

Las divergencias en el primer renglón estaban igualmente presentes en $G_{4\varphi,0\varphi^1} = G_4$, y sistemas de k p.848 que se cancelan con el otro término correspondiente (calculados en $m^2=0$):

$$= 2 \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \left[1 + \underbrace{\left(-\frac{i g_4}{32\pi^2} \Lambda^2 \right)}_{\text{p.848}} \left(\frac{i}{p_1^2} + \frac{i}{p_2^2} \right) + i \left(\cancel{\delta \tau_{\varphi_1}^{(1)}} - \delta m_{(1)}^2 \right) \frac{i}{p_1^2} + i \left(\cancel{\delta \tau_{\varphi_2}^{(1)}} - \delta m_{(1)}^2 \right) \frac{i}{p_2^2} \right]$$

$$= 2 \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \cdot \underbrace{\left(-\frac{g_4}{32\pi^2} \Lambda^2 \right)}_{\text{p.848}}$$

El k2 del segundo renglón, en cambio, NO estaba presente en G_4 , y nos da la nueva divergencia, que requiere reemplazar φ^2 por $[\varphi^2]$:

$$= 2 \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \left[(-i g_4) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \frac{i}{(p_1+p_2-k)^2} - i \delta \tau_{\varphi^2}^{(1)} \right]$$

misma integral que en (con $m^2=0$) $\rightarrow \frac{1}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-5}\right)$ p.847,856 $\leftarrow (p_1+p_2)^2 = p_3^2$

Imponiendo como condición de renormalización

$$\tilde{G}_{2\varphi,1\varphi^1}(p_1^2=-\mu^2, p_2^2=-\mu^2, p_3^2=-\mu^2) = 2 \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2}$$

\leftarrow resultados a nivel árbol ,

deducir que $\delta z_{\varphi^2}^{(1)} = -\frac{g_4}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \iff z_{\varphi^2} = 1 - \frac{g_4}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)$,

y por tanto

$$\gamma_{\varphi^2} \equiv \frac{\partial(\ln z_{\varphi^2})}{\partial(\ln \mu)} \simeq \frac{\partial \delta z_{\varphi^2}^{(1)}}{\partial(\ln \mu)} = \frac{g_4}{16\pi^2} \cdot \left(\text{cf. } \beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \right)$$

por canal s,t,u \swarrow \nwarrow por 2 vértices

L25: 20/05/19

Usando este resultado en la definición $\beta_2 \equiv (-2 + \gamma_{\varphi^2}) g_2$ de la

p. 880, obtenemos

$$\beta_2 = \left(-2 + \frac{g_4}{16\pi^2}\right) g_2$$

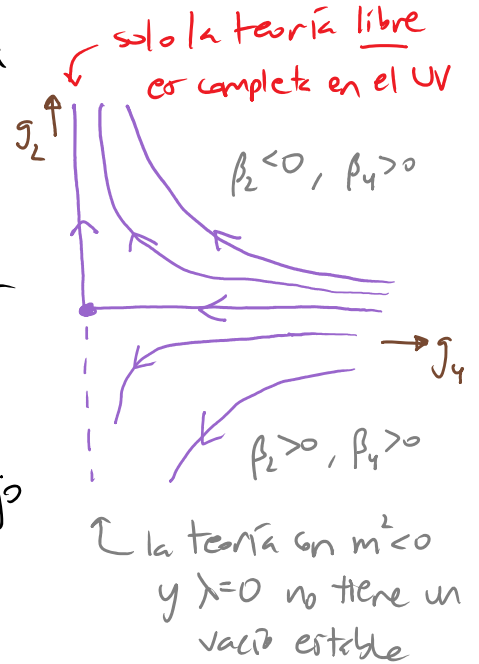
tasa de cambio de g_2 se vuelve más lenta

L29: 31/05/13 (rep 2 por favor)

Recordando que $\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2}$, los flujos

del grupo de renormalización lucen entonces (en la región perturbativa $g_4 \ll 1$) como en

el diagrama de la derecha. El único punto fijo es el trivial ($g_2=0, g_4=0$).



Ocorre algo interesante si examinamos esta misma teoría

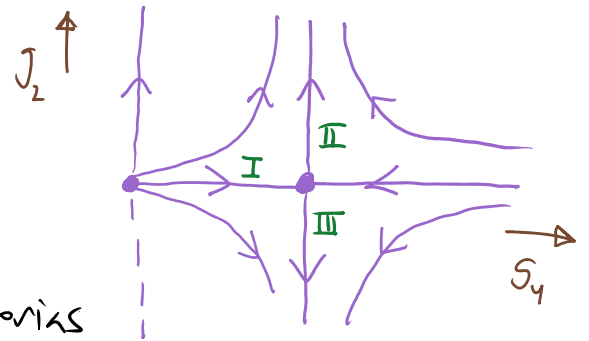
$$\int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right] \text{ en } d < 4, \text{ donde } D_\varphi = \frac{d}{2} - 1 \text{ y } D_\lambda = 4 - d,$$

así que $g_4 \equiv \lambda \mu^{d-4}$. En este caso, se encuentra que $D_{m^2} = 2 \forall d$

$$\beta_4 = \underbrace{(d-4)}_{< 0} g_4 + \underbrace{\frac{3g_4^2}{16\pi^2}}_{\text{cuántica}} + \mathcal{O}(g_4^3), \quad \beta_2 = \underbrace{\left(-2 + \frac{g_4}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g_4^2)\right)}_{\text{clásica}} g_2$$

clásica: g_4 relevante cuántica clásica cuántica

Vemos entonces que si $d=4-\epsilon$ con $0 < \epsilon \ll 1$, encontramos un punto fijo no trivial en $g_4^* = \frac{16\pi^2}{3} \epsilon$, $g_2^* = 0$, que está dentro de la región perturbativa y es por tanto confiable. Se le conoce como el punto fijo de Wilson-Fisher, y se sabe que existe también para $d=3$ y $d=2$ ($\epsilon=1$ y $\epsilon=2$). Los flujos del grupo de renormalización lucen ahora como en el diagrama de la derecha. Las trayectorias marcadas I, II y III son teorías interducentes completas en el UV (es posible retirar el corte, $\Lambda \rightarrow \infty$). La teoría I es además conforme en el IR (la II y III se vuelven vacías). Aunque por supuesto, si $\epsilon \ll 1$, no tendríamos claro qué significan estas teorías "en $d=4-\epsilon$ dimensiones" más allá de los diagramas de Feynman (en regularización dimensional).



El punto fijo de Wilson-Fisher (frecuentemente, en su generalización al caso de más de un campo escalar) juega un papel importante en mecánica estadística / materia condensada, en el estudio de transiciones de fase de segundo orden de muchos sistemas muy diferentes, como imanes, fluidos como el agua, el modelo de Ising, etc. [Ver, p.ej.,

Perkin sec. 12.5 y cap. 13, o Weinberg II sec. 18.5.] El hecho de que sistemas muy distintos en el UV pueden tener el mismo punto fijo IR se conoce como "universalidad".

Un punto importante es que en este esquema de renormalización, donde g_2 no aparece en las funciones beta de los g_n con $n \neq 2$, NO es posible ver explícitamente el desacoplamiento de las partículas con masas físicas $m_{\text{fir}} \gg \mu$ (p. 875). Lo mismo ocurre en cualquier otro "esquema independiente de masas", como p.ej. el esquema MS o $\overline{\text{MS}}$ dentro de la regularización dimensional. En estos casos, lo que se acostumbra hacer es implementar a mano el desacoplamiento: al cruzar el "umbral" de $\mu > m_{\text{fir}}$ a $\mu < m_{\text{fir}}$, la partícula en cuestión ya NO se toma en cuenta para el corrimiento de los acoplamientos. Esto es burdo, pero funciona.

Pasemos ahora a QED. Recordemos de las pp. 736, 779 que con regularización dimensional,

$$e^2 = z_3 \frac{z_2}{z_1} \mu^{d-4} e_0^2 = z_3 \mu^{-\epsilon} e_0^2, \text{ es decir, la renormalización del acoplamiento electromagnético se debe únicamente al rescalado del campo de norma, } A^\mu(x) \equiv A_0^\mu(x) / \sqrt{z_3}. \text{ Y en las pp. 794-795 vimos que}$$

lización del acoplamiento electromagnético se debe únicamente al rescalado del campo de norma, $A^\mu(x) \equiv A_0^\mu(x) / \sqrt{z_3}$. Y en las pp. 794-795 vimos que

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \mathcal{O}(e^4)$$

contiene δZ_3

$$= i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \Pi(p^2)$$

$$\text{con } \Pi(p^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x^2-x) \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2 + (x^2-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right) - \gamma \right] - \delta Z_3^{(1)}$$

polo: divergencia logarítmica

En el esquema MS (p.785, un esquema con escalas deslizante μ), elegimos $\delta Z_3^{(1)}$ para cancelar ni más ni menos que el polo $\propto \frac{1}{\epsilon}$,

$$\delta Z_3^{(1)} = \frac{e^2}{2\pi^2} \underbrace{\int_0^1 dx (x^2-x)}_{-1/6 \text{ p.795}} \frac{2}{\epsilon} = -\frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon},$$

$$\text{de modo que } Z_3 = 1 + \delta Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(e^4).$$

Para calcular β_e con un método realmente sistemático, notemos que $e_0 \stackrel{\text{p.834}}{=} \mu^{\epsilon/2} Z_3^{-1/2} e$ es independiente de μ ,

$$\Rightarrow \ln e_0 = \frac{\epsilon}{2} \ln \mu - \frac{1}{2} \ln Z_3 + \ln e \quad \text{también lo es.}$$

$\underbrace{\ln Z_3}_{\delta Z_3^{(1)} + \mathcal{O}(e^4)}$

Diferenciando con respecto a $\ln \mu$,

$$0 = \frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \delta Z_3}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \ln \mu} + \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial \ln \mu} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\partial e}{\partial \ln \mu} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \delta Z_3}{\partial e} + \frac{1}{e} \right)$$

$\frac{e}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(e^3)$

Sabemos que $\frac{\partial e}{\partial \ln \mu}$ es finita cuando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\text{i.e., } \frac{\partial e}{\partial \ln \mu} = \beta_e(e) + \epsilon B(e), \quad \text{con } \beta_e \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{\partial e}{\partial \mu} \Big|_{\epsilon, e_0, \mu_0}$$

Tenemos entonces $0 = \frac{\epsilon}{2} + (\beta_\epsilon + \epsilon B) \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right)$.

Empatando los coeficientes de orden ϵ ,

$$0 = \frac{1}{2} + B \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow B = -\frac{\epsilon}{2},$$

notar que $\frac{\partial \epsilon}{\partial \ln \mu} = \beta_\epsilon + \epsilon B + \epsilon^2 C$
 implica $C=0$, por los coef. $\mathcal{O}(\epsilon^2)$

y empatando los coeficientes de orden ϵ^0 ,

$$0 = \beta_\epsilon \frac{1}{\epsilon} + B \frac{\epsilon}{6\pi^2} \Rightarrow \boxed{\beta_\epsilon = -\frac{\epsilon^2}{6\pi^2} \quad B = \frac{\epsilon^3}{12\pi^2}}.$$

Por supuesto, los coeficientes de orden ϵ^{-1} y más altos también deben empatar; pero eso involucra al resultado a $L \geq 2$ lazo $\delta Z^{(L)} \sim \epsilon^{2L} \left(\frac{1}{\epsilon^L} + \frac{1}{\epsilon^{L-1}} + \dots + \frac{1}{\epsilon} \right)$.

Es fácil extender este cálculo a una teoría más general, con un acoplamiento λ no necesariamente adimensional, y sin limitarnos a orden de un lazo. De la p. 837, sabemos que la dimensión del acoplamiento de un λ_0 es

$$D = d - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{número de} \\ \text{derivadas}}}{2} - \sum_c n_c D_c = d \left(1 - \frac{n}{2}\right) + n - \sum_c n_c s_c,$$

$\uparrow \frac{d}{2} + s_c - 1$ $\uparrow \uparrow \equiv \sum_c n_c$ número total de patrones

y definiremos entonces su versión adimensional $g_0 \equiv \frac{\lambda_0}{\mu^D}$.

En regularización dimensional, tomamos $d = \underline{d} - \epsilon$, así que
 $\underline{d} = \underline{D} - \epsilon(1 - \frac{n}{2})$. El acoplamiento

renormalizado es $g \equiv \underbrace{Z_1^{p_1} Z_2^{p_2} Z_3^{p_3} \dots}_{\equiv Z} g_0 = Z \frac{\lambda_0}{\mu^{\underline{d}}}$,
↑ p.ej. 4
↑ usar $\bar{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\gamma/2} \mu$
 p. 785

donde nuevamente tendremos que, en el esquema MS o \overline{MS} ,

$$Z_i = 1 + \delta Z_i = 1 + \frac{Z_i^{[1]}(g)}{\epsilon} + \frac{Z_i^{[2]}(g)}{\epsilon^2} + \frac{Z_i^{[3]}(g)}{\epsilon^3} + \dots$$

↑ primera contribución proviene de 2 lazos
 ↓ primera contribución proviene de 1 lazo

De aquí se sigue que $\lambda_0 = \mu^{\underline{d}} Z^{-1} g$

$$\Rightarrow \ln \lambda_0 = \underline{d} \ln \mu - \ln Z + \ln g$$

$$\equiv \frac{J_{[1]}(g)}{\epsilon} + \frac{J_{[2]}(g)}{\epsilon^2} + \dots$$

con $J_{[1]}(g) = p_1 Z_1^{[1]}(g) + p_2 Z_2^{[1]}(g) + p_3 Z_3^{[1]}(g) + \dots$

Diferenciando $\ln \lambda_0$ con respecto a $\ln \mu$, tenemos

$$0 = \underline{d} - \frac{\partial \ln Z}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial \ln \mu} + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \ln \mu}$$

es decir,

$$0 = \underbrace{\underline{D} - \varepsilon \left(1 - \frac{n}{2}\right)}_{p.887} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial \ln M}}_{\beta_g + \varepsilon B, p.885} \left(\underbrace{-\frac{\partial \ln Z}{\partial g}}_{\frac{J'_{[11]}}{\varepsilon} + \frac{J'_{[22]}}{\varepsilon^2} + \dots, p.887} + \frac{1}{g} \right).$$

donde $J'_{[ij]} \equiv \frac{\partial}{\partial g} J_{[ij]}(g)$

Reordenando por potencias de ε , esto es

$$0 = \varepsilon \left(\left(\frac{n}{2} - 1\right) + \frac{B}{g} \right) + \varepsilon^0 \left(\underline{D} + \frac{\beta_g}{g} - B J'_{[11]} \right) + \varepsilon^{-1} \left(-\beta_g J'_{[11]} - B J'_{[22]} \right) + \dots,$$

de donde leemos que $B = -g \left(\frac{n}{2} - 1\right)$ y

$$\beta_g = -g \underline{D} + g B J'_{[11]} = -g \underline{D} - \left(\frac{n}{2} - 1\right) g^2 J'_{[11]}$$

dependencia de μ clásica,
por $[\lambda_0] = \underline{D}$

dependencia cuántica,
por lazo $\Rightarrow Z \neq 1$

Solo contribuye a β_g el coeficiente del polo simple (\leftrightarrow divergencia logarítmica) $J_{[11]}(g) = p_1 Z_1^{[11]}(g) + p_2 Z_2^{[11]}(g) + p_3 Z_3^{[11]}(g) + \dots$

así que podemos resumir

residuo (\equiv coef de $\frac{1}{\varepsilon}$)

$$\beta_g(g) = -g \underline{D} - \left(\frac{n}{2} - 1\right) g^2 \frac{\partial}{\partial g} [p_1 \text{Res } Z_1 + p_2 \text{Res } Z_2 + \dots].$$

En QED₄: $\underline{D} = 0$, $n = 3$, $p_3 = \frac{1}{2}$ y $\text{Res } Z_3 = -\frac{e^2}{6\pi^2} + \mathcal{O}(e^4)$, p.884 p.885

así que recuperamos la función beta de la p.886,

$$\beta_e = \frac{e^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e^5)$$

En términos de la constante de estructura fina $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$, la función beta es

$$\beta_\alpha \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \Big|_{\epsilon, \alpha_0, m_0} = \frac{e^4}{24\pi^3}, \text{ es decir, } \beta_\alpha = \frac{2\alpha^2}{3\pi} + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

$$= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) = \frac{e}{2\pi} \beta_e$$

Notando que esta expresión tiene exactamente la misma forma que la función beta para e^4 (p.856), $\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2}$, podemos de inmediato transcribir la solución (p.861)



$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_{\text{ref}})}{1 - \frac{2\alpha(\mu_{\text{ref}})}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}\right)} \equiv \frac{3\pi}{2 \ln(\mu_\infty/\mu)}$$

← por desacoplamiento (p.875),
 • usar solo para $\mu > m$

Aprendemos entonces que el acoplamiento electromagnético α (ó e) es marginamente irrelevante: crece con la energía, y, si pudiéramos confiar en el resultado a un lazo, sería divergente (tendría un polo de Landau) en $\mu_\infty \equiv \mu_{\text{ref}} \exp\left(\frac{3\pi}{2\alpha(\mu_{\text{ref}})}\right)$ (QED fue de hecho la teoría que analizó Landau). Lo que sí podemos decir es que **QED se vuelve fuertemente acoplada para $\mu \gtrsim \mu_\infty$** .

A falta de un punto fijo en el UV, concluimos que, justo como φ^4 , **¡¡ QED no existe (como teoría interactuante, $\alpha(\mu) \neq 0$, y a el límite continuo, $\Lambda \rightarrow \infty$) !!** En otros palabras, QED resulta ser, en última instancia,

no renormalizable, y debe considerarse en un corte explícito, $\Lambda \sim \mu_\infty$.

Tal como en φ^4 , este hecho No invalida los cálculos perturbativos que hemos hecho (con todo y renormalización) en este curso y el anterior;

solo restringe su rango de validez a escoger $\mu \ll \mu_\infty$. Dado que

en nuestro universo $\alpha(\mu_{\text{ref}}) \approx 1/137$ a $\mu_{\text{ref}} \approx (m_e)_{\text{frr}} \approx 0.5 \text{ MeV}$,

tenemos $\mu_\infty \equiv \mu_{\text{ref}} \exp\left(\frac{3\pi}{2\alpha(\mu_{\text{ref}})}\right) \approx 0.5 \text{ MeV} \exp(646) \approx 10^{280} \text{ MeV}$

$$\approx 10^{273} E_{\text{LHC}} \approx 10^{258} M_{\text{Planck}},$$

$\uparrow \sim 10 \text{ TeV}$
 $\uparrow \sim 10^{19} \text{ GeV}$

¡ así que los impresionantes acuerdos que se han encontrado entre QED perturbativa y los experimentos distan mucho de estar a riesgo!

Pero conceptualmente, sí es interesante saber que **QED no es una teoría completa en el UV**. Obviamente, en $\mu \sim M_{\text{Planck}} \ll \mu_\infty$ QED debe modificarse para incorporar efectos de gravedad cuántica, y mucho antes de eso, en $\mu \sim 10^2 \text{ GeV} \ll M_{\text{Planck}}$ sabemos que pasa a formar parte de la teoría electrodébil, $U(1)_{\text{EM}} \subset SU(2)_I \times U(1)_Y$, así que hay nuevos

efectos fríos que deben considerarse. La parte asociada al grupo $U(1)_Y$ (de "hipercarga débil") es una copia de QED, y por tanto tampoco es completa en el UV. Así que, incluso si fuera solo por esto y por φ^4 , ¡sabemos que el Modelo Estándar No puede ser la última palabra! ^{Higgs}

En los años 60 y principios de los 70 se tenía poca confianza en el lenguaje de teoría cuántica de campos. La razón más sofisticada era precisamente que se creía que en cualquier teoría de campos la función beta sería siempre positiva, como en φ^4 y en QED, dando lugar entonces a este mismo problema de trivialidad, de modo que en últimas instancias la teoría No estaría bien definida. David Gross, en particular, se propuso meter a todas las teorías de campos, estudiando caso por caso y mostrando sistemáticamente que $\beta > 0$. En 1973, cuando solo le quedaban por descartar las teorías de norma no abelianas, y se puso a hacer los cálculos correspondientes con su estudiante de doctorado Frank Wilczek, ¡descubrieron que en ese caso si es posible tener $\beta < 0$! David Politzer, estudiante de Sidney Coleman, descubrió lo mismo al mismo tiempo, de manera independiente (y también Gerard 't Hooft, un año antes; pero no publicó su resultado). Este fue el descubrimiento de la libertad asintótica,

que condujo de inmediato a la aceptación de QED como la descripción correcta de la interacción fuerte (y en ello, a la consolidación del Modelo Estándar), y derivó en el Premio Nobel para Gross, Politzer y Wilczek en 2004.

L30: 05/06/23 (3era repasa)

Los cálculos de dimensiones anómalas, y de la función beta de QED en un esquema distinto a MS o \overline{MS} , los dejaremos para la Tarea 17.

Una propiedad que es útil conocer es que, si bien la definición de los acoplamiento y campo renormalizados, y por tanto de las funciones β y γ en una teoría dada, dependen del esquema o prescripción de renormalización, hay unos cuantos aspectos que son independientes del esquema, básicamente aquellos que pueden tener consecuencias físicas:

- ① La existencia (aunque no la ubicación) de un punto fijo del grupo de renormalización (es decir, $\beta_g = 0$ en $g = g^*$ implica que $\beta_{\bar{g}} = 0$ en $\bar{g} = \bar{g}^*$).
- ② El valor de las dimensiones anómalas en un punto fijo, γ_c en $g = g^*$.
- ③ La derivada de la función β en un punto fijo, $\frac{\partial}{\partial g} \beta_g$ en $g = g^*$.
- ④ Los primeros 2 términos en la función β (coef. denotados b_0, b_1) [ver final de sec. 18.3 en Weinberg II], y el primer término en la función γ .

P.ej.

en QED $\beta_e = \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} + \mathcal{O}(e^7)$

independientes del esquema

dependen del esquema

en φ^4 $\beta_g = \frac{3g^2}{16\pi^2} - \frac{3g^3}{128\pi^4} + \mathcal{O}(g^4)$

L26: 22/05/19 L23: 16/11/17

Hasta ahora hemos discutido el grupo de renormalización desde la perspectiva de Callan y Symanzik (o Gell-Mann y Low), donde variamos la escala de renormalización μ , manteniendo el corte UV Λ fijo. Pero ya desde la p. 825 mencionamos que existe también el grupo de renormalización Wilsoniano, donde variamos Λ manteniendo μ fijo.

Desde la perspectiva de Wilson, toda teoría de campos está definida en un cierto corte Λ_{fir} que tiene significado físico, y especifica la región de validez de la teoría, $p < \Lambda_{\text{fir}}$. P.ej., para teorías que describen sistemas de materia condensada, $\Lambda_{\text{fir}} \lesssim 1/a$, donde a es la distancia interatómica, y para el Modelo Estándar, $\Lambda_{\text{fir}} \lesssim M_{\text{planc}}$. Nunca existe entonces verdaderas divergencias UV.

La pregunta central en este enfoque es cómo evolucionan los acoplamientos de orden $g_{i,0}(\Lambda)$ cuando Λ decrece. Sabemos que toda la información de la teoría está contenida en la función de partición (o funcional

generatriz) $Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp(iS + \int d^4x J\varphi)$. Pasando a espacio de momentos $\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(p)$ ($\prod_x d\varphi(x) = \prod_p d\tilde{\varphi}(p)$), haciendo una rotación de Wick a la versión euclídeana, e imponiendo el corte UV $p^2 \leq \Lambda^2$, esto es

$$Z[J]_{\Lambda} = \int_{p \leq \Lambda} \mathcal{D}\tilde{\varphi} \exp(-S_E), \text{ donde hemos incluido en } S_E \text{ al término}$$

↳ acción euclídeana

con la fuente J . Para que la física no cambie cuando variamos Λ , debe ser el caso entonces que la acción sí depende de Λ de una manera específica, tal que

↙ "ritmo" "E" de euclídeana

$$Z_{\Lambda} \equiv \int \mathcal{D}\tilde{\varphi}_{\Lambda} \exp(-S_{\Lambda}) = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi}_{\Lambda'} \exp(-S_{\Lambda'}) \equiv Z_{\Lambda'}$$

Esto es la ecuación básica del grupo de renormalización Wilsoniano, y es análoga a la ecuación que en el enfoque de Callan-Symanzik escribimos (a nivel de correlador en lugar de Z) en la p. 850. La acción S_{Λ} se conoce como la acción efectiva (Wilsoniana). Está relacionada con, pero es en general distinta a, la acción efectiva LP1, Γ , de la Tarea 16: S_{Λ} define una teoría cuántica (con corte Λ), ^{↙ incluye lazos} mientras que Γ es "clásica" en el sentido de usarse solo a nivel árbol.

Para analizar explícitamente el efecto de disminuir el corte UV de Λ a $\Lambda' < \Lambda$, conviene adaptar una notación que distinga entre



los modos de Fourier $\tilde{\varphi}(p)$ que son "pesados" o "UV", con $\Lambda' \leq p < \Lambda$,

y aquellos que son "ligeros" o "IR", con $p < \Lambda'$. Denotaremos

$$\tilde{\Phi}(p) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(p) & \text{si } \Lambda' \leq p < \Lambda \\ 0 & \text{si } p < \Lambda' \end{cases}, \quad \tilde{\phi}(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Lambda' \leq p < \Lambda \\ \tilde{\varphi}(p) & \text{si } p < \Lambda' \end{cases},$$

de modo que podemos escribir $\tilde{\varphi}(p) = \tilde{\Phi}(p) + \tilde{\phi}(p)$, y también

$\varphi(x) = \Phi(x) + \phi(x)$ para los correspondientes transformados de Fourier.

Vemos entonces que la exigencia de que

$$\int \mathcal{D}\tilde{\varphi}_{\Lambda'} e^{-S_{\Lambda'}} = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi}_{\Lambda} e^{-S_{\Lambda}}$$

equivale a

$$\int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-S_{\Lambda'}} = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \mathcal{D}\tilde{\Phi} e^{-S_{\Lambda}},$$

es decir,

$$\boxed{e^{-S_{\Lambda'}} \equiv \int \mathcal{D}\tilde{\Phi} e^{-S_{\Lambda}}}$$

"Integramos para sacar" los $\tilde{\Phi}$
(en inglés, "integrate out")

Esta fórmula nos da en principio un método para calcular la acción efectiva wilsoniana en una teoría genérica. En la práctica, por supuesto, solo podemos hacer explícitamente los cálculos si la teoría es débilmente acoplada.

Para ser concreto, digamos que la acción efectiva inicial, que define la teoría a la escala del corte Λ , es

$$S_{\Lambda}[\varphi] = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right).$$

signos apropiados para acción euclídea
 $e^{-S_{\Lambda}}$

En términos de nuestra notación de secciones y capitulos anteriores en este curso, todas las cantidades aquí deberían llevar un subíndice "0", porque son denudos (asociados a la escala del corte Λ); pero por brevedad lo omitiremos.

Resulta natural definir como antes acoplamiento adimensional, solo que ahora la escala energética que tenemos a nuestra disposición para hacerlo es Λ en lugar de μ :

$$g_2(\Lambda) \equiv m^2 \Lambda^{-2}, \quad g_4(\Lambda) \equiv \lambda \Lambda^{d-4},$$

donde queda sobreentendido que $m^2 = m^2(\Lambda)$ y $\lambda = \lambda(\Lambda)$ (y, de nuevo, los acoplamientos en los que estamos trabajando aquí son denudos, $g_i = g_{i,0}$.)

Usando $\varphi = \phi + \Phi$, podemos escribir

$$\begin{aligned} S_{\Lambda}[\varphi] &= \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi + \partial_{\mu} \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 (\phi + \Phi)^2 + \frac{\lambda}{4!} (\phi + \Phi)^4 \right\} \\ &= S_{\Lambda}[\phi] + \int d^d x \left\{ \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \Phi + m^2 \phi \Phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi^3 \Phi + \frac{1}{4} \phi^2 \Phi^2 + \frac{1}{6} \phi \Phi^3 + \frac{1}{4!} \Phi^4 \right) \right\} \end{aligned}$$

$\phi^4 + 4\phi^3\Phi + 6\phi^2\Phi^2 + 4\phi\Phi^3 + \Phi^4$

Dado que $\int \int^2 x \phi(x) \Phi(x) = \int \frac{\int^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\int^2 k}{(2\pi)^2} \int \int^2 x \overbrace{e^{i(p+k)\cdot x}}^{(2\pi)^2 \delta^{(2)}(p+k)} \tilde{\phi}(p) \tilde{\Phi}(k) = 0$
 porque $\tilde{\phi}(p^0) \tilde{\Phi}(-p^0) = 0$ (los modos pesado y ligero no tienen ningún traspase en espacio de momento), y similarmente

$$\int \int^2 x \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \Phi(x) = \int \frac{\int^2 p}{(2\pi)^2} (ip_\mu \tilde{\phi}(p)) (-ip^\mu \tilde{\Phi}(-p)) = 0,$$

los 2 términos en el primer renglón dentro de las llaves en S_Λ se anulan, y tenemos

$$S_\Lambda[\varphi] = S_\Lambda[\phi] + \int \int^2 x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi^3 \Phi + \frac{1}{4} \phi^2 \Phi^2 + \frac{1}{6} \phi \Phi^3 + \frac{1}{4!} \Phi^4 \right) \right\} \\ \equiv S_{uv, \text{in}}[\phi, \Phi]$$

Para obtener la acción efectiva a escala Λ' , debemos (p. 895) calcular la integral funcional sobre Φ , pesada con $S_\Lambda[\varphi]$:

$$e^{-S_{\Lambda'}[\phi]} \equiv \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_\Lambda[\phi+\Phi]} \underset{\substack{? \\ \text{p. 896}}}{=} e^{-S_\Lambda[\phi]} \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_{uv, \text{in}}[\phi, \Phi]}.$$

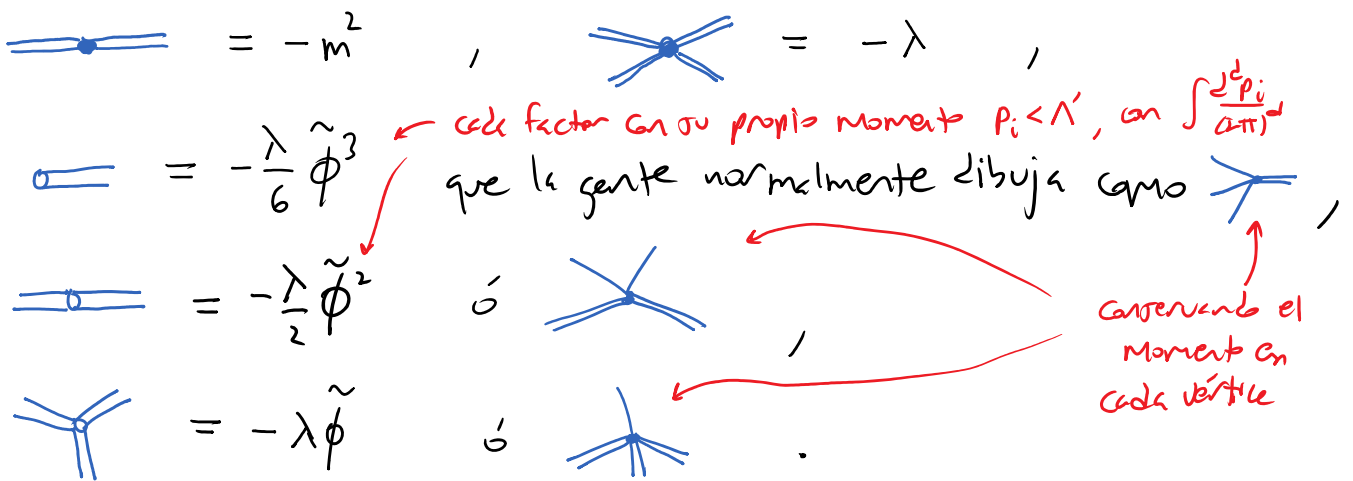
Sabemos muy bien cómo hacer esta integral de forma perturbativa (pp. 559-569 y 404-418, especialmente 413-415): el resultado estará dado por la exponencial de la suma de todas las 'burbujas de vacío' (diagramas sin patas externas) que pueden dibujarse con las reglas de Feynman deducidas a partir de la acción $S_{uv, \text{in}}[\phi, \Phi]$, donde $\Phi(x)$ se toma como el campo que

estamos cuantizando (pues es sobre él que integrar funcionalmente),
 y $\phi(x)$ es simplemente un campo clásico con un perfil fijo, que
 figura en las constantes de acoplamiento (dependientes ahora de x).

Como estamos mayormente interesados en el caso con $m \ll \Lambda' < \Lambda$,
 trataremos incluso al término de masa ($\propto g_2 \ll 1$) de forma
 perturbativa. A partir de los términos de interacción en la acción,

$$S_{w, \text{int}}^{\text{int}} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi^3 \Phi + \frac{1}{4} \phi^2 \Phi^2 + \frac{1}{6} \phi \Phi^3 + \frac{1}{4!} \Phi^4 \right) \right\},$$



y denotando con una línea doble a Φ , las reglas de Feynman
 para los vértices a espacio de momentos son




El propagador se obtiene de $\int d^2x \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2$, tomando en cuenta la

restricción del momento:

$$\text{---} = \frac{1}{p^2} \Theta(p; \Lambda', \Lambda) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } \Lambda' \leq p < \Lambda \\ 0 & \text{si no} \end{cases} .$$

Un ejemplo de una burbuja de vacío es  (ó ) ,
que podemos determinar explícitamente:

factor de simetría, p.418


$$p \equiv p_1 + p_2 \quad p_3 + p_4 = p \quad p_1 + p_2 = p_3$$


$$= \frac{1}{2^2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_3}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) \tilde{\phi}(p_3) \tilde{\phi}(p_4) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+p)^2}$$

$\Lambda' \leq k < \Lambda$

este lado dará un resultado finito

o desarrollando en Taylor en potencias de $p_i < k$,



$$= \frac{\lambda^2}{16} \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_3}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) \tilde{\phi}(p_3) \tilde{\phi}(p_4) \left\{ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^4} + \mathcal{O}(p_i^2) \right\}$$


$\Lambda' \leq k < \Lambda$

$$= \frac{\lambda^2}{16} \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_3}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) \tilde{\phi}(p_3) \tilde{\phi}(p_4) \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\Omega_{d-1} \int_{\Lambda'}^{\Lambda} \frac{k^{d-1} dk}{k^4}$$

p.781 $\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{k^{d-4}}{d-4} \Big|_{\Lambda'}^{\Lambda}$

De vuelta en espacio de posiciones, esto es

factorizar, por conveniencia



$$= \frac{1}{4!} \int d^d x \phi^4(x) \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{\Lambda^{d-4} - \Lambda'^{d-4}}{d-4} \right) \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{1}{4!} \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right) \int d^d x \phi^4$$

$\approx 1 + (d-4) \ln \Lambda$

$$\text{En } \exp(-S_{\Lambda'}[\phi]) = \underbrace{\exp(-S_{\Lambda}[\phi])}_{\text{factor}} \underbrace{\int d\Phi \exp(-S_{uv,IR}[\Phi, \phi])}_{\text{factor}}$$

$$\exp\left(-\int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right\}\right) \exp\left(\text{Diagram} + \text{otros burbujas de vacío}\right)$$



este diagrama tiene el efecto de cambiar el acoplamiento asintótico,

$$S_{\Lambda'}[\phi] \supset \int d^d x \left\{ \frac{\lambda'}{4!} \phi^4 \right\} \quad \text{con} \quad \lambda' \equiv \lambda(\Lambda) + \Delta\lambda(\Lambda, \Lambda')$$

dando nuestro resultado determinando explícitamente $\Delta\lambda$:



$$\Delta\lambda = -\frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{\Lambda^{d-4} - \Lambda'^{d-4}}{d-4} \right) \quad \text{en } d \text{ arbitraria,}$$

$$\Delta\lambda = -\frac{3\lambda(\Lambda)^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right) \quad \text{en } d=4.$$

Para ser más precisos, este es el efecto del diagrama  (o ) cuando apenas tomamos en cuenta la parte de orden cero en p_i^{ω} . Los términos sucesivos darán contribuciones a $S_{\Lambda'}$ que involucren a $\tilde{\phi}(p_1)\tilde{\phi}(p_2)\tilde{\phi}(p_3)\tilde{\phi}(p_4)$ multiplicados por potencias de p_i^{ω} , lo cual se traduce en espacios de posiciones a términos con derivadas de los 4 campos ligeros $\phi(x)$, como p.ej. $\int d^d x \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi \phi^2$.

Este tipo de términos se genera a pesar de que **NO** estaban presentes en S_{Λ} . Y además de términos con más derivadas, tendremos

términos con potencias más altas de $\phi(x)$. P.ej. el diagrama

 (o ) contribuye a $S_{\Lambda'}$ un término $\propto \int d^d x \phi^6(x)$ y otros términos con derivadas de estos 6 $\phi(x)$.

Vemos entonces que la acción efectiva a escala Λ' toma la forma