$$S_{\Lambda'}[\phi] = \int d^d x \Big\{ \tfrac{1}{2}\underbrace{(Z+\Delta Z)}_{\equiv \lambda_{2,2}}(\partial_\mu \phi)^2 + \tfrac{1}{2}\underbrace{(m^2+\Delta m^2)}_{\equiv \lambda_2 \equiv \lambda_{2,0}}\phi^2 + \tfrac{1}{4!}\underbrace{(\lambda+\Delta\lambda)}_{\equiv \lambda_4 \equiv \lambda_{4,0}}\phi^4$$

$$+ \tfrac{1}{6!}\underbrace{(\lambda_6+\Delta\lambda_6)}_{\equiv \lambda_{6,0}}\phi^6 + \tfrac{1}{4}(\lambda_{4,2}+\Delta\lambda_{4,2})(\partial_\mu\phi)^2\phi^2 + \dots \Big\},$$

no necesariamente renormalizable

que es simplemente la acción <u>más general</u> que respeta las simetrías del problema (Poincaré y el cambio discreto de fase $\phi \to -\phi$).

Hemos adoptado una notación en la cual $\lambda_{n,l}$ denota el acoplamiento en un término con n potencias del campo y l derivadas (que tiene entonces dimensión $D_{n,l} = d + n(1-\frac{d}{2}) - l$, p.709) y cuando $l=0$, $\lambda_{n,0} \equiv \lambda_n$. A pesar de que habíamos empezado específicamente con $Z=1$ y $\lambda_6 = \lambda_{4,2} = \dots = 0$, incluimos estas variables en $S_{\Lambda'}$ para abrir de una vez el caso en el que hubiéramos empezado con una S_Λ más general.

L31: 07/06/23 (4ta reposición)

Para poder hacer una comparación más directa entre nuestras 2 acciones efectivas, es útil hacer 2 cosas:

1) Para incorporar el hecho de que S_Λ se usa con $p < \Lambda$ y $S_{\Lambda'}$ con $p < \Lambda'$, nos conviene <u>reescalar los momentos</u> (y por tanto las distancias) en la teoría primada, definiendo

$$p' \equiv p \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda'} \qquad \longleftrightarrow \qquad x' = x \cdot \frac{\Lambda'}{\Lambda} \,,$$

de tal forma que $p < \Lambda'$ equivale a $p' < \Lambda$. Después de este reescalamiento,

$$S_{\Lambda'} = \int d^d x' \left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)^d \left\{ \frac{1}{2}(Z+\Delta Z)\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^2 (\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2+\Delta m^2)\phi^2 + \frac{1}{4!}(\lambda+\Delta\lambda)\phi^4 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6!}(\lambda_6+\Delta\lambda_6)\phi^6 + \frac{1}{4}(\lambda_{4,2}+\Delta\lambda_{4,2})\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^2 (\partial'_\mu\phi)^2\phi^2 + \ldots \right\}.$$

2) Para tener el término cinético normalizado de la misma manera en $S_{\Lambda'}$ y S_Λ, conviene definir en la teoría primada un <u>campo reescalado</u> $\phi' = \sqrt{\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^{2-d} \frac{Z+\Delta Z}{Z}}\,\phi$ (en nuestro ejemplo $Z=1$), y de paso renombrar $\phi' \to \varphi'$. Obtenemos entonces

$$S_{\Lambda'} = \int d^d x' \left\{ \frac{1}{2} Z (\partial'_\mu \varphi')^2 + \frac{1}{2}(m^2+\Delta m^2)\frac{Z}{Z+\Delta Z}\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^{-2} \varphi'^2 \right.$$
$$+ \frac{1}{4!}(\lambda+\Delta\lambda)\frac{Z^2}{(Z+\Delta Z)^2}\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^{d-4}\varphi'^4 + \frac{1}{6!}(\lambda_6+\Delta\lambda_6)\frac{Z^3}{(Z+\Delta Z)^3}\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^{2d-6}\varphi'^6$$
$$\left. + \frac{1}{4}(\lambda_{4,2}+\Delta\lambda_{4,2})\frac{Z^2}{(Z+\Delta Z)^2}\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^{d-2}(\partial'_\mu\varphi')^2\varphi'^2 + \ldots \right\}$$

$$\equiv \int d^d x' \left\{ \frac{1}{2} \underbrace{Z}_{1 \text{ por convención } \left(\Rightarrow \text{propagador} = \frac{1}{p^2}\right)} (\partial'_\mu\varphi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \varphi'^2 + \frac{1}{4!}\lambda'\varphi'^4 + \frac{1}{6!}\lambda'_6\varphi'^6 + \frac{1}{4}\lambda'_{4,2}(\partial'_\mu\varphi')^2\varphi'^2 + \ldots \right\}$$

con acoplamientos

Notar que Δm^2 aquí es distinta a la p. 641

$$m'^2 \equiv (m^2 + \Delta m^2)\frac{z}{z+\Delta z}\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^{-2},$$

$$\lambda' \equiv (\lambda + \Delta\lambda)\frac{z^2}{(z+\Delta z)^2}\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^{d-4},$$

Notar que esta definición de λ' es distinta a la que teníamos en la p. 899

$$\lambda_6' \equiv (\lambda_6 + \Delta\lambda_6)\frac{z^3}{(z+\Delta z)^3}\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^{2d-6},$$

$$\lambda_{4,2}' \equiv (\lambda_{4,2} + \Delta\lambda_{4,2})\frac{z^2}{(z+\Delta z)^2}\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^{d-2},$$

y más en general,

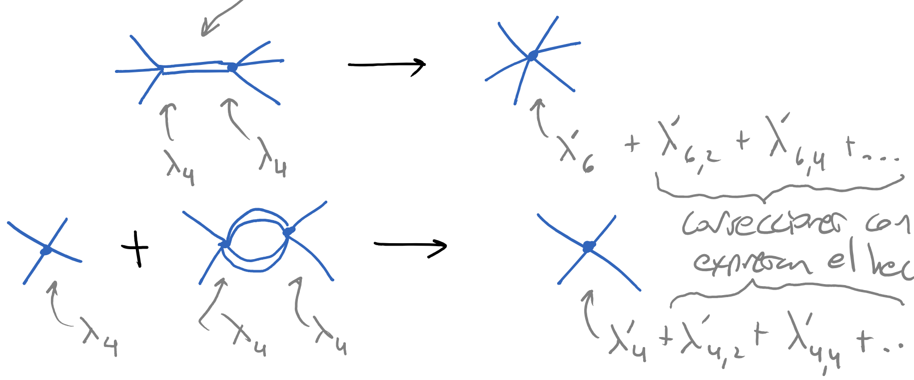
$$\lambda_{n,\ell}' = (\lambda_{n,\ell} + \Delta\lambda_{n,\ell})\left(\frac{z}{z+\Delta z}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)^{D_{n,\ell}}, \quad \text{con } D_{n,\ell} = d + n\left(1-\frac{d}{2}\right) - \ell .$$

Con esto vemos que el efecto neto de cambiar el corte UV es cambiar los acoplamientos desnudos $\lambda_{n,\ell}$ que definen a la teoría, con una regla de transformación específica $\lambda_{n,\ell} \to \lambda'_{n,\ell}(\lambda; \Lambda, \Lambda')$. En otras palabras, cuando decidimos omitir de nuestra descripción a los modos UV en la franja $\Lambda' \leq p < \Lambda$, podemos compensar su ausencia agregando nuevas interacciones (o modificando las ya existentes) entre los modos IR $(p < \Lambda')$.

L24: 21/11/17

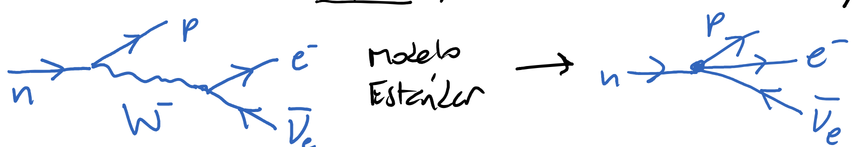
Φs actúan como intermediarios de interacciones entre φs

P.ej.,



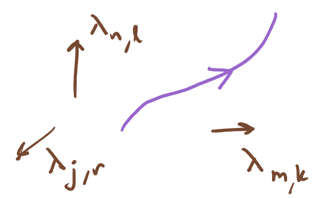
correcciones con infinitas derivadas, expresan el hecho de que la interacción original era NO local

(Esta idea de "integrar para sacar" ("integrate out") grados de libertad puede también usarse para un campo completo, $e^{-S_{ef}[\psi]} \equiv \int \mathcal{D}W\, e^{-S[\psi,W]}$, con $m_W \gg m_\psi$, como en



.)

La versión infinitesimal de esta transformación, con $\Lambda \to \Lambda' = \Lambda + \delta\Lambda$ y $\lambda_{n,\ell} \longrightarrow \lambda'_{n,\ell} = \lambda_{n,\ell} + \delta\lambda_{n,\ell}$, define el flujo del grupo de renormalización Wilsoniano: una trayectoria en el espacio de teorías.



La teoría libre no masiva, $\lambda_{n,\ell} = 0 \;\forall\, n,\ell$ (excepto $\lambda_{2,2} \equiv Z = 1$), es un punto fijo de la transformación $\lambda \to \lambda'$, porque los modos de Fourier están desacoplados entre sí. Cerca de este punto fijo, las correcciones $\Delta\lambda_{n,\ell}$ (incluyendo ΔZ) son entonces pequeñas, y tenemos simplemente

$$\boxed{\lambda'_{n,\ell} \simeq \lambda_{n,\ell} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)^{D_{n,\ell}}},$$

de donde vemos que, al ir a bajas energías, los acoplamientos con dimensión

$$\begin{cases} D_{n,\ell} > 0 & \text{(relevantes o súper-renormalizables)} \quad \text{crecen}, \\ D_{n,\ell} = 0 & \text{(marginales o estrict. renormalizables)} \quad \text{se mantienen igual}, \\ D_{n,\ell} < 0 & \text{(irrelevantes o no renormalizables)} \quad \text{decrecen}, \end{cases}$$

lo cual coincide exactamente con lo que aprendimos con el grupo de renormalización de Callan-Symanzik. ✓

En el caso de los acoplamientos que a orden más bajo son marginales, las correcciones más altas deciden si crecen o decrecen al disminuir Λ, es decir, si son marginalmente relevantes o marginalmente irrelevantes (o exactamente marginales). P.ej., para $\lambda \equiv \lambda_4 \equiv \lambda_{4,0}$ en $d=4$, de la p. 897 sabemos que $\Delta\lambda = -\frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)$, así que

$$\lambda' = \left(\lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)\right)\left(\frac{\overset{\nearrow 1}{Z}}{\underset{\swarrow 1}{Z} + \underset{\nwarrow \mathcal{O}(\lambda^2)}{\Delta Z}}\right)^2 \left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)^{D_{4,0} \nearrow 0},$$

es decir,

$$\boxed{\lambda' = \lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}.$$

← recordamos que estos acoplamientos son desnudos

Podemos ver que este resultado, obtenido con un corte flotante Λ', es idéntico al que obtuvimos en la p. 856 con una escala deslizante μ,

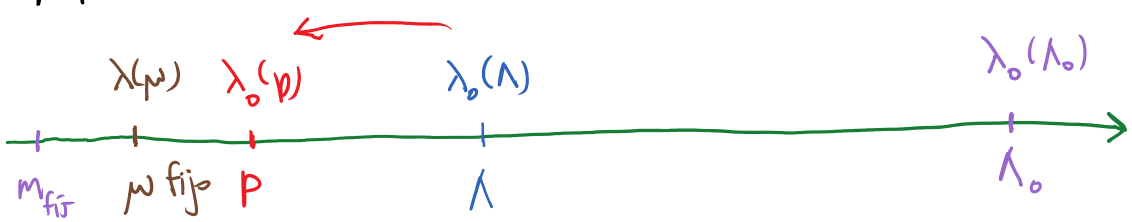
$$\lambda = \lambda_0 + \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right).$$

Podemos recuperar la función beta como $\beta \equiv \overbrace{\Lambda'\frac{\partial\lambda'}{\partial\Lambda'}}^{\partial\lambda'/\partial(\ln\Lambda')} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \simeq \frac{3\lambda'^2}{16\pi^2}$.

L27: 10/06/16

Claramente, si queremos estudiar a nuestra teoría a la escala experimental p, nos conviene usar la acción efectiva S_p, definida a la escala $\Lambda' \sim p$, cuyos acoplamientos ya incluyen las contribuciones de todos los modos con energías mayores a p, con lo cual nuestras predicciones a nivel árbol darán una mejor aproximación. Si usamos en cambio S_Λ, que es lo que habíamos hecho inicialmente en este curso, las contribuciones de los modos UV entre p y Λ aparecen abruptamente cuando calculamos lazos, dando correcciones grandes a los resultados a nivel árbol, que parecen invalidar la expansión perturbativa.

Con esto entendemos entonces el diagrama que teníamos en la p.825 para el grupo de renormalización wilsoniano,

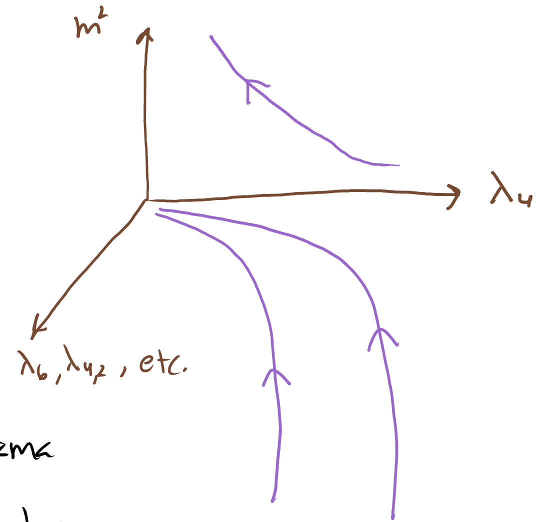


,

que además hemos visto que contiene la misma información que su contraparte de Callan-Symanzik,

.

En ambos enfoques, hemos visto que los acoplamientos irrelevantes (no renormalizables) decrecen rápidamente al ir a bajas energías. En otras palabras, los flujos de renormalización tienen la importante propiedad de que se enfocan sobre el subespacio de acoplamientos renormalizables (= relevantes + marginales), como en el ejemplo en $d=4$ ilustrado en el diagrama de la derecha. Esta es una simplificación drástica, porque solo hay un número finito de acoplamientos relevantes o marginales, mientras que el número de acoplamientos irrelevantes es infinito.



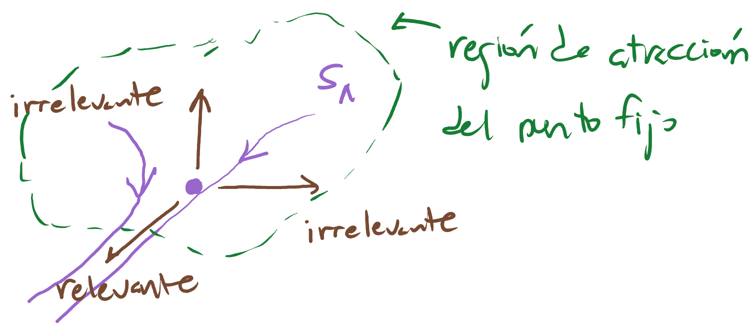
En algunas teorías puede ser que NO exista ningún acoplamiento renormalizable. Este es el caso, p.ej., de una teoría en $d=4$ que solo contenga campos espinoriales: la interacción más sencilla, $(\bar{\Psi}\psi)^2$, es irrelevante. Y también es el caso de la gravedad en $d>2$: la acción de Einstein-Hilbert, $S_{EH} = \frac{1}{8\pi G_N}\int d^dx \sqrt{-g}\, R$, en términos del campo del gravitón $h_{\mu\nu}(x)$ canónicamente normalizado, $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{G_N}\, h_{\mu\nu}(x)$, sí contiene interacciones, $S_{EH} \sim \int d^dx \left(\partial h \partial h + \sqrt{G_N}\, h \partial h \partial h + (\sqrt{G_N})^2 h^2 \partial h \partial h + \ldots\right)$; pero dado que $\sqrt{G_N}$ tiene dimensión $D = 1 - d/2 < 0$, todos ellos son irrelevantes.

En estos casos, cuando vamos a bajas energías y los acoplamientos irrelevantes se apagan, la teoría renormalizable que obtenemos es una teoría libre. P.ej., la gravedad es despreciable para $p \ll M_{\text{Planck}}$.

Cuando aprendimos a renormalizar, dos capítulos atrás, nuestra idea era retirar el corte UV ($\Lambda \to \infty$) lo más pronto posible, después de haber reescrito nuestras predicciones en términos de parámetros renormalizados. Vimos que esta reescritura involucra un número finito o infinito de parámetros dependiendo de si la teoría es renormalizable o no renormalizable, ¡con lo cual pareció una casualidad muy afortunada que el Modelo Estándar sea renormalizable (Tarea 13)! Con el enfoque de Wilson, entendemos que esto NO es una casualidad: sin importar qué tan complicada sea la teoría a la escala del corte físico $\Lambda_{\text{fís}}$, ¡al examinarla a energías $p \ll \Lambda_{\text{fís}}$ inevitablemente encontramos que se reduce a una acción efectiva renormalizable!

Esta es justamente la visión que tenemos del Modelo Estándar hoy en día: que es "sólo" una teoría efectiva, válida a bajas energías, que eventualmente habremos de reemplazar por una teoría mejor — la cual nos gustaría que incorpore a la gravedad, e idealmente sea completa en el UV.

La contraparte del hecho de que desde esta nueva perspectiva los acoplamientos no renormalizables ya no nos asustan, es que sabemos bien que los acoplamientos relevantes (súper-renormalizables), como la masa m^2, crecen rápidamente al ir a bajas energías. Así que, si queremos que tengan un valor razonable a la escala experimental $p \ll \Lambda$, debemos ajustar su valor a que sea muy pequeño a la escala del corte Λ. En otras palabras, debemos asegurarnos de que S_Λ esté muy cerca de un punto fijo del grupo de renormalización, en lo que a los acoplamientos relevantes se refiere.



En resumen, para definir una teoría de campos con $\Lambda \gg p$, debemos empezar con una teoría conforme y decidir los valores iniciales para cada uno de los acoplamientos que son relevantes en torno a ese punto fijo. El valor de los acoplamientos irrelevantes y el significado preciso del corte Λ No importan (dentro de la región de atracción de la CFT): muchas teorías distintas en el UV coinciden en $p \ll \Lambda$: pertenecen a la misma "clase de universalidad".

12. Cuantización de Teorías No Abelianas

En las p.329-334, vimos que la teoría de Maxwell, con grupo de norma $U(1)$, puede fácilmente generalizarse al caso de un grupo de norma no abeliano G (opciones para G son $SU(N)$, $SO(N)$, $Sp(N)$, los grupos excepcionales E_6, E_7, E_8, F_4 y G_2, o productos de dos o más de estos factores y/o $U(1)$s), con generadores T^α $\alpha = 1, \dots, \dim G$ (p.ej. $\dim SU(N) = N^2-1$) y relaciones de conmutación $[T^\alpha, T^\beta] = i f^{\alpha\beta\gamma} T^\gamma$.

ctes. de estructura totalmente antisimétricas (con elección de base Ts)

El resultado es la teoría de Yang-Mills (-Shaw)

$$\boxed{\mathcal{L}_{YM}(A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)) = -\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)\right]},$$

tomando en cuenta convención habitual $\mathrm{Tr}(T^\alpha T^\beta) = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}$

con campo de norma $A_\mu(x) \equiv A_\mu^\alpha(x) T^\alpha$,

campo matricial (valuado en el álgebra de Lie de G)

$\dim G$ campos vectoriales reales

e intensidad de campo $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\underset{\text{acoplamiento}}{g}[A_\mu, A_\nu] \equiv F_{\mu\nu}^\alpha T^\alpha$,

es decir, $F_{\mu\nu}^\alpha(x) = \partial_\mu A_\nu^\alpha(x) - \partial_\nu A_\mu^\alpha(x) - g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma$.

L25: 23/11/17

Esta teoría es invariante bajo la transformación de norma

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = \exp\left(i\theta^\alpha(x) T^\alpha\right)\left(A_\mu(x) - \frac{i}{g}\mathbb{1}\partial_\mu\right)\exp\left(-i\theta^\beta(x)T^\beta\right),$$

cuya versión infinitesimal es

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + i\,\theta^\beta(x)\,[T^\beta, \underbrace{A_\mu(x)}_{A^\gamma_\mu(x)\,T^\gamma}] - \frac{1}{g}T^\alpha\partial_\mu\theta^\alpha(x),$$

o lo que es lo mismo,

$$A^\alpha_\mu(x) \longrightarrow A'^\alpha_\mu(x) = A^\alpha_\mu(x) - f^{\alpha\beta\gamma}\,\theta^\beta(x)A^\gamma_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^\alpha(x).$$

A diferencia del caso abeliano, la intensidad de campo NO es invariante,

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \exp\left(i\theta^\alpha(x)T^\alpha\right)F_{\mu\nu}(x)\exp\left(-i\theta^\beta(x)T^\beta\right),$$

y es por ello que la traza es necesaria en $\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$.

Distinto a $\mathcal{L}_{Maxwell}$, $\mathcal{L}_{YM}$ NO es una teoría libre,

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig\left[A_\mu, A_\nu\right]\right)^2 \sim (\partial A)^2 + \partial A\, A^2 + A^4.$$

Vimos también cómo acoplar (mínimamente) un campo de materia: si $\varphi_I(x)$ transforma en una representación irreducible r del grupo G,

$$\varphi_I(x) \longrightarrow \varphi'_I(x) = M_{II'}(\theta)\,\varphi_{I'}(x) = \left[\exp\left(i\theta^\alpha \underset{\text{rep}}{T^\alpha_r}\right)\right]_{II'}\varphi_{I'}(x),$$

$I = 1, \ldots, \dim r$

con $\mathcal{L}_m(\varphi_I, \partial_\mu \varphi_I)$ invariante bajo transformaciones de G globales, entonces definiendo la derivada covariante

$$\boxed{D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu(x)} \;,$$

encontramos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM}(A, \partial A) + \mathcal{L}_m(\varphi, D_\mu \varphi)$ es invariante bajo transformaciones de G locales, donde los generadores T^α dentro de $D_\mu\varphi$ deben por supuesto tomarse en la representación r, $[D_\mu \varphi(x)]_I \equiv \partial_\mu \varphi_I(x) + igA^\alpha_\mu [T^\alpha_r]_{II'} \varphi_{I'}(x)$.

Lo importante de esta definición es que, bajo transformaciones de norma, $D_\mu\varphi$ transforma exactamente igual que φ,

$$[D_\mu \varphi(x)]_I \longrightarrow [D'_\mu \varphi'(x)]_I = \exp\left(i\theta^\alpha(x) T^\alpha\right)_{II'} [D_\mu \varphi(x)]_{I'} \;.$$

Los grupos usados más frecuentemente son $G = SU(N)$.

Modelo Estándar $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

Las representaciones más frecuentes son

- La fundamental, que básicamente es la que define al grupo, $r = \underline{N}$ en el caso de $SU(N)$, donde el índice interno $I = 1, \ldots, N$.
- La adjunta, denotada $r = G$, a la cual pertenecen los generadores del álgebra, así que $I \leftrightarrow \alpha = 1, \ldots, \dim r = \dim G$. Más explícitamente,

la matriz que representa al generador T^α en la representación adjunta es $(T^\alpha_G)_{\beta\gamma} \equiv i f^{\alpha\beta\gamma}$. Para $G=SU(N)$, la adjunta tiene dimensión $\dim G = N^2-1$ (= matrices $N\times N$ hermitianas y sin traza).

- La antifundamental, que es la representación conjugada $= (T^\alpha_r)^T$

$$\left(\exp(i\theta^\alpha (T^\alpha_r))\right)^* = \exp(-i\theta^\alpha (T^\alpha_r)^*) \equiv \exp(i\theta^\alpha (T^\alpha_{\bar{r}})) \leftrightarrow \left((T^\alpha_{\bar{r}}) \equiv -(T^\alpha_r)^*\right)$$

rep a la fundamental, $r=\underline{\bar{N}}$ para $G=SU(N)$. En el caso especial de $SU(2)$, $\underline{N}$ y $\underline{\bar{N}}$ son equivalentes; pero para $N>2$ son distintas.

La generalización no abeliana de QED, donde acoplamos $A_\mu(x)$ a un campo de Dirac $\psi_I(x)$, es entonces (p. 333)

$$\boxed{\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]}.$$

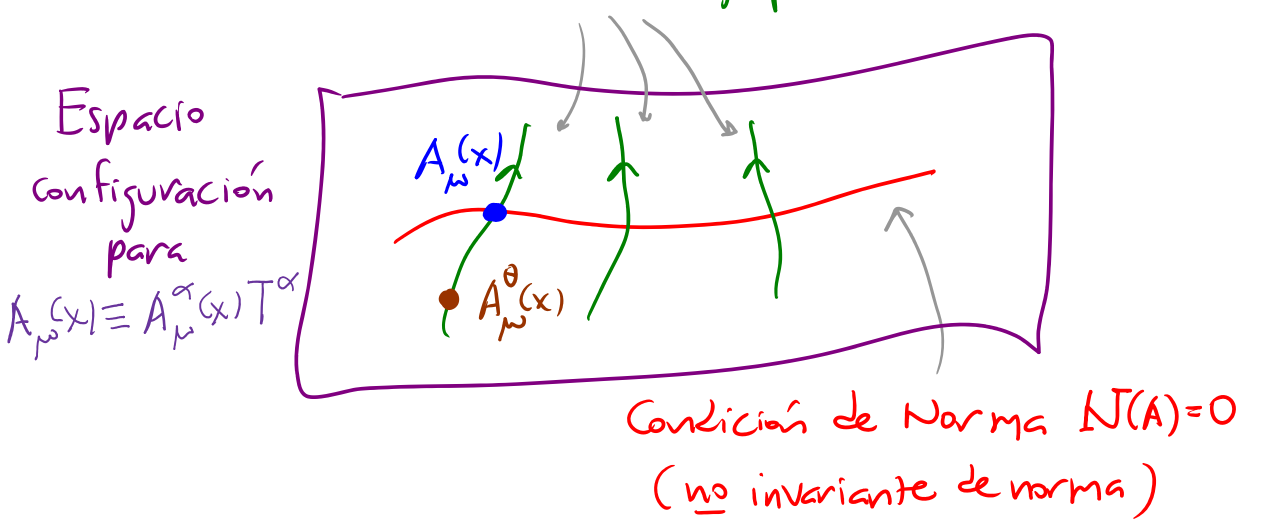
Con $G=SU(3)$ y $r=\underline{N}$, esto define a la Cromodinámica Cuántica (QCD), nombre que puede extenderse a otros G ó r. El campo $\psi(x)$ describe en ese caso a un ('sabor' específico de) quark, con índice de color $I=1,\dots,N$ (podríamos llamar c), y $A_\mu(x)$ está asociado a los $\dim G = 3^2-1=8$ distintos tipos de gluones, portadores de la fuerza fuerte.

L28: 12/06/19

Al cuantizar esta teoría por el método de integral funcional, ingenuamente definiríamos la funcional generatriz como $\int \mathcal{D}A^{\alpha}_{\mu}\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{iS}$; pero esto tiene el mismo problema que en el

← producto sobre $\mu = 0, \dots, 3$ y $\alpha = 1, \dots, \dim G$

caso abeliano: es divergente por la invariancia de norma (redundancia). Para definir la teoría correctamente, debemos fijar la norma, de tal modo que cada configuración física se incluya en la integral de camino solamente una vez.



En las pp. 572-77, aprendimos el método de Faddeev-Popov para hacer esto de manera cuidadosa. Vimos que fijar la norma se traduce en reemplazar

$$\int \mathcal{D}A_\mu\, e^{iS} \longrightarrow \int \mathcal{D}A_\mu(x)\; \underbrace{\delta^{(\infty)}[\mathcal{N}(A)]}_{\text{delta de Dirac funcional}}\; \underbrace{\Delta_{FP}[A]}_{\text{determinante de Faddeev-Popov}}\; e^{iS} .$$

← índice α oculto

delta de Dirac funcional impone condición de norma $\mathcal{N}(A)=0$

determinante de Faddeev-Popov da la medida apropiada

Al igual que en las pp. 577-578, nos conviene elegir la norma de Lorentz modificada $N_{\omega_\alpha}[A^\alpha] \equiv \partial_\mu A^\mu_\alpha(x) - \omega_\alpha(x)$, con $\omega(x)$ una función arbitraria. Y para lidiar con $\delta^{(\infty)}(N_\omega[A])$, tal como allá integramos sobre $\omega(x)$ con un peso gaussiano, $\int D\omega \exp\left(-i\int d^4x \frac{\omega_\alpha(x)\omega_\alpha(x)}{2\xi}\right)$, donde el ancho ξ es arbitrario. El resultado neto es reemplazar

$$\int DA_\mu\, \delta^{(\infty)}[N(A)]\, \Delta_{FP}[A]\, e^{iS} \longrightarrow \int DA_\mu\, \Delta_{FP}[A]\, e^{i(S+S_\xi)},$$

donde aparece el término fijador de norma

$$S_\xi \equiv \int d^4x\, \mathcal{L}_\xi \equiv \int d^4x \frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A_\alpha)(\partial\cdot A_\alpha).$$

← Hace que la parte cinética sea invertible (⇒ propagador libre)

Hasta aquí todo es idéntico al caso abeliano. La diferencia radica en la forma que tiene la determinante de Faddeev-Popov

$$\Delta_{FP}[A_\mu] \equiv \mathrm{Det}\left(\frac{\delta N(A^\theta)}{\delta\theta(x)}\right)\Bigg|_{N(A^\theta)=0} \quad \text{(p. 574)}.$$

En Maxwell, $A^\theta_\mu(y) = A_\mu(y) - \partial_\mu\theta(y)$, por lo que

$$\frac{\delta N(A^\theta)}{\delta\theta(x)} = \frac{\delta}{\delta\theta(x)}\big(\underbrace{\partial\cdot A(y) - \partial^2\theta(y)}_{\partial^\mu A^\theta_\mu(y)} - \omega(y)\big) = -\partial^2\delta^{(4)}(x-y)$$ es independiente de A_μ.

En Yang-Mills, en cambio, la transformación de norma en su versión infinitesimal (que es todo lo que necesitamos para tomar la derivada) es (p.908)

$$A^\alpha_\mu(y) \longrightarrow A'^\alpha_\mu(y) = A^\alpha_\mu(y) - f^{\alpha\beta\gamma}\,\theta^\beta(y) A^\gamma_\mu(y) - \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^\alpha(y),$$

de modo que

evaluar en y

$$\frac{\delta N(A'^\alpha_\mu)}{\delta\theta^\beta(x)} = \frac{\delta}{\delta\theta^\beta(x)}\left(\partial\cdot A^\alpha - f^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu(\theta^\beta A^\gamma_\mu) - \frac{1}{g}\partial^2\theta^\alpha - \omega^\alpha\right)$$

$$= -f^{\alpha\beta\gamma}\,\partial^\mu\left(A^\gamma_\mu\,\delta^{(4)}(x-y)\right) - \frac{1}{g}\delta^{\alpha\beta}\partial^2\delta^{(4)}(x-y)$$

$$= -\frac{1}{g}\,\partial^\mu\Big[\underbrace{\left(\delta^{\alpha\beta}\partial_\mu + g f^{\alpha\beta\gamma}A^\gamma_\mu\right)}\,\delta^{(4)}(x-y)\Big]$$

p.910 $\quad \delta^{\alpha\beta}\partial_\mu + ig(T^\alpha_G)_{\beta\gamma}A^\gamma_\mu = (D_\mu)^{\alpha\beta}$ derivada covariante actuando sobre un campo en la adjunta

p.909

depende de A_μ.

Así que, mientras que en el caso abeliano Δ_{FP} era simplemente una constante que podíamos sacar de la integral, en el caso no abeliano da una modificación importante a la medida de integración sobre A_μ. El último truco de Faddeev y Popov (que habíamos anticipado ya en la p.579) fue reescribir Δ_{FP} aprovechando el hecho de que una determinante funcional es precisamente lo que resulta de hacer una integral funcional sobre campos fermiónicos, tal como vimos en las pp. 603-605, 615:

$$\operatorname{Det}(\partial^\mu D_\mu) = \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\, \exp\Big[\, i \underbrace{\int d^4x\, \bar{c}\,(\partial^\mu D_\mu) c}_{-\int d^4x\, \partial^\mu \bar{c}\, D_\mu c} \Big] .$$

segundo campo fermiónico, independiente de c ($\bar{c} \neq c^*$)

a veces llamado b

$c(x)$ y $\bar{c}(x)$ son campos auxiliares reales, que se conocen como fantasmas de Faddeev-Popov. A pesar de ser escalares bajo Lorentz, son fermiónicos, con lo cual violan el teorema de espín-estadística (p. 272). Esto ocurre porque violan una de las suposiciones del teorema: el espacio de Hilbert que generan contiene estados con norma negativa. Podrían asustarnos entonces (¡por eso lo de fantasmas!); pero los usaremos sólo como objetos auxiliares, que figuran de manera importante únicamente en los pasos intermedios de los cálculos en teorías de norma no abelianas.

Recordando de la p. 916 que la derivada covariante D_μ que se obtiene dentro de Δ_{FP} es específicamente la que actúa sobre campos en la adjunta, vemos que tanto el fantasma c como el "antifantasma" $\bar{c}$ deben pertenecer a esta representación, así que tienen un índice implícito α.

En resumen, el proceso de cuantización de las teorías de norma no abelianas acaba agregando 2 términos a la acción:

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^2) \to \underbrace{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^2)}_{\mathcal{L}_{YM}} + \underbrace{\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2}_{\mathcal{L}_\xi} - \underbrace{\bar{c}\,\partial^\mu D_\mu c}_{\mathcal{L}_f} .$$

suma implícita sobre índice oculto α

Juntando esto con la parte de materia, nuestra teoría completa es

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^2) + \frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 - \bar{c}\,\partial^\mu D_\mu c} .$$

El término fijador de norma puede reescribirse alternativamente como

$$\mathcal{L}_\xi = -\frac{\xi}{2}B^2 + B\,\partial\cdot A = -\frac{\xi}{2}B^\alpha B^\alpha + B^\alpha \partial_\mu A^\mu_\alpha ,$$

índice α indistintamente arriba o abajo

donde nos hemos inventado un nuevo campo auxiliar (bosónico) $B^\alpha(x)$ (conocido como campo de Lautrup-Nakanishi), que no es dinámico: no tiene término cinético. La integral $\int \mathcal{D}B$ es gaussiana, por lo que el resultado de hacerla será (pp. 529-530) simplemente evaluar B en su ecuación de movimiento, $B^\alpha = \frac{1}{\xi}\partial_\mu A^\mu_\alpha$, lo cual nos lleva de vuelta a la forma original del lagrangiano fijador de norma,

$$-\frac{\xi}{2}B^\alpha B^\alpha + B^\alpha\partial_\mu A^\mu_\alpha = -\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 + \frac{1}{\xi}(\partial\cdot A)^2 = +\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 .$$ ✓

La utilidad del campo B es que nos permite notar más fácilmente que nuestra teoría, obtenida después de fijar la norma, tiene una simetría continua global como herencia de las transformaciones de norma. Se trata de la transformación de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST)

$$\boxed{\begin{aligned} \delta A^\alpha_\mu &= \epsilon (D_\mu)^{\alpha\beta} C^\beta , \quad \delta\psi_I = -ig\epsilon C^\alpha (T^\alpha)_{II'} \psi_{I'} , \\ \delta C^\alpha &= \tfrac{1}{2} g \epsilon f^{\alpha\beta\gamma} C^\beta C^\gamma , \quad \delta \bar{C}^\alpha = \epsilon B^\alpha , \quad \delta B^\alpha = 0 . \end{aligned}}$$

no lineal en los campos (como la inv. de norma)

Esta transformación mezcla campos bosónicos con fermiónicos, así que el parámetro infinitesimal de la transformación, ϵ, es anticonmutativo. Como consecuencia de esta simetría, existe una carga conservada, Q_{BRST} ($Q^2=0$). Esta nos permite distinguir, dentro del espacio de Hilbert completo, incluyendo los fantasmas, cuáles estados son físicos:

$$Q_{BRST} |fís\rangle = 0 , \quad |fís\rangle \simeq |fís\rangle + Q_{BRST} |algo\rangle$$

análogo a Gupta-Bleuler (pp. 364-6)

[ver Peskin 16.4, Weinberg II 15.7]. La simetría BRST conduce a identidades de Ward, llamadas identidades de Slavnov-Taylor [Collins 2.13].

Lo que hemos escrito en la p. 913 es el lagrangiano desnudo de la teoría, donde los campos, la masa y el acoplamiento debieran tener un subíndice 0. Separando la parte renormalizada y los contratérminos, tenemos $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{ct}$, con

$$\mathcal{L}_{ren} = \underbrace{\bar\psi(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi}_{\bar\psi i\partial\!\!\!/\psi - m\bar\psi\psi - g\bar\psi\gamma^\mu A_\mu\psi} - \frac{1}{2}Tr(F^2) + \frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 + \underbrace{\partial^\mu \bar{c} D_\mu c}_{\partial^\mu \bar{c}^\alpha \partial_\mu c^\alpha - g f^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu \bar{c}^\alpha A_\mu^\beta c^\gamma}$$

$$-\frac{1}{2}Tr(F^2) = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha - g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma\right)^2$$

suma implícita sobre índices α,β,γ repetidos

$$= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha)^2 + g f^{\alpha\beta\gamma} A_\beta^\mu A_\gamma^\nu \partial_\mu A_\nu^\alpha - \frac{g^2}{4} f^{\alpha\beta\gamma} f^{\alpha\delta\eta} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma A_\delta^\mu A_\eta^\nu$$

Todos los términos de interacción involucran al mismo acoplamiento

y

$$\mathcal{L}_{ct} = \overbrace{\delta Z_2}^{\delta Z_{2,q}} \bar\psi i\partial\!\!\!/\psi - \delta m\bar\psi\psi - g\overbrace{\delta Z_1}^{\delta Z_{1,q}}\bar\psi\gamma^\mu A_\mu\psi$$

$$-\delta Z_3\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha)^2 + g\,\delta Z_{1,3g} f^{\alpha\beta\gamma} A_\beta^\mu A_\gamma^\nu \partial_\mu A_\nu^\alpha - \frac{g^2}{4}\delta Z_{1,4g}(f^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2$$

$$+\delta Z_{2,f}\,\partial^\mu \bar{c}^\alpha \partial_\mu c^\alpha - g\,\delta Z_{1,f} f^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu \bar{c}^\alpha A_\mu^\beta c^\gamma \; .$$

Análogamente a QED, aquí hemos definido

$$Z_2\sqrt{Z_3}\,g_0 \equiv Z_1 g\,,\quad (\sqrt{Z_3})^3 g_0 \equiv Z_{1,3g}\, g\,,\quad Z_3^2 g_0^2 \equiv Z_{1,4g}\, g^2\,,\quad Z_{2,f}\sqrt{Z_3}\,g_0 \equiv Z_{1,f}\, g\,,$$

y por supuesto $Z_x \equiv 1 + \delta Z_x$. Notamos que esto implica que

$$\boxed{\frac{g}{g_0\sqrt{Z_3}} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{Z_3}{Z_{1,3g}} = \sqrt{\frac{Z_3}{Z_{1,4g}}} = \frac{Z_{2,f}}{Z_{1,f}}}\;.$$