

Al usar condiciones de renormalización para determinar los δZ_x en términos de correladores IP1 a 1 o más lazos, estas relaciones solo podrán mantenerse si hay en juego identidades de Ward apropiadas. Tal como en QED, estas identidades resultan indispensables para garantizar la renormalizabilidad de nuestra teoría no abeliana, que tiene 4 términos muy distintos controlados por el mismo acoplamiento g . En el contexto no abeliano, estas se conocen como identidades de Slavnov-Taylor, mencionadas en la p. 919.

De $\mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{ct}$ podemos deducir como siempre las reglas de Feynman. En espacio de momentos, los propagadores libres son:

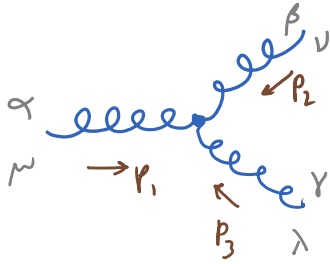
$\xi = 1$ norma de Feynman
 $\xi = 0$ norma de Landau

Gluón $\begin{matrix} \alpha \\ \mu \end{matrix} \text{-----} \begin{matrix} \beta \\ \nu \end{matrix} = \frac{-i}{p^2} \left(\eta^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \delta_{\alpha\beta}$

Quark $\begin{matrix} \pm \\ a \end{matrix} \text{-----} \begin{matrix} \mp \\ b \end{matrix} = \left(\frac{i}{\not{p} - m} \right)_{ba} \delta_{\pm\mp}$, si la flecha: cada A_μ^α es un campo real

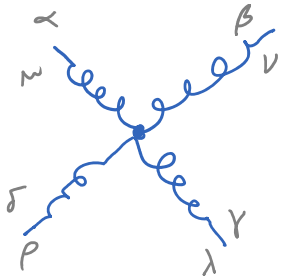
Fantasma $\begin{matrix} \alpha \\ \dots \end{matrix} \text{-----} \begin{matrix} \beta \\ \dots \end{matrix} = \frac{i}{p^2} \delta^{\alpha\beta}$. flecha no porque c sea complejo, sino porque $\bar{c} \neq c$

Los vértices son:

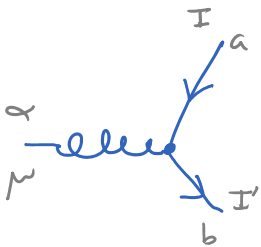


$$= -g f^{\alpha\beta\gamma} \left[\eta^{\mu\nu} (p_1 - p_2)^\lambda + \eta^{\nu\lambda} (p_2 - p_3)^\mu + \eta^{\lambda\mu} (p_3 - p_1)^\nu \right],$$

$-i(T_G^\alpha)_{\beta\gamma}$ generación en rep adjunta (p. 913)

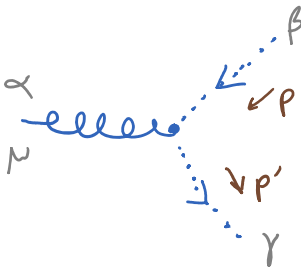


$$= -ig^2 \left[f^{\alpha\beta\eta} f^{\gamma\delta\eta} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}) \right. \\ \left. + f^{\alpha\gamma\eta} f^{\beta\delta\eta} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}) \right. \\ \left. + f^{\alpha\delta\eta} f^{\beta\gamma\eta} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\lambda} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\rho\nu}) \right],$$



$$= -ig \gamma_{ba}^\mu (T_r^\alpha)_{I'I}$$

\uparrow rep del quark (usualmente $r=N$)

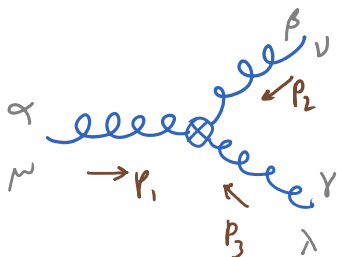


$$= -g f^{\alpha\beta\gamma} p'^\mu$$

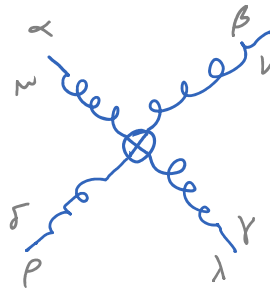
$-i(T_G^\alpha)_{\beta\gamma}$ rep adjunta

Y los contra términos son:


$$\text{Diagram of a ghost loop} = -i\delta_3^{\alpha\beta} (p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \delta^{\alpha\beta},$$



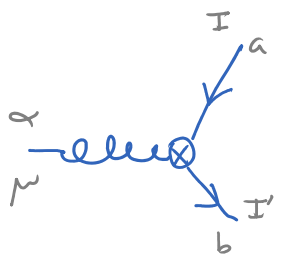
$$= -g\delta_{1,3\gamma} f^{\alpha\beta\gamma} \left[\eta^{\mu\nu} (p_1 - p_2)^\lambda + \eta^{\nu\lambda} (p_2 - p_3)^\mu + \eta^{\lambda\mu} (p_3 - p_1)^\nu \right],$$




$$= -ig^2 \delta_{1,45} \left[f^{\alpha\beta\eta} f^{\gamma\delta\eta} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}) \right. \\ \left. + f^{\alpha\gamma\eta} f^{\beta\delta\eta} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\lambda\nu}) \right. \\ \left. + f^{\alpha\delta\eta} f^{\beta\gamma\eta} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\lambda} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\rho\nu}) \right],$$



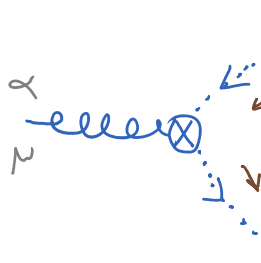
$$= (i\delta_{2,1} \not{p} - i\delta m) \delta_{I'I}$$



$$= -ig\delta_{1,ba} \gamma_{ba}^{\mu} (T^{\alpha})_{I'I}$$



$$= i\delta_{2,f} p^2 \delta^{\alpha\beta}$$



$$= -g\delta_{1,f} f^{\alpha\beta\gamma} p'^{\mu}$$

Y debemos incluir un -1 por cada lazo fermiónico (de Ψ ó c).

L26: 20/11/17

Con estas reglas podemos hacer cálculos de correcciones, amplitudes, etc. se puede ver en esos cálculos que los fantasmas c, \bar{c} juegan siempre el papel de grado de libertad "negativo", que cancelan las polarizaciones longitudinales y temporales de los gluones A_{μ}^{α} , dejándonos solo con los modos de polarización transversal.

Examinaremos ahora el cálculo de la función beta para g , β_g . El punto de partida es la relación entre el acoplamiento desnudo g_0 y el acoplamiento renormalizado en un esquema de escala deslizante, $g = g(\mu)$. De la p. 920, tenemos 4 maneras distintas de escribir esta relación, refiriéndonos a los factores de renormalización Z_x para el quark, los fantasmas, el vértice de 3 gluones o el de 4 gluones. Conviene usar la primera opción, que en regularización dimensional toma la forma

$$g = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} \mu^{-\epsilon/2} g_0.$$

$Z_{1,q}$ $Z_{2,g}$ $Z_{3,g}$ para que g se mantenga adimensional

Según nuestra fórmula general de la p. 888, en el esquema \overline{MS} o \overline{MS} tenemos

$$\begin{aligned} \beta_g &= \underbrace{-g D_g}_{\uparrow 0} - \underbrace{\left(\frac{n}{2} - 1\right) g^2}_{\uparrow \frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial g} \left[\underbrace{p_1}_{\uparrow -1} \text{Re} z_1 + \underbrace{p_2}_{\uparrow +1} \text{Re} z_2 + \underbrace{p_3}_{\uparrow \frac{1}{2}} \text{Re} z_3 \right] \\ &= \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial}{\partial g} \left[\text{Re} z_1 - \text{Re} z_2 - \frac{1}{2} \text{Re} z_3 \right], \end{aligned}$$

$$\beta_g = \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial}{\partial g} \left[\text{Re} z_1 - \text{Re} z_2 - \frac{1}{2} \text{Re} z_3 \right]$$

Igual que en QED, la expansión perturbativa es en potencias de g^2 (en lugar de solo g). Usando $\frac{\partial}{\partial g} = \frac{\partial(g^2)}{\partial g} \frac{\partial}{\partial(g^2)} = 2g \frac{\partial}{\partial(g^2)}$, podemos reescribir

$$\beta_g = g \left(g^2 \frac{\partial}{\partial(g^2)} \right) \left[\text{Re} z_1 - \text{Re} z_2 - \frac{1}{2} \text{Re} z_3 \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{z_i \text{ a } L \text{ lazos es de } \mathcal{O}(g^{2L})}$

de L al actuar sobre un término de L lazos

Así que al hacer cálculos solo a 1 lazo, tenemos simplemente

$$\beta_g = g \left[\text{Re} z_1^{(1)} - \text{Re} z_2^{(1)} - \frac{1}{2} \text{Re} z_3^{(1)} \right] \quad (L=1)$$

• Cálculo de $\delta z_2^{(1)}$: La autoenergía del quark es

$$-i \Sigma_{II'}(p) \equiv \text{Diagrama con un quark y un gluón en un lazo} \quad D=1$$

índices espaciales
ab implícitos
como siempre

$$= \text{Diagrama con quark y gluón} + \text{Diagrama con quark y quark} + \mathcal{O}(g^4)$$

$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-ig \gamma^{\mu\nu} (T_r^{\alpha'})_{II'}) \frac{i \delta_{JJ'}}{p+k-m} (-ig \gamma^\mu (T_r^\alpha)_{JI}) \frac{(-i g_{\mu\nu} \delta_{\alpha\alpha'})}{k^2} + i (\delta z_2^{(1)} \not{p} - \delta m^{(1)}) \delta_{II}$$

es norma de Feynman

L29: 17/06/19


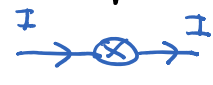
Podemos sacar enfrente los factores relacionados con el grupo no abeliano G :

$$\begin{aligned}
 -i \sum_{I'I} (\psi) &= \underbrace{(T_r^\alpha)_{IJ} (T_r^\alpha)_{JI}}_{(T_r^\alpha T_r^\alpha)_{I'I}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ig\gamma_\mu) \frac{i}{\not{p}-\not{k}-m} (-ig\gamma^\mu) \frac{-i}{k^2} \\
 &\quad + \delta_{I'I} i(\delta z_2 \not{p} - \delta m) + \mathcal{O}(g^4).
 \end{aligned}$$

El producto de generadores $T^\alpha T^\alpha$ (con suma implícita sobre $\alpha=1, \dots, \dim G$) conmuta con todos los T^β , y define al Casimir adriático del grupo G (p.64; el Casimir era \vec{J}^2 para $so(3)$ o $su(2)$). Por el lema de Schur (p.68), en cualquier representación irreducible (irrep) r , $T_r^\alpha T_r^\alpha$ debe ser proporcional a la identidad, ↖ a veces denotado C_2

$$(T_r^\alpha T_r^\alpha)_{I'I} = C(r) \delta_{I'I}$$

↖ depende de irrep

Vemos entonces que  $\propto \delta_{I'I}$, lo cual es buena noticia, porque permitirá que la divergencia logarítmica sea absorbible por  $= \delta_{I'I} i(\delta z_2 \not{p} - \delta m)$.

De la p. 805 sabemos además que (reemplazando $e \rightarrow g$)

$$\begin{aligned}
 -i \Sigma_{\text{QED}}^{(1)}(\not{p}) &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \underbrace{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}_{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \underbrace{\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}}_{\varepsilon/2} \left((d-2)\not{x} \not{p} - d \cdot m \right) \\
 &\quad \underbrace{\left((1-x)m^2 + xm_g^2 - x(1-x)p^2 \right)}_{\substack{\text{corte IR} \\ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \dots \text{ p. 703}}} \\
 &= \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \left\{ \underbrace{\int_0^1 dx 2x \not{p}}_1 \left(\frac{2}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^0) \right) - 4m \left(\frac{2}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^0) \right) \right\} \\
 &= \frac{ig^2}{8\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \not{p} - \frac{ig^2}{2\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} m + \mathcal{O}(\varepsilon^0).
 \end{aligned}$$

Combinando esto con el prefactor no abeliano, tenemos

$$-i \Sigma_{\text{I}^{\pm}}^{(1)}(\not{p}) = \delta_{\text{I}^{\pm}} C(r) \left[\frac{ig^2}{8\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} (\not{p} - 4m) + \mathcal{O}(\varepsilon^0) \right] + \delta_{\text{I}^{\pm}} i \left(\delta Z_2^{(1)} \not{p} - \delta m^{(1)} \right).$$

En el esquema MS, leemos de aquí que

$$\boxed{\delta Z_2^{(1)} = -\frac{g^2}{8\pi^2} C(r) \frac{1}{\varepsilon}}$$

• Cálculo de $\delta Z_1^{(1)}$: el vértice vertebral para el quark es

$$-ig \left(\Gamma_\alpha^\mu \right)_{I'I} \equiv \text{Diagram with incoming gluon } \alpha, \text{ outgoing quarks } I', I, \text{ and } D=0$$

$$= \underbrace{\text{Diagram 1}}_9 + \underbrace{\text{Diagram 2}}_8 + \underbrace{\text{Diagram 3}}_{-ig \delta Z_1^{(1)} \gamma^\mu (T_r^\alpha)_{I'I}} + \mathcal{O}(g^4)$$

Para el primer diagrama, podemos notar que

$$\text{Diagram 1} = \underbrace{(T_r^\beta)_{I'J'} (T_r^\alpha)_{JJ'} (T_r^\beta)_{JI}}_{(T_r^\beta T_r^\alpha T_r^\beta)_{I'I}} \underbrace{\text{Diagram 3}}_{-ig \Gamma_{\text{QED, lazo}}^\mu, D=0}$$

El prefactor no abeliano lo podemos calcular como sigue:

$$T_r^\beta T_r^\alpha T_r^\beta = \underbrace{T_r^\beta T_r^\beta T_r^\alpha}_{C(r) \mathbb{1} \quad \text{p. 926}} + \underbrace{T_r^\beta [T_r^\alpha, T_r^\beta]}_{if^{\alpha\beta\gamma} T_r^\gamma \quad \text{p. 910}}$$

$$= C(r) T_r^\alpha + \underbrace{if^{\alpha\beta\gamma} T_r^\beta T_r^\gamma}_{f^{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2} [T_r^\beta, T_r^\gamma] \quad \text{por antisimetría de } f^{\alpha\beta\gamma}} \\ = C(r) T_r^\alpha + if^{\beta\gamma\delta} T_r^\delta$$

Recordemos ahora de la p. 913 que podemos reinterpretar $if^{\beta\gamma\delta} = (T_G^\beta)_{\gamma\delta}$, el generador número β en la rep adjunta.

$$\text{Así que } if^{\alpha\beta\gamma} if^{\beta\gamma\delta} = -if^{\beta\alpha\gamma} if^{\beta\gamma\delta} = -(T_G^\beta)_{\gamma\alpha} (T_G^\beta)_{\gamma\delta}$$

$$= - \underbrace{(T_G^\beta T_G^\beta)_{\alpha\delta}}_{\text{Carimir en rep adjunta}} = -C(G) \delta_{\alpha\delta}.$$

Concluimos entonces que

$$T_r^\beta T_r^\alpha T_r^\beta = \left[C(r) - \frac{1}{2} C(G) \right] T_r^\alpha.$$

Por otra parte, sabemos que la divergencia en $-ig \Gamma_{\text{QED}, 1, 2, 0}^{\text{N}}$ determina $\delta Z_{1, \text{QED}}^{(1)}$, que por la identidad de Ward de QED (p. 761), es igual a $\delta Z_{2, \text{QED}}^{(1)} = -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$ (p. 927).

Tenemos entonces

$$\delta Z_1^{(1)g} \leftarrow \text{contribución del diagrama con vértice del quark} = -\frac{g^2}{8\pi^2} \left[C(r) - \frac{1}{2} C(G) \right] \frac{1}{\epsilon}.$$

Notemos de paso que

$$\begin{aligned} C(G) \delta_{\alpha\delta} &\equiv (T_G^\beta T_G^\beta)_{\alpha\delta} = i f^{\beta\alpha\gamma} i f^{\beta\gamma\delta} = i f^{\alpha\beta\gamma} i f^{\delta\gamma\beta} \\ &= (T_G^\alpha)_{\beta\delta} (T_G^\delta)_{\gamma\beta} = \text{Tr}(T_G^\alpha T_G^\beta). \end{aligned}$$

Para otras representaciones, $r \neq G$, la última expresión NO coincide con el Casimir, pero SI es proporcional a la identidad (con una elección de base), y define el índice (de Dynkin) I de la rep (a veces denotado C, T o R):

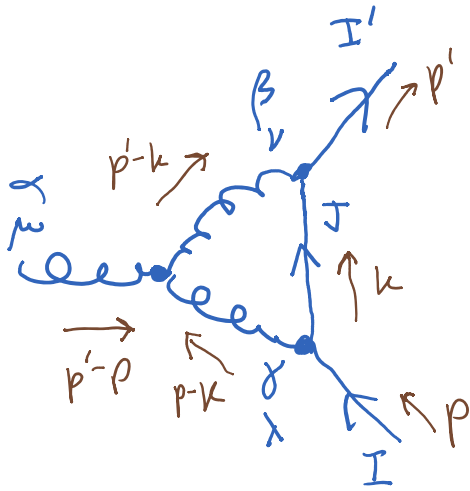
$$\text{Tr}(T_r^\alpha T_r^\beta) = I(r) \delta^{\alpha\beta}. \quad \leftarrow = T_r^\alpha T_r^\alpha \text{ p. 926}$$

Contrayendo con $\delta_{\alpha\beta}$, vemos que $\text{Tr}(C(r) \mathbb{1}_r) = I(r) \dim G$,

así que
$$I(r) = \frac{\dim(r)}{\dim(G)} C(r).$$

(Para más sobre factores no abelianos, ver p.ej. hep-ph/9802376.)

Procedamos ahora al segundo diagrama en el vértice vestido, que en la p. 928 denotamos g , y tiene también $D=0$:



$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-ig \gamma_\nu (T_r^\alpha)_{I'\sigma} \right) \frac{i}{k-m} \left(-ig \gamma_\lambda (T_r^\gamma)_{JI} \right) \\ \times \frac{-i}{(p'-k)^2} \frac{-i}{(p-k)^2} (-g f^{\alpha\beta\gamma}) \\ \times \left[\eta^{\mu\nu} (p'-p+p'-k)^\lambda + \eta^{\nu\lambda} (-p'+k-p+k)^\mu + \eta^{\lambda\mu} (p-k-p'+p)^\nu \right].$$

El prefactor no adelanto es ahora la componente II de

$$f^{\alpha\beta\gamma} T_r^\beta T_r^\gamma = \frac{1}{2} f^{\alpha\beta\gamma} [T_r^\beta, T_r^\gamma] \quad \leftarrow \text{por antisimetría de } f^{\alpha\beta\gamma} \\ = \frac{1}{2} f^{\alpha\beta\gamma} \underbrace{if^{\beta\gamma\delta} T_r^\delta}_{\text{p. 929}} = \frac{i}{2} C(G) T_r^\alpha.$$

Del resto del diagrama, nos interesa solo la divergencia logarítmica (\leftrightarrow polo $\frac{1}{\epsilon}$), que viene de ignorar p, p', m en comparación con k :

$$g = -\frac{g^3}{2} C(G) T^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\nu k \gamma_\lambda \frac{\eta^{\mu\nu} k^\lambda - 2\eta^{\nu\lambda} k^\mu + \eta^{\lambda\mu} k^\nu}{(k^2)^3} + O(\epsilon^0).$$

\uparrow
 $k^\rho \gamma_\rho$

En el integrando, por simetría esférica ($\overset{\text{Vick}}{\longleftrightarrow}$ Lorentz) podemos como de costumbre reemplazar $k^\mu k^\lambda \rightarrow \eta^{\mu\lambda} \frac{k^2}{d}$, así que

$$\delta = -\frac{g^3}{2} C_2(G) T^r \frac{1}{d} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2)^2} \left[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma_\lambda}_{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \right)} \underbrace{-2\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma_\lambda}_{(4d-4) \gamma^\mu} + \gamma^\nu \gamma_\nu \gamma^\mu \right] + O(\epsilon^0).$$

p. 785 12 p. 787

$$\Rightarrow \delta = -\frac{ig^3}{(4\pi)^2} \frac{3}{2} C(G) T^r \gamma^\mu \left(\frac{2}{\epsilon} + O(\epsilon^0) \right).$$

La contribución de este diagrama a $\delta Z_1^{(1)}$ es entonces

$$\delta Z_1^{(1)g} = -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{3}{2} C(G) \frac{1}{\epsilon},$$

y combinado con el resultado de la p. 930, obtenemos en total

$$\boxed{\delta Z_1^{(1)} = \delta Z_1^{(1)\eta} + \delta Z_1^{(1)g} = -\frac{g^2}{8\pi^2} [C(r) + C(G)] \frac{1}{\epsilon}}.$$

$$-\frac{g^2}{8\pi^2} [C(r) - \frac{1}{2} C(G)] \frac{1}{\epsilon} \quad \uparrow$$

Recordando de la p. 927 que $\delta Z_2^{(1)} = -\frac{g^2}{8\pi^2} C(r) \frac{1}{\epsilon}$,

veremos que la contribución $C(G)$ del diagrama g hace que

$\delta Z_1^{(1)} \neq \delta Z_2^{(1)}$, y por tanto $Z_1 \neq Z_2$. Esto es distinto

a QED: las identidades de Ward en el caso no abeliano

son menos restrictivas.

• Cálculo de $\delta Z_3^{(1)}$: la autoenergía del gluón es

$$i\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(p) \equiv \text{Diagram with incoming gluon } (\mu, \alpha, p) \text{ and outgoing gluon } (\nu, \beta, p) \text{ connected by a loop labeled } \text{IP1} \text{ in } D=2$$

$$= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6}$$

$-i\delta Z_3^{(1)}(p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \delta^{\alpha\beta}$

Vayamos diagrama por diagrama:

$$q \equiv \text{Diagram 1} = \underbrace{(T_r^\beta)_{JI} (T_r^\alpha)_{IJ}}_{\text{Tr}(T_r^\beta T_r^\alpha)} \Pi_{\text{QED}}^{\mu\nu}$$

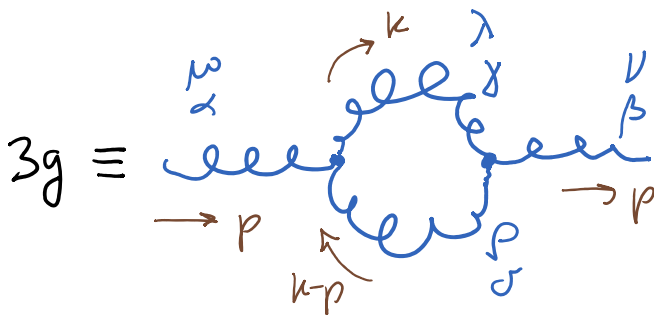
↑ incluye (-1) por lazo de quark

p.930 $I(r) \delta^{\alpha\beta}$

Recordando de la p. 801 que en MS $\delta Z_3^{(1)} = -\frac{g^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$,
tenemos entonces

$$\delta Z_3^{(1)g} = -\frac{g^2}{6\pi^2} I(r) \frac{1}{\epsilon}.$$

Veamos ahora



$$D=2$$

$$= \frac{1}{2} (-g)^2 \underbrace{f^{\alpha\gamma\delta} f^{\gamma\beta\delta}}_{C(\theta) \delta^{\alpha\beta} \text{ p. 929}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\eta^{\mu\lambda} (p+k)^\rho + \eta^{\lambda\rho} (-k-k+p)^\mu + \eta^{\rho\mu} (k-p-p)^\lambda \right] \\ \times \left[\delta_\lambda^\nu (k+p)_\rho + \delta_\rho^\nu (-p+k-p)_\lambda + \eta_{\rho\lambda} (-k+p-k)^\nu \right] \frac{-i}{k^2} \frac{-i}{(k-p)^2}.$$

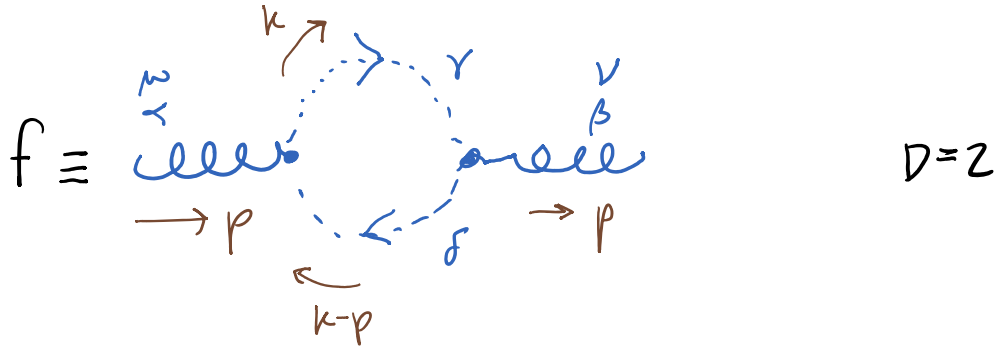
Por análisis dimensional, la divergencia logarítmica debe ser cuadrática en p (y en regularización dimensional, se anula la divergencia cuadrática, que hubiera sido de $\mathcal{O}(p^0)$). El cálculo explícito conduce a

$$3g = -\frac{ig^2}{16\pi^2} C(\theta) \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{19}{6} \eta^{\mu\nu} p^2 + \frac{11}{3} p^\mu p^\nu \right).$$

Notamos que esta contribución a $\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ NO es transversal, así que NO podría ser cancelada por el contratérmino disipable, ~~el término~~ $= -i\delta Z_3^{(1)} (p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \delta^{\alpha\beta}$, y NO podemos entonces deducir de ella por sí sola una contribución $\delta Z_3^{(1)}$. Nos hacen falta los diagramas restantes a este mismo orden.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_g \equiv & \text{Diagrama de un lazo con dos líneas externas de momento } p \text{ y } p, \text{ y una línea interna de momento } k. \\
 & \text{El diagrama muestra un lazo de líneas onduladas (fotones) con índices } \alpha, \beta \text{ en las líneas externas y } \mu, \nu \text{ en las líneas internas.} \\
 & \text{Hay una etiqueta "simetría" con una flecha que apunta a la parte del diagrama que involucra los índices } \alpha, \beta, \delta. \\
 & \text{Hay una etiqueta "C(6) \delta^{\alpha\beta} p \cdot \Gamma \eta" que apunta a la parte del diagrama que involucra los índices } \mu, \nu, \lambda. \\
 & \text{Hay una etiqueta "Divergencia cuadrática pura, se anula en regularización dimensional" que apunta a la integral de lazo.} \\
 = & \frac{1}{2} (-ig^2) \left[f^{\alpha\beta\delta} f^{\gamma\delta\sigma} (\dots) + f^{\alpha\delta\sigma} f^{\beta\gamma\sigma} (\eta^{\mu\nu} \delta_\lambda^\lambda - \delta_\lambda^\mu \eta^{\lambda\nu}) \right. \\
 & \left. + f^{\alpha\delta\sigma} f^{\beta\gamma\sigma} (\eta^{\mu\nu} \delta_\lambda^\lambda - \delta_\lambda^\nu \eta^{\lambda\mu}) \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2} \\
 & \text{Divergencia cuadrática pura, se anula en regularización dimensional} \\
 = & 0.
 \end{aligned}$$

Solo nos resta por considerar la contribución del lazo de fantasmas,



$$= (-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \frac{i}{(k-p)^2} (-g f^{\alpha\delta\gamma} k^\mu) (-g f^{\beta\delta\delta} (k-p)^\nu)$$

↳ lazo fermiónico

$$= +g^2 \underbrace{f^{\alpha\delta\gamma} f^{\beta\delta\delta}}_{\substack{\text{p. 929} \\ \text{CCG} \delta^{\alpha\beta}}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k-p)^\nu}{k^2 (k-p)^2} \quad \begin{array}{l} \lambda \equiv k-xp, \\ M^2 \equiv (x-x')p^2 \end{array}$$

$$\text{p. 668} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(\lambda^\mu + xp^\mu)(\lambda^\nu + (x-1)p^\nu)}{[\lambda^2 - M^2]^2}$$

Nuevamente la divergencia logarítmica proviene de los términos cuadráticos en p . El cálculo conduce a

$$f = -\frac{ig^2}{16\pi^2} \text{CCG} \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{1}{12} \eta^{\mu\nu} p^2 - \frac{1}{6} p^\mu p^\nu \right).$$

Esta contribución a la autoenergía del gluón tampoco es transversa, y tampoco puede cancelarse con el

contratérmino disponible. Así que no podemos leer en $\delta Z_3^{(1)F}$,

Al sumar el lazo de fantomas al lazo de gluón, obtenemos

$$\begin{aligned}
 3g + f &= \frac{(1)g^2}{3f} \Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + \frac{(1)g^2}{f} \Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \\
 &= -\frac{ig^2}{16\pi^2} C(G) \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{\epsilon} \left[\underbrace{\left(-\frac{15}{6} - \frac{1}{6}\right)}_{-\frac{10}{3}} \eta^{\mu\nu} p^2 + \underbrace{\left(\frac{11}{3} - \frac{1}{3}\right)}_{\frac{10}{3}} p^\mu p^\nu \right] \\
 &= \frac{ig^2}{16\pi^2} \frac{10}{3} \frac{1}{\epsilon} C(G) \delta^{\alpha\beta} \left[\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right],
 \end{aligned}$$

contribución a $\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ que si es transversa, y si puede cancelarse con $\text{cero} \otimes \text{cero} = -i\delta Z_3^{(1)} (p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \delta^{\alpha\beta}$.

Esto ejemplifica la idea más general de que, en la cuantización covariante con el método de Fadeev-Popov,

los gluones longitudinales y temporales están presentes en los lazos; pero su contribución es cancelada por la de los fantomas. Decidimos entonces que

$$\delta Z_3^{(1)gf} = \frac{g^2}{8\pi^2} C(G) \frac{5}{3} \frac{1}{\epsilon} .$$

Y al combinar esto con el resultado de la p. 934,

$$\delta Z_3^{(1)} = \delta Z_3^{(1)g} + \delta Z_3^{(1)gf} = \frac{g^2}{8\pi^2} \left[-\frac{4}{3} I(r) + \frac{5}{3} C(G) \right] \frac{1}{\epsilon}$$

Usando esto junto con $\delta Z_1^{(1)}$ de la p. 932 y $\delta Z_2^{(1)}$ de la p. 927 en la fórmula para la función beta de la p. 925, llegamos al resultado final

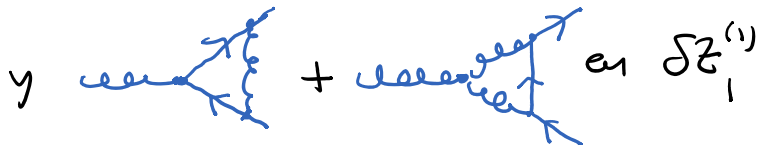
$$\beta_g = \frac{g^3}{8\pi^2} \left\{ \underbrace{+ [-C(r) - C(G)]}_{\text{Por } \delta Z_1^{(1)}} - \underbrace{[-C(r)]}_{\text{Por } \delta Z_2^{(1)}} - \frac{1}{2} \underbrace{\left[-\frac{4}{3} I(r) + \frac{5}{3} C(G) \right]}_{\text{Por } \delta Z_3^{(1)}} \right\}$$

es decir,

$$\beta_g = \frac{g^3}{16\pi^2} \left[-\frac{11}{3} C(G) + \frac{4}{3} I(r) \right]$$

recordar que
 $I(r) = \frac{\dim r}{\dim G} C(r)$
 p. 930

Contribución de $\delta Z_3^{(1)}$ Contribución de $\delta Z_1^{(1)}$



Aparecerá N_s veces si hubiera N_s especies ("sabores") de quarks

Para los grupos mencionados en la p. 910, los valores del Casimir y el índice siempre son positivos. P.ej.,

en $su(N)$, $I(N) = \frac{1}{2}$ y $C(G) = N$.

Es preciso que $\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F_{\alpha}^{\mu\nu}$ pp. 910, 913

$$\beta_g = \frac{g^3}{16\pi^2} \left[-\frac{11}{3} C(\mathfrak{g}) + \frac{4}{3} I(\mathfrak{r}) \right]$$

Para otros tipos de campo de materia, el coeficiente $+\frac{4}{3}$ enfrente de $C(\mathfrak{r})$ se modifica de la siguiente manera:

fermión de Dirac $+\frac{4}{3}$, fermión de Weyl $+\frac{2}{3}$, fermión de Majorana $+\frac{2}{3}$, escalar complejo $+\frac{1}{3}$, escalar real $+\frac{1}{6}$.

El punto importante es que los campos de materia siempre hacen una contribución positiva a la función β . La contribución de los bosones de norma, en cambio, es negativa!! De aquí concluimos que una teoría no abeliana con pocos campos de materia tiene función β negativa, es decir, es asintóticamente libre (p. 867).

Para QCD con $G = SU(N_c)$ y N_s sabores de quarks en la representación fundamental,

$$\beta_g = \frac{g^3}{16\pi^2} \left(-\frac{11}{3} N_c + \frac{2}{3} N_s \right) \equiv -\frac{b}{8\pi} g^3 \longleftrightarrow \alpha_{YM} \equiv \frac{g^2}{4\pi} \quad \beta_{\alpha_{YM}} = -b \alpha_{YM}^2$$

así que tenemos libertad asintótica si $N_s < \frac{11}{2} N_c$ (p.ej. $N_s \leq 16$ para $N_c = 3$). De la p. 886 sabemos entonces que α_{YM} corre como

$$\alpha_{YM}(\mu) = \frac{\alpha_{YM}(\mu_{ref})}{1 + b \alpha_{YM}(\mu_{ref}) \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{ref}}\right)} \equiv \frac{1}{b \ln(\mu/\mu_{ref})}, \quad \text{con } \alpha_{YM}(\mu_{ref}) \gtrsim 1.$$

↳ escala intrínseca
En QCD, $\mu_{ref} = \Lambda_{QCD}$

[30:19/06/19]

13. ANOMALÍAS

Hemos mencionado en varios momentos que las simetrías de una teoría clásica de campos pueden ser violadas al pasar al nivel cuántico, en cuyo caso decimos que existe una anomalía. El paso clave es la regularización: hemos visto que ciertos cortes UV pueden NO respetar alguna simetría. El punto importante es que existen situaciones en las que no existe ningún corte que sea compatible con todas las simetrías de interés, y debemos elegir entonces cuáles queremos preservar.

Cuando la anomalía aparece en una simetría global, implica que la corriente de Noether asociada $J^\mu_{(X)}$ en realidad NO se conserva a nivel cuántico, lo cual puede tener consecuencias físicas interesantes. Pero cuando tenemos una anomalía en una invariancia (que no simetría) local, concluimos algo mucho más drástico: que la teoría NO es consistente a nivel cuántico.