

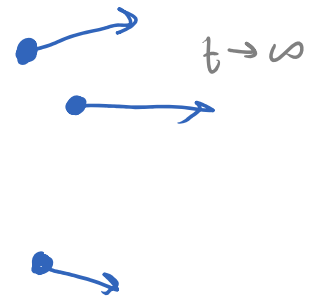
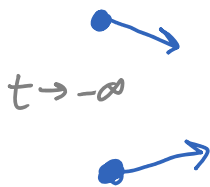
BREVE REPASO DE CAMPOS I

Partícula + Cuántica + Relatividad Especial:

Definimos al espacio de Hilbert de una partícula como una representación unitaria no trivial e irreducible del grupo de Poincaré (\equiv Lorentz + traslaciones) con una base $\{|p, \lambda\rangle\}$ en la cual la etiqueta λ solo toma un número finito (y por tanto discreto) de valores.

\nearrow \leftarrow
 cuadrimomento $p_\mu p^\mu = m^2$ \leftarrow espín ($m^2 > 0$)
 $p_0 = \sqrt{p^2 + m^2} \equiv E_p$ $\lambda = \begin{cases} -j, -j+1, \dots, j \\ -h, h \end{cases}$
 helicidad ($m^2 = 0$)

Estados multiparticulares: estados asintóticos



$|p_1, \lambda_1, p_2, \lambda_2, \dots, p_N, \lambda_N; +\rangle$
estados entrante

$|p'_1, \lambda'_1, p'_2, \lambda'_2, \dots, p'_N, \lambda'_N; -\rangle$
estados saliente

en el cuadro de Heisenberg

$$\langle p'_1, \lambda'_1, \dots, p'_N, \lambda'_N; - | p_1, \lambda_1, \dots, p_N, \lambda_N; + \rangle$$

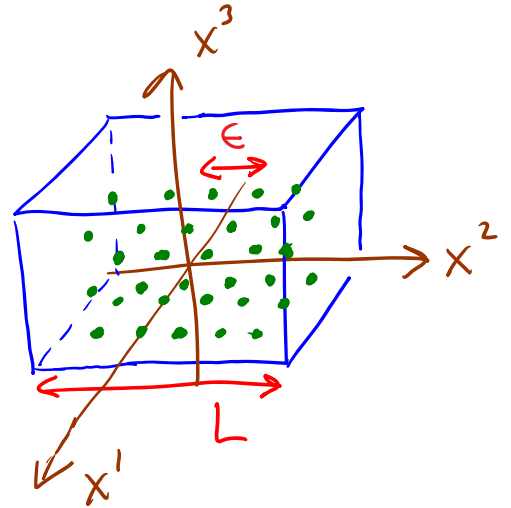
Amplitud de
Dispersión

Campo

$$\varphi_l(x) \equiv \varphi_l(t, \vec{x}) \equiv \varphi_{l, \vec{x}}(t)$$

números infinitos
de grados de libertad

$$\equiv \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} \varphi_{l, \vec{x}_n}(t)$$



- Para que el límite $\epsilon \rightarrow 0$ esté bien definido, tenemos que lidiar con divergencias ultravioletas.
- Para que el límite $L \rightarrow \infty$ esté bien definido, en teorías con partículas no masivas tenemos que lidiar con divergencias infrarrojas.

Para un campo relativista y local (sin otros derivados),

$$S[\varphi_l] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi_l(x), \partial_\mu \varphi_l(x)) \leftrightarrow H = \int d^3x \underbrace{\mathcal{H}(\varphi_l(x), \vec{\nabla} \varphi_l(x), \pi_l(x))}_{\dot{\varphi} \pi - \mathcal{L}}$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_l}$

p.ej. $\left\{ \begin{array}{l} \text{escalar } \varphi \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} \\ \text{espinorial } \psi_a \in \mathbb{C} \quad a=1, \dots, 4 \\ \text{vectorial } A_\mu \in \mathbb{R} \quad \mu=0, 1, 2, 3 \end{array} \right.$

Teoremas de Noether:

Simetría continua global \leftrightarrow Corriente/carga conservada

$$\delta x^\mu = \omega X^\mu, \quad \delta \varphi_l(x) = \omega \Phi_l(x) \quad \leftrightarrow \quad J^\mu(x), \quad \partial_\mu J^\mu = 0, \quad Q = \int d^3x J^0(t, \vec{x})$$

Campo libre $\equiv \mathcal{L}$ cuadrático ($\neq \varphi_{t,\vec{x}}$ libres)

Pej.,

Klein-Gordon $\mathcal{L}_{KG} \equiv \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$

Dirac $\mathcal{L}_D \equiv i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$ $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$

\leftrightarrow Constricciones (de "segunda clase") \leftrightarrow ec. de mov. reduce Ψ_a de 4 a 2 datos independientes

Maxwell $\mathcal{L}_M \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$

\leftrightarrow Invariancia de normas $A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Theta(x)$

(No es una verdadera simetría)

\leftrightarrow Redundancia (constricciones de "primera clase")

\leftrightarrow Solo 2 grados de libertad físicos

(fijar la norma: reducir $4 \rightarrow 2$)

Cuantizar canónicamente una teoría de campos significa:

1) Promover $(\varphi_{\vec{x}}, \pi_{\vec{x}}(x)) \rightarrow (\hat{\varphi}_{\vec{x}}, \hat{\pi}_{\vec{x}}(x))$ operadores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} (cuadro de Heisenberg).

2) Imponer $[\hat{\varphi}_{\vec{x}}(t, \vec{x}), \hat{\pi}_{\vec{x}'}(t, \vec{x}')]_{\mp} = i \delta_{\vec{x}\vec{x}'} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$

\uparrow conmutador para espín entero
anticommutador para espín semientero

Teorema Espín-Estadística

(en las teorías con constricciones, hay que hacer algunos ajustes).

Para un campo libre, podemos cuantizar de manera completamente explícita: resolviendo la ecuación de movimiento, encontramos que los modos de Fourier son modos normales del campo (están desacoplados y oscilan armónicamente),

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\hat{a}_p e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

↙ ondas planas ↘
 ↑ "frecuencia positiva" ↑ "frecuencia negativa"

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\hat{a}_{ps} u_{ps} e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{ps}^\dagger v_{ps} e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

↙ espinores ↘
 solución de ec. de Dirac ($s=1,2 \leftrightarrow \lambda$)

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\hat{a}_{p\lambda} \epsilon_{p\lambda} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{p\lambda}^\dagger \epsilon_{p\lambda}^* e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

con operadores de aniquilación / creación (\leftrightarrow descenso / ascenso)

$$[\hat{a}_{p\lambda}, \hat{a}_{p'\lambda'}^\dagger]_{\mp} = \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') = [\hat{b}_{p\lambda}, \hat{b}_{p'\lambda'}^\dagger]_{\mp}$$

$\Rightarrow \mathcal{H} = \{ |0\rangle \} \oplus \{ |p\lambda\rangle \text{ ó } |p\lambda\bar{n}\rangle \} \oplus \{ |p_1\lambda_1 n_1, p_2\lambda_2 n_2\rangle \} \oplus \dots$ Espacio de Fock

$$\hat{a}_{p\lambda} |0\rangle = 0 = \hat{b}_{p\lambda} |0\rangle \quad \sqrt{2E_p} \hat{a}_{p\lambda}^\dagger |0\rangle \text{ ó } \sqrt{2E_p} \hat{b}_{p\lambda}^\dagger |0\rangle$$

estado base
del campo

1 partícula o antipartícula
1 modo de Fourier en
primer nivel excitado

2 partículas o
antipartículas

2 modos excitados al primer nivel
(o 1 modo en segundo nivel)

Así que en el caso libre, entendamos perfectamente la relación entre campos y partículas: cada tipo de partículas (y antipartículas) está asociado a un solo campo, y cada (anti)partícula es la excitación más pequeña posible (con energía definida) de un modo de Fourier del campo asociado.

En particular, $\hat{\phi}_l^\dagger(x) |0\rangle$ es un estado de una partícula (con posición definida), y el propagador de Feynman

$$G_F(x, x') \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}_l(x) \hat{\phi}_l^\dagger(x') \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} \frac{i M_{ll'}}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

↑ orden temporal

$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma_{\mu\nu} p_{\mu} p_{\nu} \\ -\eta_{\mu\nu} \end{array} \right.$

es la amplitud de probabilidad de propagación de la partícula o antipartícula (según el orden) entre x y x' .

Al pasar a una teoría interactuante ($\equiv \mathcal{L}$ cúbico o más), la conexión entre campos y partículas cambia:

$\hat{\phi}_l(x)$ satisface ecuación de movimiento <u>No lineal</u>	\longleftrightarrow modos de Fourier <u>NO</u> son modos normales; para x arbitrario, $\hat{\phi}_l(x)$ <u>NO</u> se descompone en $\hat{a}_{p\lambda}, \hat{a}_{p\lambda}^\dagger$	\longleftrightarrow partículas <u>NO</u> son ya excitaciones de modo de Fourier de un campo dado
---	---	---

Suponemos que los estados asintóticos $|p_1, \lambda_1, n_1, \dots, p_N, \lambda_N, n_N; \pm\rangle$ nos dan todavía una base (dos bases: entrante y saliente) del espacio de Hilbert completo \mathcal{H} , y definiendo

$|\Omega\rangle \equiv$ vacío de teoría interactuante \equiv estado base,

$$\hat{\varphi}(0) |\Omega\rangle \equiv \sqrt{Z_\varphi} |p, \lambda, n\rangle + \text{estado multiparticulas}$$

\uparrow $\mathbb{Z} \geq 1$ partículas
constante de renormalización del campo

mostramos que el correlador de 2 puntos en espacio de momentos,

$$\tilde{G}_2(p) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}^\dagger(0) \} | \Omega \rangle$$

\uparrow función solo de p^2 (por Lorentz)

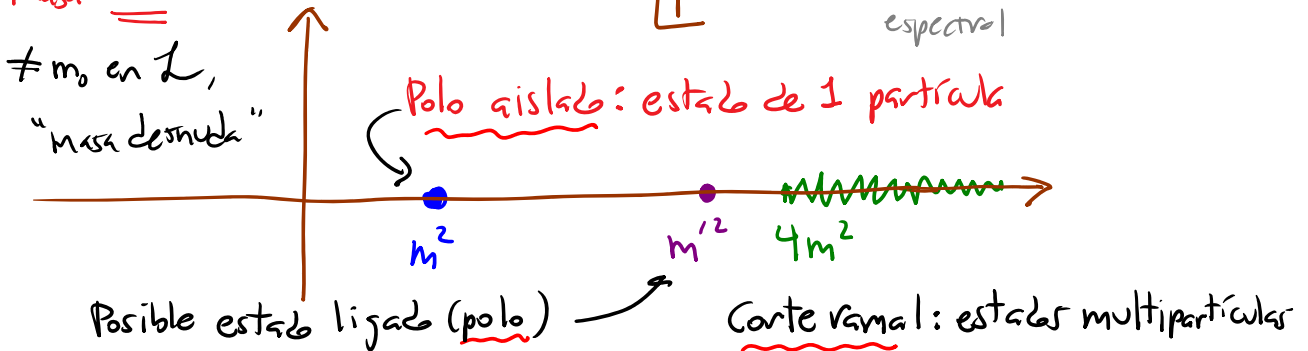
$G_2(x, x') = G_2(x - x')$ en $x' = 0$

$$= \frac{i Z_\varphi}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^{\infty} d(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \rho(M^2)$$

masa física \rightarrow
 $\neq m_0$ en \mathcal{L} ,
 "masa desnuda"

\mathbb{L}^{p^2} \uparrow densidad espectral

Källén-Lehmann



y similarmente, que las amplitudes de dispersión puedan extraerse de los correladores de más puntos,

$$\langle \underbrace{p'_1 \dots p'_n}_{p_n{}^0 > 0} ; - | \underbrace{p_1 \dots p_n}_{p_n{}^0 > 0} ; + \rangle = \lim_{\substack{p_n{}^2 \rightarrow m^2 \\ p_n{}^2 \rightarrow m^2}} (\sqrt{Z_\varphi})^{-(N'+N)} \frac{p_1^2 - m^2}{i} \dots \frac{p_n^2 - m^2}{i} \frac{p_1^2 - m^2}{i} \dots \frac{p_n^2 - m^2}{i} \tilde{G}_{N'+N}(p'_1, \dots, p'_n, -p_1, \dots, -p_n)$$

"Fórmula de reducción" de $\int d^4x_1 \dots e^{ip_1 \cdot x_1} \dots \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots \} | \Omega \rangle$
 Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ)

Vemos entonces que:

- Los correladores $G_N(x_1, \dots, x_N) = \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle$ son objetos útiles (de hecho contienen toda la información física de la teoría)
- Las partículas figuran como polos en los correladores (y los estados multipartículas, como carter).
- Un tipo de partícula dada no está asociada de manera única a un operador de campo $\hat{\varphi}(x)$ dado: figura igualmente como polo en correladores de cualquier operador $\hat{O}(x)$ tal

que $\langle \hat{p} | \hat{O}(0) | \Omega \rangle \equiv \sqrt{Z_0} \neq 0$ (reemplazando también $\sqrt{Z_\varphi} \rightarrow \sqrt{Z_0}$).

- En teorías interactuantes, los parámetros físicos de las partículas NO coinciden directamente con los parámetros "desnudos" que definen \mathcal{L} (p.ej. $m \neq m_0$).

Separando $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \leftrightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{libre}} + \mathcal{H}_{\text{int}}$, con $\mathcal{L}_{\text{int}} \sim g_3 \varphi^3 + g_4 \varphi^4 + \dots$, esperamos que si todos los acoplamientos $g_{n \geq 3} \ll 1$, los efectos de las interacciones deben poderse describir con una expansión perturbativa, es decir, una serie de Taylor en potencias de los $g_{n \geq 3}$.

Definiendo el cuadro de interacción como aquel en el cual los operadores evolucionan solo con $\mathcal{H}_{\text{libre}}$, mostramos que

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x_1) \cdots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_I(x_1) \cdots \hat{\varphi}_I(x_N) \exp[-i \int_{-T}^T \hat{H}_{\text{int}}^I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T \hat{H}_{\text{int}}^I(t)] \} | 0 \rangle}$$

\mathcal{L}_H : cuadro de Heisenberg

\mathcal{L}_I : cuadro de interacción

Desarrollando el lado derecho en potencias de \hat{H}_{int}^I (usando el teorema de Wick), vemos que es posible resumir la expansión perturbativa en términos de

diagramas de Feynman, que se construyen con:

- Propagadores libres (líneas internas, con/sin flechas para campos cargados/neutros), p.ej.

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ x \qquad x' \end{array} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}, \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \rightarrow p \end{array} = \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}.$$

↑ $m_0 = 0$: masa desnuda ↑

- Vértices de interacción (puntos donde confluyen varias líneas, de uno o más campos), p.ej.

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda_0}{4!} \varphi^4 \iff \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} = -i\lambda_0 \int d^4 y \quad \text{ó} \quad \begin{array}{c} P_1 \diagdown \\ \text{---} \\ P_2 \diagup \end{array} = -i\lambda_0,$$

↑ $m_0 = 0$: acoplamiento desnudo

$$\mathcal{L}_{int} = -e_0 \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu \iff \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = -ie_0 \gamma^\mu$$

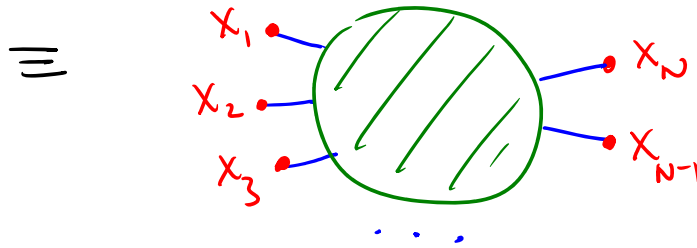
$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g_0}{2 \cdot 2 \cdot 2} \varphi \Phi^\dagger \Phi (\bar{\Psi} \Psi)^2 A_\mu A^\mu \iff \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = -ig_0.$$

- Puntos/patas externas (líneas externas), p.ej.

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ x \end{array} \leftarrow p = e^{-ip \cdot x}, \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \rightarrow p, s \end{array} \equiv \sqrt{Z_\psi} \bar{u}_p^s.$$

Obtuvimos una receta para correladores,

$G_N(x_1, \dots, x_N) =$ Suma sobre todos los diagramas convexos
(es decir, sin burbujas de vacío) topológicamente
distintos con N puntos externos x_1, \dots, x_N



y (usando LSZ) otra para amplitudes de dispersión
(en términos del elemento de matriz invariante)

$$\langle p'_1 \dots p'_j | p_1 \dots p_n \rangle = \delta_{+, -} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots - p'_1 - \dots) i\mathcal{M}(p_1, \dots \rightarrow p'_1, \dots)$$

$i\mathcal{M}(p_1 \dots p_n \rightarrow p'_1 \dots p'_n) =$

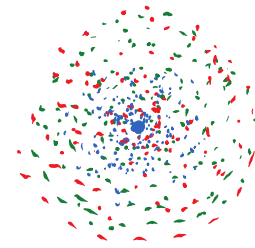
A diagram showing a central circle with a grid pattern. It has n external points on the left labeled p_1, \dots, p_n and n external points on the right labeled p'_1, \dots, p'_n . Blue dashed lines connect the external points to the circle. Below the diagram, there is text: "Suma sobre diagramas amputados y (para $N < 3$) completamente convexos".

usando en ambos casos las reglas de Feynman apropiadas.

Usando esta receta, vemos que las partículas físicas (\leftrightarrow polos en correladores \leftrightarrow estados asintóticos) surgen de una suma infinita de diagramas, p.ej.



es decir, en el régimen de acoplamiento débil, una partícula física puede visualizarse como la correspondiente partícula libre ("desnuda") rodeada de una nube de partículas virtuales (fuera de la



capa de masa), indecisos respecto a si existen o no.

Un electrón en QED, p.ej., es entonces una excitación conjunta del campo "del electrón" $\psi(x)$ y el campo electromagnético $A_\mu(x)$ (y en el mundo real, incluso de todos los otros campos del Modelo Estándar).

Este es un punto muy importante: al agregar términos cúbicos, etc. a \mathcal{L} para que las partículas interactúen entre sí, provocamos también, inevitablemente, que cada "partícula" interactúe con sí misma, por lo que la definición de partícula (y el valor de sus propiedades) cambia.

Otro punto importante es que la expansión perturbativa tiene limitaciones: además de que solo es válida en la pequeña región de acoplamiento débil, $g_{n \geq 3} \ll 1$, incluso en esa región NO converge (porque el número de diagramas crece muy rápidamente), señal de que existen efectos no perturbativos, típicamente $O(e^{-1/g_n})$.

—

En la última parte de Campos I, aprendimos una manera alternativa de cuantizar, el método de integral funcional (o de camino, o de trayectoria), que da resultados completamente equivalentes a la cuantización canónica, sin utilizar operadores, y empleando a cambio una noción más complicada de integración: una suma sobre funciones.

La idea es integrar sobre todas las evoluciones temporales posibles de cada grado de libertad de nuestro sistema, sin restringir a las soluciones de las ecuaciones de movimiento.

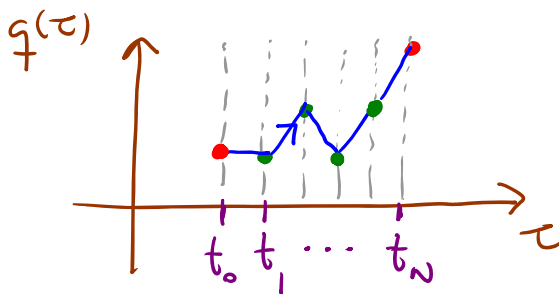
Para un sistema con un solo grado de libertad $q(t)$, con momento conjugado $p(t)$, mostramos que

$$\langle \dot{q}'_i; t' | q; t \rangle = \int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q(\tau) \mathcal{D}p(\tau) \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \dot{q}(\tau) \cdot p(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\} \right],$$

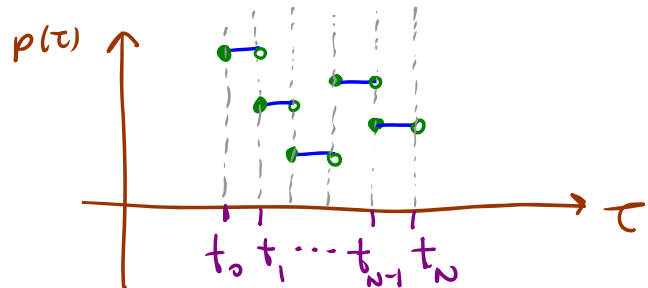
$\langle \dot{q}'_i | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | q \rangle$ suma sobre trayectorias en espacio fase acción S en versión Hamiltoniana; pero $p(\tau)$ aquí es independiente de $\dot{q}(\tau)$

donde la medida de integración funcional se define como una integral múltiple sobre $q(\tau), p(\tau)$ discretizadas:

$$\int \mathcal{D}q(\tau) \mathcal{D}p(\tau) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^L_{\dot{q}_1} \dots d^L_{\dot{q}_{N-1}} \frac{d^L p_0}{(2\pi)^L} \dots \frac{d^L p_{N-1}}{(2\pi)^L},$$



Interpola entre los $q_{n=0, \dots, N}$ con la derivada $\dot{q}(t_n)$ correcta



Reproduce los $p_{n=0, \dots, N-1}$ deseados

Si $H(q(\tau), p(\tau))$ es cuadrático en $p(\tau)$, con un coeficiente de p^2 independiente de $q(\tau)$, entonces

podemos reducir la integral funcional a la versión

lagrangiana

$$\langle \zeta'; t' | \zeta; t \rangle = \mathcal{N} \int_{\zeta(t)=\zeta}^{\zeta(t')=\zeta'} \mathcal{D}\zeta(z) \exp \left[i \int_t^{t'} dz L(\zeta(z), \dot{\zeta}(z)) \right].$$

constante de normalización \nearrow
 suma sobre trayectorias en espacio configuración $\underbrace{\hspace{10em}}$
 $\exp(iS[\zeta(z)])$

Al pasar a una teoría de campos, tenemos que hacer una de estas integrales funcionales para cada uno de los infinitos grados de libertad. Podemos, p.ej., escoger una red cúbica con espaciamiento ϵ

y lado de longitud L .

Si definimos $\vec{x}_{\vec{n}} \equiv \vec{n} \epsilon$,
 con $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$, entonces nuestros

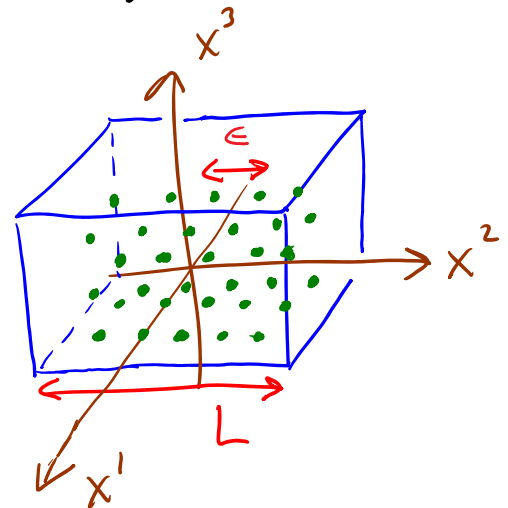
variables dinámicas serán

el conjunto discreto

$$\varphi_{\vec{n}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{x}_{\vec{n}}).$$

$$(\leftrightarrow q_a(t))$$

La medida de integración de interés es entonces



$$\mathcal{D}\varphi(t, \vec{x}) \equiv \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} \prod_{\vec{n}} \mathcal{D}\varphi_{\vec{n}}(t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \prod_{\vec{n}, m} \mathcal{D}\varphi(t_m, \vec{x}_{\vec{n}})$$

cf. $\prod_{\vec{n}} \mathcal{D}\varphi_{\vec{n}}(t)$

y encontramos que

$$\langle \varphi(\vec{x}, t) | \varphi(\vec{x}, t) \rangle = \mathcal{N} \int_{\substack{\varphi(t, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \forall \vec{x} \\ \varphi(t, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \forall \vec{x}}} \mathcal{D}\varphi(\vec{x}, t) \exp [i \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \vec{\nabla}\varphi)]$$

suma sobre todas las historias posibles del campo $S[\varphi]$

Mostramos también que los correladores

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x_1) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle$$

cuadro de Heisenberg \rightarrow

\mathcal{L} vacío de la teoría interactuante

pueden obtenerse a través de

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \exp [i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}]}{\int \mathcal{D}\varphi \exp [i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}]}$$

Si la teoría es libre, las integrales son gaussianas, y sabemos hacerlas. Si la teoría es interactuante pero

débilmente acoplada, podemos desarrollar en potencias de Z_{int} , y obtenemos fácilmente la misma expansión perturbativa (basada en diagramas de Feynman) que en cuantización canónica.

Resulta útil definir la funcional generatriz o función de partición

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{i \int \mathcal{L}_x(\varphi) + \int \mathcal{L}_x \varphi J\right\}$$

$J(x)$ "fuente" para $\varphi(x)$
(función arbitraria)

$$\langle \varphi(\vec{x}) | T \left\{ \exp[-i(\hat{H} + i \int \mathcal{L}_x \hat{\varphi} J)] \right\} | \varphi(\vec{x}) \rangle$$

de tal modo que

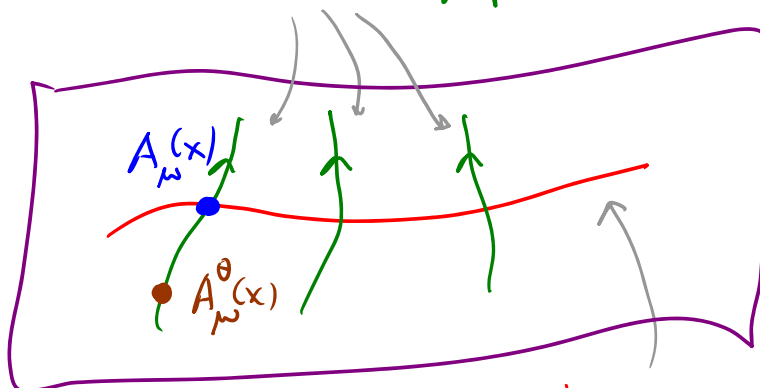
$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_N)} \left(Z[J] \right) \Big|_{J=0}$$

Ya sea en lenguaje canónico o de integral funcional, resolver la teoría implica calcular todos los correladores $G_N(x_1, \dots, x_N) \forall N$, o equivalentemente, determinar $Z[J]$.

Al generalizar al caso de un campo de norma (=vectorial sin masa) $A_\mu(x)$, debemos lidiar con la redundancia expresada por la invariancia de norma $A_\mu(x) \approx A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \equiv A_\mu^\theta(x)$, imponiendo condiciones de norma para asegurarnos de contar cada configuración física solamente una vez:

'Órbitas' del grupo de norma $U(1)$

Espacio configuración para $A_\mu(x)$



p.g. $\partial \cdot A$

Condición de Norma $N(A) = 0$
(no invariante de norma)

Vimos que el procedimiento de Faddeev-Popov nos da la medida de integración apropiada: debemos usar

$$\int \frac{DA_\mu(x)}{\text{Vol}(U(1))} e^{iS[A]} = \int DA_\mu(x) \underbrace{\delta^{(\infty)}[N(A)]}_{\text{delta de Dirac funcional}} \underbrace{\Delta_{FP}[A]}_{\det\left(\frac{\delta N(A^\theta)}{\delta \theta(x)}\right)\Big|_{N(A^\theta)=0}} e^{iS[A]}$$

↑ eliminar redundancia debida al grupo de norma $U(1)$
↑
↑ determinante de Faddeev-Popov

En el caso de la norma de Lorentz $\partial \cdot A = 0$ (en realidad, $\partial \cdot A = w(x)$),

esto se traduce en

↗ constante arbitraria

$$\int \frac{DA_{\mu}(x)}{\text{Vol}(U(1))} e^{iS[A]} = \mathcal{N} \int DA(x) \exp\left[i \int d^4x \left\{ \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 \right\}\right].$$

constante de normalización ↗ incluye a Δ_{FP} , que en el caso abeliano es una constante

↖ término fijado de norma

$L = 02/02/16$

En el caso de un campo fermiónico $\psi(x)$, la novedad es que los operadores satisfacen relaciones de anticonmutación.

En notación apropiada para un número finito de grados de libertad, en lugar de $[\hat{q}_a, \hat{p}_b] = i\delta_{ab}$, $[\hat{q}_a, \hat{q}_b] = 0 = [\hat{p}_a, \hat{p}_b]$ tendremos entonces

$$\{\hat{\psi}_a, \hat{\chi}_b\} = i\delta_{ab}, \quad \{\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b\} = 0 = \{\hat{\chi}_a, \hat{\chi}_b\} \quad a, b = 1, \dots, L$$

donde $\hat{\chi}_a$ denota el momento canónicamente conjugado a $\hat{\psi}_a$

—p.ej., $\hat{\chi}_a = i\hat{\psi}_a^\dagger$ para el campo de Dirac

(salvo que en el caso de campos, evidentemente $a \rightarrow (a, \vec{x})$ y $\delta_{ab} \rightarrow \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$).

Para definir la integral funcional, consideramos que el campo, en lugar de ser un operador, es una función cuyo valor son números anticomutativos o variables de Grassman $\theta \in V_1$ (\leftarrow espacio vectorial real o complejo), tales que

$$\theta\theta' = -\theta'\theta \quad \forall \theta, \theta' \in V_1 \quad (\Rightarrow \theta^2 = 0 \quad \forall \theta \in V_1).$$

Sus productos forman el álgebra de Grassman (o álgebra exterior).

$$A_D \equiv V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_D,$$

\uparrow \mathbb{R} ó \mathbb{C}

que tiene dimensión

$$\binom{D}{0} + \binom{D}{1} + \binom{D}{2} + \dots + \binom{D}{D} = 2^D.$$

\leftarrow para integral funcional, necesitamos $D \in \mathbb{N} \rightarrow \infty$

La noción natural de "derivada" es

$$\frac{d}{d\theta} 1 = 0, \quad \frac{d}{d\theta} \theta = 1, \quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} \dots \frac{\partial}{\partial \theta_1}}_{\text{anticomuta}} \underbrace{\theta_1 \dots \theta_{n-1} \theta_n}_{\text{anticomuta}} = 1.$$

Y aunque parezca extraño a primera vista, la definición natural de "integral" es la integral de Berezin

$$\boxed{\int d\theta 1 = 0, \quad \int d\theta \theta = 1} \Rightarrow \int d\theta f(\theta) = B.$$

Es decir, nuestra noción de integral no tiene nada que ver con una suma, sino que coincide con la derivada, $\int d\theta \equiv \frac{d}{d\theta}$!

Para funciones de más de una variable anticomutativa, la forma más general es

$$f(\theta_1, \dots, \theta_N) = f_0 + \sum_{j=1}^N \theta_j f_j + \sum_{j < k} \theta_j \theta_k f_{jk} + \sum_{j < k < l} \theta_j \theta_k \theta_l f_{jkl} + \dots + \theta_1 \theta_2 \dots \theta_N f_{12 \dots N},$$

totalmente antisimétricos

$$\text{y definiremos } \underbrace{\int d\theta_{j_1} \dots d\theta_{j_n}}_{\text{anticomutativa}} \underbrace{\theta_{j_n} \dots \theta_{j_1}}_{\text{anticomutativa}} = 1,$$

$$\text{así que } \int d\theta_N \dots d\theta_1 f(\theta_1, \dots, \theta_N) = f_{12 \dots N}.$$

Usando números anticmutativos, mostrar que la integral funcional para grados de libertad fermiónicos toma la forma familiar,

$$\langle \Psi'; t' | \Psi; t \rangle = \int_{\Psi(t)=\Psi}^{\Psi(t')=\Psi'} \mathcal{D}\Psi(\tau) \mathcal{D}\chi(\tau) \exp\left[i \int_t^{t'} d\tau \{ \chi(\tau) \dot{\Psi}(\tau) - H(\Psi(\tau), \chi(\tau)) \} \right]$$

Esta, de entrada, sería la versión Hamiltoniana de la integral funcional. Pero, en el caso fermiónico, el Lagrangiano típicamente es de primer orden en $\dot{\Psi}_a$ (como sucede con $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$) y los momentos χ_a son por lo tanto variables adicionales, independientes de $\dot{\Psi}_a$ (como vimos la p.262, la definición de momento canónico es una constricción), de manera que $\chi\dot{\Psi} - H(\Psi, \chi)$ coincide directamente con el Lagrangiano.

Para el campo de Dirac,

$$\chi(x) \equiv \Pi_{\Psi}(x) = i\Psi^\dagger(x) = i\bar{\Psi}(x)\gamma^0,$$

$$\mathcal{D}\Psi(x) \equiv \prod_{a, \vec{x}} \mathcal{D}\Psi_a(t, \vec{x}) \equiv \prod_{a, \vec{x}, t} \mathcal{D}\Psi_a(t, \vec{x})$$

(y similarmente para $\mathcal{D}\Psi^\dagger(x) = \mathcal{D}\bar{\Psi}(x)$),
 e igual que en el caso bosónico tenemos

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \dots \hat{\mathcal{O}}_n(x_n) \} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) e^{iS_D}}{\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS_D}}$$

\int definido en signos menos fermiónicos

Una diferencia importante entre el caso bosónico y fermiónico se ve en el resultado para la integral gaussiana:

$$\int \mathcal{D}\varphi(x) e^{i\int d^4x \varphi \Delta_x \varphi} \propto \frac{1}{\sqrt{\det \Delta_x}}$$

v.s.

$$\int \mathcal{D}\bar{\Psi}(x) \mathcal{D}\Psi(x) e^{i\int d^4x \bar{\Psi} \Delta_x \Psi} \propto \det \Delta_x .$$

L1: 10/08/17