante es que NO hay nunca ecuación que nos permita tener $p_\mu \Gamma^{\mu\nu\rho} = \sum_\nu \Gamma^{\mu\nu\rho} = \sum_\rho \Gamma^{\mu\nu\rho} = 0$, así que la teoría $U(1)$ con un solo campo de Weyl padece de una anomalía y NO es invariante de normas.

Consideremos ahora una teoría $U(1)$ con varios campos izquierdos, Ψ_{Ic} , $c=1,2,\dots,N$. Cada uno de ellos tendrá una carga Q_c , de modo que $D_\mu \Psi_{Ic} \equiv (\partial_\mu + ig Q_c A_\mu) \Psi_{Ic}$. En los diagramas de triángulo



, debemos sumar sobre el fermión c que corre en el lazo, y para cada fermión, obtendremos un factor de Q_c^3 extra a nuestro resultado anterior. La anomalía será proporcional entonces a $\sum_{c=1}^N Q_c^3$, y se anulará si resulta ser el caso que esta suma es cero. La opción más sencilla es tener N par con

$$Q_1 = -Q_2, \quad Q_3 = -Q_4, \quad \dots, \quad Q_{N-1} = -Q_N.$$

Este es precisamente el caso en el que nuestros espinores de Weyl pueden combinarse para obtener $N/2$ espinores de Dirac

$$\Psi_c(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_{Ic}(x) \\ \sigma^2 \psi_{Ic+1}^*(x) \end{pmatrix} \quad c=1, 3, \dots, N-1$$

← recordar de la Tarea 4 que esta combinación en verdad transforma como espinores derecho

así que en este caso no hay anomalía de norma por la sencilla razón de que nuestra teoría es no quirral.

Pero también existen teorías quirales dadas $\sum_{c=1}^N Q_c^3 = 0$.

Un ejemplo sería tener $N=9$, con $Q_1=2$ y $Q_2=Q_3=\dots=Q_9=-1$.

Esta teoría es entonces libre de anomalía a 1 lazo.

El Teorema de Adler-Bardeen muestra que la anomalía no recibe ninguna contribución a 2 lazos o más [ver p.ej. Weinberg Vol. II sec. 22.3, Srednicki Cap. 77], así que las teorías con $\sum_{c=1}^N Q_c^3 = 0$ son completamente consistentes a nivel cuántico.

En última instancia, la anomalía que hemos encontrado

esta relacionada con el hecho de que la corriente axial no se conserva a nivel cuántico, y en lugar de ello se tiene

$$\partial_\omega J_5^\omega = -\frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\omega\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho} F_{\sigma\omega}$$

Esta es la famosa anomalía de Adler-Bell-Jackiw (ABJ).

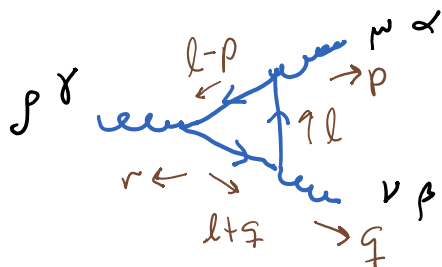
(Hay una expresión similar en cualquier dimensión par, p.ej. en $d=2$ se tiene $\partial_\omega J_5^\omega = \frac{g}{2\pi} \epsilon^{\omega\nu} F_{\nu\omega}$, donde $\gamma^5 \equiv \gamma^0\gamma^1$.)

En una teoría quiral, el campo de norma está acoplado a esta corriente, lo cual en general da lugar a la inconsistencia ya señalada,

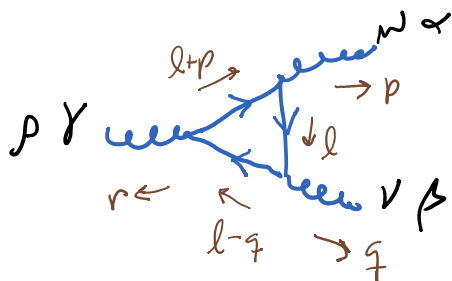
$$\int_p \Gamma^{\omega\nu\rho} (p, q, r) \propto \partial_p \left[\text{Diagrama con un bucle (IP1) y líneas de momento } p, q, r \right] \supset \langle \partial_p J_5^\rho J^\omega J^\nu \rangle \neq 0.$$

$\lim_{\omega \rightarrow 0} F \tilde{F}$

En una teoría no abeliana con un campo de Weyl en la representación r del grupo de norma, los vértices vienen acompañados de factores de los generadores T^a , de modo que



$$\propto \text{Tr}(T_r^\alpha T_r^\beta T_r^\gamma),$$



$$\propto \text{Tr}(T_r^\alpha T_r^\gamma T_r^\beta).$$

Al relacionar los cálculos, se encuentra que el pedazo de los diagramas con $P_I \rightarrow \frac{1}{2} \mathbb{1}$ contribuye un factor de

$$\frac{1}{2} \text{Tr}([T_r^\alpha, T_r^\beta] T_r^\gamma) = \frac{i}{2} \mathcal{I}(r) f^{\alpha\beta\gamma}$$

↖ índice p. 930

(que entra en la renormalización del vértice cúbico , mientras que el pedazo con $P_L \rightarrow -\frac{1}{2} \gamma_5$ contribuye

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(\{T_r^\alpha, T_r^\beta\} T_r^\gamma) \equiv \underbrace{A(r)}_{\text{coeficiente de anomalía}} d^{\alpha\beta\gamma}$$

p.ej. en $SU(N)$: $A(N) = 1, A(\bar{N}) = -1$

tensor simétrico
independiente de r
 $\{T^\alpha, T^\beta\} = \delta^{\alpha\beta} + d^{\alpha\beta\gamma} T^\gamma$
para $SU(N)$

Así que para que la teoría esté bien definida, necesitamos que $A(r) = 0$, o más en general, que los $A(r)$ de los distintos reps se cancelen entre sí (como ocurre en el Modelo Estándar).

Llegamos entonces así al fin del curso. Algunos temas importantes que NO hemos cubierto, y que recomiendo leer por tanto de manera independiente son:

- Rompimiento Espontáneo de Simetría, bosones de Goldstone y mecanismo de Higgs
- Solitones, Instantones
- Expansión del producto de Operadores (OPE)
- Física de QCD y de la Teoría Electro débil
- Campos en Fondos Curvos [Birrell y Davies; Wald]
- Supersimetría y resultados exactos [p.ej. libros de Terning (holomorfía, localización, etc.) y de Shifman]
- Dualidades (p.ej. de Seiberg, Thirring-Sine-Gordon, etc.)
- Correspondencia Holográfica (o Norma/Gravedad, o AdS/CFT)
- Entrelazamiento [p.ej. Casini-Huerta, Calabrese-Cardy, Rangamani-Takayanagi]
- Nuevos métodos en la capa de masa para amplitudes de norma [p.ej. Arkani-Hamed, Cachazo, etc.]
- Resurgencia [p.ej. Unsal; Marino; Aniceto et al., 1802.10441]
- Integridad [p.ej. Beisert et al., 1012.3582]
- Sector IR de teorías de norma y gravedad [Strominger, 1703.05448
Pasterski, 1905.10052]

L31: 24/06/19

L27: 05/12/17