

$g_4 \equiv \lambda$ es marginally irrelevante (p. 840).

Más explícitamente, la solución exacta de la ecuación de flujo

$$\mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} = \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \iff \frac{dg_4}{g_4^2} = \frac{3d\mu}{16\pi^2\mu} \iff \int \frac{dg_4}{g_4^2} = \int \frac{3d\mu}{16\pi^2\mu}$$

es

$$g_4(\mu) = \frac{g_4(\mu_{\text{ref}})}{1 - \frac{3g_4(\mu_{\text{ref}})}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}\right)}$$

← con μ_{ref} una escala arbitraria de referencia (= cte. de integración = dato inicial)

como es fácil verificar:

$$\mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} = \frac{-\cancel{\mu} g_4(\mu_{\text{ref}}) \left(-\frac{3g_4(\mu_{\text{ref}})}{16\pi^2\cancel{\mu}}\right)}{\left(1 - \frac{3g_4(\mu_{\text{ref}})}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}\right)\right)^2} = \frac{3g_4^2(\mu)}{16\pi^2} \quad \checkmark$$

Si no creemos literalmente este resultado, vemos que no solo ocurre que g_4 crece con la energía (decrece con el flujo de renormalización), sino que de hecho diverge a la escala a la cual se hace cero el denominador, $\mu_0 \equiv \mu_{\text{ref}} \exp\left(\frac{16\pi^2}{3g_4(\mu_{\text{ref}})}\right)$, divergencia conocida como el polo de Landau (¿y Pomerenchuk?).

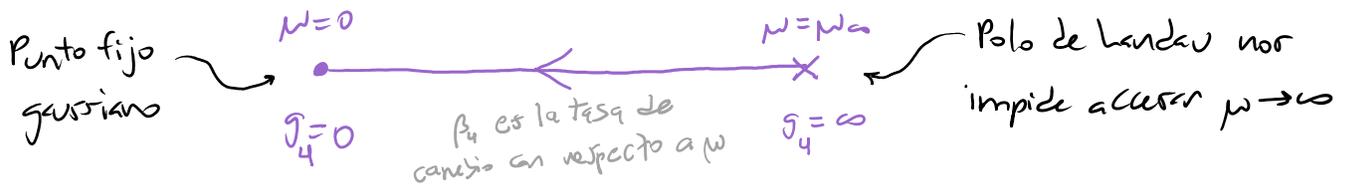
Con esta definición, podemos reescribir

$$g_4(\mu) = \frac{16\pi^2}{3 \ln(\mu_0/\mu)}, \quad \text{donde la divergencia es más evidente.}$$

← aquí μ_0 juega el papel de cte. de integración; pero a diferencia de μ_{ref} , es una escala intrínseca de la teoría

$$g_4(\mu) = \frac{16\pi^2}{3 \ln(\mu_0/\mu)}$$

El diagrama del flujo sería entonces:



Por supuesto, la expansión perturbativa se vuelve inválida cuando $g_4 \sim 1$, no digamos $g_4 = \infty$, así que NO podemos confiar en nuestro resultado a 1 lazo,

$$g_4(\mu) \approx \frac{g_4(\mu_{ref})}{1 - \frac{3g_4(\mu_{ref})}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{ref}}\right)}$$

← válido si $g_4(\mu) \ll 1$
(aún si $g_4(\mu_{ref}) \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{ref}}\right) \sim 1$)

para predecir la existencia del polo de Landau.

Lo que podemos decir es que, aún si $g_4(\mu_{ref}) \ll 1$, $g_4(\mu)$ parece crecer sin límite conforme μ aumenta, predicando una

región de acoplamiento fuerte para $\mu \gtrsim \mu_0$. Es interesante notar

L23: 08/05/19

que, a pesar de que a nivel clásico nuestro teoría en el caso no masivo,

$g_2 = 0$, no tenía ninguna escala intrínseca m_{fir} (era invariante de escala),
 y conforme

a nivel cuántico el hecho de que g_4 corre con μ implica el surgimiento

de la escala intrínseca μ_0 . Este fenómeno se llama transmutación

dimensional: a partir del parámetro adimensional g_4 obtenemos μ_0 ,
 bajo reescalamiento

en dimensión de masa (viola simetría: ejemplo de una "anomalía").

$$\mu_\infty \equiv \mu_{\text{ref}} \exp\left(\frac{16\pi^2}{3g_4(\mu_{\text{ref}})}\right)$$

A falta de otros escolos para comparar, distintos valores de μ_∞ (\leftrightarrow elecciones g_4) describen no diferentes teorías, sino diferentes elecciones de unidades. (Lo mismo tendríamos en la p. 830 para un solo campo libre con masa m.)

[27/05/23]

En principio, podría ocurrir que en la región de acoplamiento fuerte el flujo proviniera de un punto fijo UV, $g_4(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} g_4^* < \infty$; pero evidencia numérica apunta a que en $d=4$ esto NO ocurre, de modo que la teoría ϕ^4 NO está bien definida a altas energías (\leftrightarrow NO es "completa" en el UV). Si insistimos

en tener $g_4(\mu_{\text{ref}}) > 0$ a algunos escolos finitos μ_{ref} , entonces para evitar que $g_4(\mu)$ explote tendremos que considerar la teoría con un carate físico Λ , que limite $\mu \leq \Lambda$ (posiblemente $\Lambda \sim \mu_\infty$). Si, por el contrario, queremos ser capaces de retirar el carate, teniendo $g_4(\infty) < \infty$, entonces tendremos $g_4(\mu_{\text{ref}}) = 0$ para cualquier μ_{ref} finito. Esta conclusión se conoce como "trivialidad": en $d=4$, NO existe la teoría ϕ^4 interactuante ($g_4(\mu) \neq 0$ para $\mu < \infty$) en el límite continuo ($\Lambda \rightarrow \infty$).

Todo lo anterior fue consecuencia de que el acoplamiento g_4 resultó ser marginalmente irrelevante, es decir, las correcciones cuánticas lo hicieron dejar de ser marginal y pasar a ser irrelevante, decreciendo lentamente con el flujo de renormalización, o lo que es lo

mismo, crecer lentamente con la energía. Recordando (de la p. 838) que irrelevante es sinónimo de no renormalizable, lo que hemos visto se traduce en que, si bien la teoría ϕ^4 es (estrictamente) renormalizable por conteo de potencias, por efecto de los lazos (y no perturbativamente) resulta ser no renormalizable.

Evidentemente, la situación será análoga para cualquier teoría marginalmente irrelevante, o peor aún, irrelevante, es decir, para cualquier teoría que (por efectos cuánticos o directamente por conteo de potencias) sea no renormalizable. Este tipo de interacciones se vuelven despreciables a bajas energías; pero, a menos de que provengan de un punto fijo UV (es decir, a menos de que los $g_i(\mu)$ dejen de crecer), implican que la teoría no está bien definida a energías arbitrariamente altas, sino que debe considerarse en un conteo UV explícito $\Lambda < \infty$.

El verdadero problema con las teorías no renormalizables no es entonces el hecho de que en cada orden sucesivo de la expansión perturbativa den lugar a nuevas divergencias, que requieren más y más contraterminos, sino que, a menos que los efectos de acoplamiento fuerte (normalmente fuera de nuestro escrutinio) generen un punto fijo UV,

NO están bien definidas en el límite continuo $\Lambda \rightarrow \infty$; no son "completas en el UV". Pero SÍ tienen sentido con un $\Lambda < \infty$.

Para tener este tema mejor ubicado, conviene listar los diferentes comportamientos posibles en una teoría de campos. Imaginemos que por alguna mágica razón conociéramos la función beta exacta para algún acoplamiento, $\beta(g)$. Opciones para la forma de esta función son:

a) Si $\beta(g)$ es ^{$g(\mu)$ creciente} positiva y creciente, y

$$\int_{g(\mu)}^{\infty} \frac{dg'}{\beta(g')} \equiv \ln\left(\frac{\mu_{\infty}}{\mu}\right) < \infty,$$

$\uparrow \equiv 25'/24\mu\mu'$

entonces tenemos una singularidad a energía finita (polo de Landau):

$g(\mu) \rightarrow \infty$ en $\mu = \mu_{\infty} < \infty$, justo como en ϕ^4 a un lado.

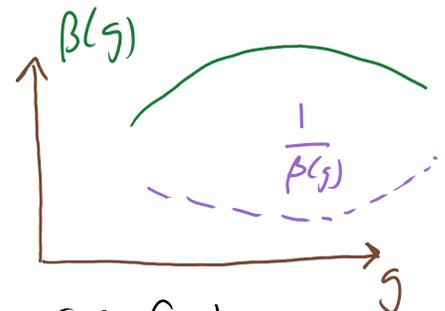
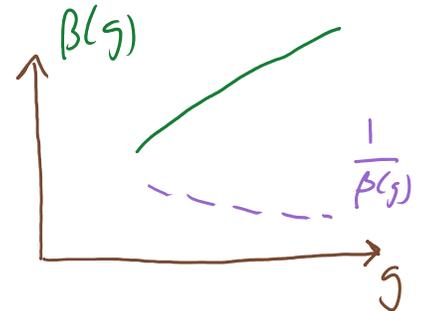
b) Si $\beta(g)$ es ^{$g(\mu)$ creciente} positiva; pero

$$\int_{g(\mu)}^{\infty} \frac{dg'}{\beta(g')} \equiv \ln\left(\frac{\mu_{\infty}}{\mu}\right) = \infty,$$

entonces tenemos una singularidad a energía infinita:

$g(\mu) \rightarrow \infty$ en $\mu \rightarrow \infty$.

En los casos a) y b) la teoría NO es completa en el UV.

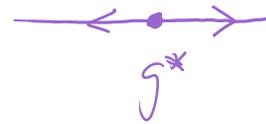
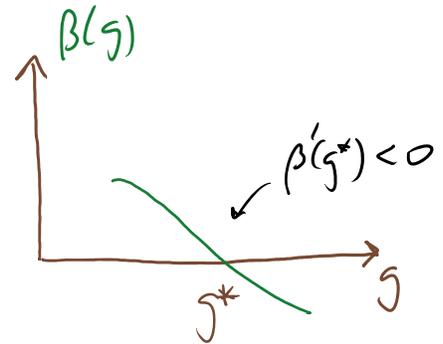


c) Si $\beta(g)$ inicia positiva; pero cruza cero en algún valor $g=g^*$, $\beta(g^*)=0$, entonces g^* es un

punto fijo estable (o atractivo) en el UV

(punto fijo UV) : $g(\mu) \rightarrow g^*$

cundo $\mu \rightarrow \infty$, ya sea desde $g < g^*$ (donde $\beta > 0$, indicando que $g(\mu)$ es creciente) o desde $g > g^*$ (donde $\beta < 0$, indicando que $g(\mu)$ es decreciente). La teoría sí es entonces completa, o "asintóticamente segura", en el UV, donde se vuelve conforme, y es interactuante.

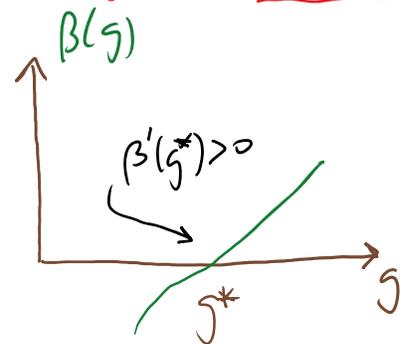


d) Si $\beta(g)$ inicia negativa; pero cruza cero en algún valor $g=g^*$, $\beta(g^*)=0$, entonces g^* es un

punto fijo estable (o atractivo) en el IR

(punto fijo IR) : $g(\mu) \rightarrow g^*$

cundo $\mu \rightarrow 0$, ya sea desde $g < g^*$ (donde $\beta < 0$, indicando que $g(\mu)$ crece conforme μ decrece) o desde $g > g^*$ (donde $\beta > 0$, indicando que $g(\mu)$ decrece al disminuir μ). El UV es inerte.



e) Si $\beta(g) < 0$ y cruza cero en $g^* = 0$

(o sea decir, $g=0$ es un punto fijo UV)

entonces la teoría es asintóticamente

libre: $g(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0$. La teoría

SI es entonces completa en el UV,

donde se vuelve conforme y libre. ¡Entendendemonos bien su definición!

(En el IR, podríamos tener $g(\mu) \rightarrow \infty$ a $\mu_0 \leq \infty$ análogamente a los casos a) y b), o aproximarnos a otro punto fijo, como en d).)

f) Si $\beta(g) > 0$ y cruza cero en $g^* = 0$

(o sea decir, $g=0$ es un punto fijo IR)

entonces la teoría es libre en el IR

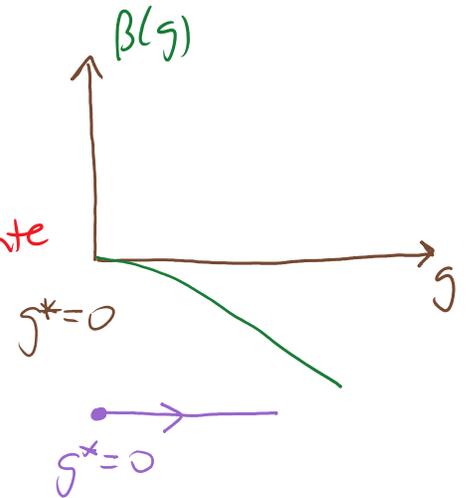
(en inglés, "IR free"):

$g(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0$ (tal como φ^4 en $m=0$).

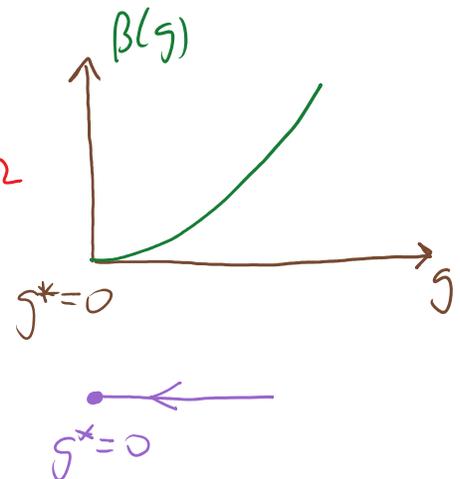
(En el UV, podríamos tener $g(\mu) \rightarrow \infty$

a $\mu_0 \leq \infty$, como en los casos a) y b), o aproximarnos a otro punto fijo, como en c).)

← límite $g^* \rightarrow 0$ del caso c)



← límite $g^* \rightarrow 0$ del caso d)



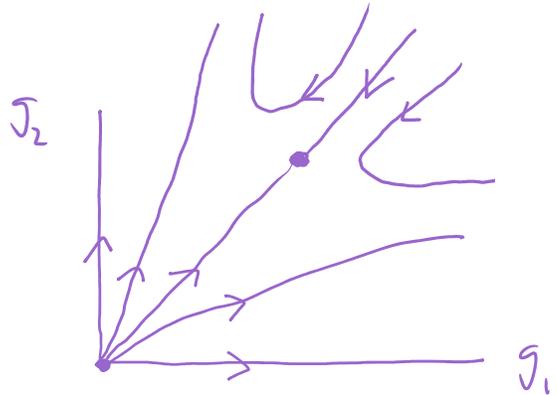
Por supuesto, cuando hay más de un acoplamiento, g_i ,

debe ocurrir que todo los $\beta_i(g_1^*, g_2^*, \dots) = 0$ para tener un punto fijo. P.ej., en una teoría con

2 acoplamientos y

$$\beta_1(g_1, g_2) = -g_1 + g_1 g_2,$$

$$\beta_2(g_1, g_2) = -g_2 + g_1 g_2,$$



tenemos 2 puntos fijos: uno gaussiano ($g_1 = g_2 = 0$), atractivo en el UV, y uno fuertemente acoplado ($g_1 = g_2 = 1$), atractivo en el IR. El flujo que intercala entre ambos denota una teoría que está bien definida a todo las energías.

En cualquier teoría, en la vecindad de un punto fijo g_i^* ($\beta_i(g_i^*) = 0$), es decir, $S = S_{g^*} + \int d^d x \delta g_j \tilde{O}_j(x)$, siempre podemos linearizar el flujo:

$$\beta_i(g^* + \delta g) = \omega \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g^* + \delta g} = A_{ij} \delta g_j + \mathcal{O}(\delta g_j^2).$$

CFI \nearrow \nwarrow det. (dependen de g_j^*)

Eligiendo una base para las fluctuaciones $\check{\delta} g_j \equiv C_{jk} \delta g_k$ que diagonalice a la matriz A_{ij} , esto es $\underbrace{\text{eigenvalor } a_i}_{\text{dimensión de } \check{\delta} g_j}$

$$\omega \left. \frac{\partial \check{\beta}_i}{\partial \check{g}_j} \right|_{\check{g}^* + \check{\delta} g_j} = (\Delta_i - d) \check{\delta} g_j + \mathcal{O}(\check{\delta} g_j^2) \Rightarrow \check{\delta} g_j(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega'} \right) \check{\delta} g_j(\omega'),$$

\nwarrow dimensión clásica de \check{O}_i $\int d^d x \check{\delta} g_j \check{O}_i$ cf. p. 153

donde $\Delta_i \equiv D_i - \gamma_i$ es la dimensión de escalamiento (o conforme) de $\check{O}_i(x)$.

Las Δ_i están entonces bien definidas en torno a un punto fijo

Dado ($\Delta_i = D_i$ en caso gaussiano), y $\Delta_i - d \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0$ indica $\tilde{\sigma}_i$ relevante
marginal -
irrelevante

20:07/11/17

↖ puede ser distinta para diferentes g^*

En cualquier teoría dada, si uno conoce las funciones β y γ , a partir de la ecuación de Callen-Symanzik se pueden hacer alguna inferencia sobre el comportamiento de los corretores. Siguiendo con el ejemplo de la teoría ϕ^4 no masiva, por análisis dimensional podemos escribir el propagador renormalizado en la forma

$$\tilde{G}_2(p^2) = \frac{i}{p^2} f(-p^2/\mu^2, g_4(\mu)) = -\frac{i}{|p|^2} f(|p|^2/\mu^2),$$

donde incluimos el signo menos ^{↖ omitir por ahora} porque nuevamente consideraremos momentos tipo espacio, $p^2 < 0$, y denotamos $|p| \equiv \sqrt{-p^2}$. En esta forma vemos que

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{G}_2(p^2) = -\mu \frac{i}{|p|^2} f'(|p|^2/\mu^2) \left(-\frac{2|p|^2}{\mu^2}\right) = \frac{2i}{\mu^2} f'(|p|^2/\mu^2)$$

$$y \quad |p| \frac{\partial}{\partial |p|} \tilde{G}_2(p^2) = \underbrace{+|p| \frac{2i}{|p|^3} f'(|p|^2/\mu^2)}_{-2\tilde{G}_2(p^2)} - \underbrace{|p| \frac{i}{|p|^2} f'(|p|^2/\mu^2) \frac{2|p|}{\mu^2}}_{\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{G}_2(p^2)},$$

de modo que podemos reescribir la ec. de Callen-Symanzik (p. 852)

seguir restringiendo al caso no masivo, $g_2=0$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + 2\gamma_\varphi \right) \tilde{G}_2(p^2, g_4(\mu), \mu) = 0$$

en la forma (más cercana a lo que en realidad escribirían Callan y Symanzik)

$$\left(-|p| \frac{\partial}{\partial |p|} + \beta_4(g_4) \frac{\partial}{\partial g_4} - 2 + 2\gamma_\varphi(g_4) \right) \tilde{G}_2(p^2, g_4(\mu), \mu) = 0,$$

que nos informa sobre la dependencia de p a μ fija.

En el caso libre $\beta_4=0=\gamma_\varphi$, y la ecuación implica correctamente que $\tilde{G}_2 = -\frac{i}{|p|^2} = \frac{i}{p^2}$. En el caso interactuante, puede encontrarse la

solución exacta en términos de un acoplamiento que corre con

el momento $|p|$, $\bar{g}_4(|p|, g_4(\mu))$, de acuerdo con

$$|p| \frac{\partial}{\partial |p|} \bar{g}_4 = \beta_4(\bar{g}_4), \quad \bar{g}_4(|p|=\mu, g_4(\mu)) = g_4(\mu).$$

Esta relación, llamada a veces LA ecuación del grupo de renormalización, simplemente quiere decir que utilizamos la ecuación que define a β_4 (p.851) para evolucionar g_4 desde la escala μ hasta la escala $|p|$:



Si tenemos ya $g_4(\mu)$ para μ arbitraria, entonces $\bar{g}_4 = g_4(\mu=|p|)$. P.ej.

en φ^4 sin masa $\bar{g}_4(|p|, g_4(\mu)) \approx \frac{g_4(\mu)}{1 - \frac{3g_4(\mu)}{16\pi^2} \ln\left(\frac{|p|}{\mu}\right)}$ (cf. $\alpha_{ef}(T^2)$ en p.758)

Con esta definición, la solución a Callen-Tymenzik [ver p.ej. Perkin sec. 12.3] toma la forma

escala integrals
entre μ y $|p|$

$$\tilde{G}_2(p^2, g_4(\mu), \mu) = \frac{i}{p^2} \mathcal{Y}_2(\bar{g}_4(|p|, g_4)) \exp \left[2 \int_0^{\ln(|p|/\mu)} dt \chi_4(\bar{g}_4(\mu e^t, g_4)) \right]$$

propagador libre
(unidades correctas)

efecto integral del renormalizado
de $\tilde{\varphi}(p)\tilde{\varphi}(-p)$ por el cambio en Z

L29: 13/05/19

Este resultado sigue siendo no perturbativo. \mathcal{Y}_2 aquí es todavía una función arbitraria, que quedaría por determinar; pero el punto importante es que solo depende de $|p|$ a través del acoplamiento corriente $\bar{g}_4(|p|)$.

El mismo análisis se puede aplicar a otros correladores, si consideramos que todos sus argumentos p_n dependen de UNA misma escala de momento. P.ej., para la función de 4 puntos con $p_n^2 = -|p|^2$ y $s, t, u \sim -|p|^2$, se obtiene

$$\tilde{G}_4(|p|, g_4) = \left(\frac{-i}{|p|^2} \right)^4 \mathcal{Y}_4(\bar{g}_4(|p|, g_4)) \exp \left[4 \int_0^{\ln(|p|/\mu)} dt \chi_4(\bar{g}_4(\mu e^t, g_4)) \right],$$

donde nuevamente la cantidad importante es el acoplamiento corriente $\bar{g}_4(|p|)$.

Si disminuimos $|p|$ hasta coincidir con μ , el exponencial se hace 1

y $\bar{g}_4 = g_4$, así que $\tilde{G}_2(l|\mu, g_4) = \frac{i}{p^2} \gamma_2(g_4)$ y $\tilde{G}_4(l|\mu, g_4) = \frac{1}{p^8} \gamma_4(g_4)$.

Estos resultados deben coincidir con los que podremos obtener usando la expansión perturbativa en potencias de g_4 , así que de la comparación podremos deducir las funciones $\gamma_2(g_4)$ y $\gamma_4(g_4)$. Lo que aprendemos gracias al grupo de renormalización es que, para conocer los correladores a otra escala l (más alta o más baja que μ), basta con evaluar estas mismas funciones γ_2 y γ_4 en el valor apropiado del acoplamiento corriente, $\bar{g}_4(l|\mu, g_4(\mu)) = g_4(\mu=l)$. Esto confirmamos lo que en la p. 845 habíamos dicho solo de manera más esquemática: que en verdad

es $g_4(l)$ el acoplamiento de interés físico a la escala experimental l .
L28 = 29/05/23 (verificación 1 por física)

No es muy difícil extender nuestros resultados de la teoría ϕ^4 al caso con masa. En la p. 848 vimos que

$$\delta m_{(1)}^2 = -\frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \right]$$

es decir

$$m_0^2 = \frac{m^2 + \delta m_{(1)}^2}{z \rightarrow 1} = m^2 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \right].$$

OJO: $\delta m_{(1)}^2 \neq 0$ incluso si $m^2 = 0$
(renormalización aditiva y no solo multiplicativa)

Lo primero que debemos notar aquí es que la dependencia de m^2 es un poco complicada: no está escrita como una serie de potencias

en m^2 o $g_2 \equiv m^2/\mu^2$. La razón es clara: el acoplamiento m^2 está asociado a un término acuértico, es decir, libre, y tenemos la costumbre de incorporarlo de manera exacta en el propagador. Después de separar el lagrangiano de modo (p.649) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{ct}$, con $\mathcal{L}_{ren} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$, tratamos a φ^2 no como una interacción, sino como parte del propagador libre $\frac{i}{p^2 - m^2}$, y en el esquema de renormalización que elegimos en la p.848, el significado de m^2 es que $\tilde{\Gamma}_2(p^2) \Big|_{p^2 = -\mu^2} = 0$, que (junto con $\frac{d}{dp^2} \tilde{\Gamma}_2(p^2) \Big|_{p^2 = -\mu^2} = 0$) equivale a pedir que $\tilde{G}_2(p^2 = -\mu^2) = \frac{i}{p^2 - m^2}$.

Dentro de este esquema, si al orden más bajo invertir la relación entre m_0^2 y m^2 escrita en la página anterior obtendremos

$$m^2 = m_0^2 + \frac{\lambda_0}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m_0^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2} + 1 \right) \right].$$

diferencia con λ es de $\mathcal{O}(\lambda_0^2)$
 diferencia con m^2 es de $\mathcal{O}(\lambda_0)$

A este orden, la función beta para el acoplamiento de masa es por tanto simplemente

$$\beta_2 \equiv \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, m_0, \lambda_0} \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \Big|_{\Lambda, m_0, \lambda_0} = -2g_2$$

dependencia $g_2(\mu)$
 a este orden es puramente la clásica

Por otra parte, de la primera ecuación de la p. 856 tenemos

diferencia en m es de $O(\lambda_0)$

$$g_4 \equiv \lambda = \lambda_0 - \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{m_0}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right\},$$

antes consideramos $m=0$ \rightarrow $\underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda}{m_0}\right)}_{\equiv f(\mu)} \quad \underbrace{\ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} - 1}\right)}_{\ln\left(\frac{f(\mu)+1}{f(\mu)-1}\right)}$

así que

$$\beta_4 = \mu \left(\frac{\partial g_4}{\partial \mu} \right) \Big|_{\lambda} = \frac{3\lambda_0^2}{32\pi^2} \mu \left[\ln\left(\frac{f(\mu)+1}{f(\mu)-1}\right) + f(\mu) \left(\frac{1}{f(\mu)+1} - \frac{1}{f(\mu)-1} \right) \right] \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

$\leftarrow m_0(\lambda), \lambda_0(\lambda)$ fijos

$$\underbrace{\frac{-2}{f(\mu)^2 - 1}}_{-\frac{2}{f(\mu)^2 - 1}} \quad \underbrace{\frac{-\frac{\partial m_0^2}{\mu^3}}{2f(\mu)}}_{-\frac{1}{\mu} \frac{(f(\mu)^2 - 1)}{f(\mu)}}$$

es decir,

$$\beta_4 = \frac{3\lambda_0^2}{32\pi^2} \mu \left[-\frac{1}{\mu} \frac{(f(\mu)^2 - 1)}{f(\mu)} \ln\left(\frac{f(\mu)+1}{f(\mu)-1}\right) + \frac{2}{\mu} \right]$$

$$= \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \left[1 - \frac{f(\mu)^2 - 1}{2f(\mu)} \ln\left(\frac{f(\mu)+1}{f(\mu)-1}\right) \right].$$

Esto es lo mismo que

$$\beta_4 = \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \left[1 - \frac{2m_0^2/\mu^2}{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right],$$

o usando $\lambda_0^2 \approx \lambda^2 \equiv g_4^2$, $m_0^2 \approx m^2 \equiv g_2 \mu^2$,

$$\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \left[1 - \frac{2g_2}{\sqrt{1+4g_2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+4g_2} + 1}{\sqrt{1+4g_2} - 1}\right) \right].$$

$$\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \left[1 - \frac{2g_2}{\sqrt{1+4g_2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1+4g_2} + 1}{\sqrt{1+4g_2} - 1} \right) \right]$$

Tal como esperaríamos, para $\mu \gg m = m_{\text{fir}}$ tenemos $g_2 = \frac{m^2}{\mu^2} \rightarrow 0$ y por tanto $\beta_4 \rightarrow \frac{3g_4^2}{16\pi^2}$, el resultado que encontramos para el caso no masivo. Par otra parte, para $\mu \approx m = m_{\text{fir}}$, $g_2 \approx 1$ y el flujo de g_4 se hace más lento. Para $\mu \ll m$ ($g_2 \gg 1$),

$$\beta_4 \approx \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \left[1 - \sqrt{g_2} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{g_2}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{g_2}}} \right) \right] \approx \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \left[1 - \sqrt{g_2} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{g_2}} \right) \right] \rightarrow 0.$$

(En esta región por supuesto NO hubiera tenido sentido hacer una expansión perturbativa en potencias de g_2 .) Claramente $g_2 \rightarrow \infty$ con $g_4 \rightarrow \text{cte.}$ significa que la teoría se vuelve vacía: nos quedamos sin los grados de libertad de la partícula/campo φ con masa m , y es por ello que g_4 deja de correr, es decir, los lazos de φ ya NO contribuyen.

Esta es una idea genérica: en una teoría con partículas de masas físicas m_1, m_2, \dots , aquellas con $m_n \gg \mu$ se 'desacoplan' y NO contribuyen a las funciones β (aunque los detalles de este desacoplamiento dependen del esquema de renormalización).

L21: 09/11/17 (-Zanin)

Otra opción es tratar a g_2 perturbativamente, igual que a g_4 . Es decir, de $\mathcal{L}_{\text{ren}} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ podemos

extraer como propagador solo a $\frac{i}{p^2}$, e interpretar a φ^2 como un vértice de 2 patas, $\text{---}\bullet\text{---} = -im^2 = -ig_2 \mu^2$, tal como φ^4 nos da un vértice de 4 patas, $\times = -i\lambda = -ig_4$. Este punto de vista va más de acuerdo con la perspectiva que hemos ganado en este capítulo, en donde reconocemos a $\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2$ como el punto fijo gaussiano y hacemos nuestros cálculos perturbativos en torno a este punto, deformando con el acoplamiento relevante g_2 y el marginal (marginamente irrelevante) g_4 . Por supuesto, lo malo de este enfoque es que nos restringe a $g_2 \ll 1$, es decir, $\mu \gg m$.

Al orden más bajo en los acoplamientos, tenemos ahora

$$\tilde{\Gamma}_2(p^2) = \underbrace{\text{---}\bullet\text{---}}_{-ig_2 \mu^2} + \underbrace{\text{---}\bigcirc\text{---}}_{-\frac{ig_4}{32\pi^2} \Lambda^2} + \underbrace{\text{---}\otimes_1\text{---}}_{i(\delta Z'' p^2 - \delta m_{(1)}^2 - \delta g_2'' \mu^2)} + \mathcal{O}(g_4^2, g_2^2, g_2 g_4).$$

límite $m \rightarrow 0$ del resultado en la p. 848 para renormalización aditiva de m_0^2 , que mantiene $m^2 = 0$ (p. 872) para divergencias $\propto g_2$

Imponiendo $\frac{d}{dp^2} \tilde{\Gamma}_2(p^2) \Big|_{p^2 = -\mu^2} = 0$ deducimos que $\delta Z'' = 0$, y pidiendo que $\tilde{\Gamma}_2(p^2 = -\mu^2) = -ig_2 \mu^2$ (lo cual implica, usando $\Delta m^2 = i \tilde{\Gamma}_2$, que

que $\tilde{G}_2(p^2 = -\mu^2) = \frac{i}{p^2 - \Delta m^2} = \frac{i}{p^2 - g_2 \mu^2}$, justo igual que en la p. 848),

deducir que $\Delta m_{(1)}^2 = \frac{g_4}{32\pi^2} \Lambda^2$ y $\delta g_2^{(1)} = 0$. De esto concluir

nuevamente que $Z=1 \Rightarrow \gamma_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln Z)}{\partial(\ln \mu)} = 0$ y $g_{2,0} = \frac{g_2 + \delta g_2^{(1)}}{Z^2} = g_2$

$\Rightarrow \beta_2 = \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} = -2g_2$. La primera corrección cuántica a δg_2 y

β_2 provendría de $\underbrace{0}_{\propto g_2 g_4}$.

Por otra parte,

$$\tilde{\Gamma}_4 = \text{tree} + \underbrace{\text{loop} + \text{loop} + \text{loop} + \text{loop}}_{\propto g_4^2} + \mathcal{O}(g_4^3, g_4^2 g_2),$$

resultados iguales a lo que antes obtuvimos en el límite $m \rightarrow 0$ (p. 856)

así que a este orden seguiremos teniendo $\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2}$ (las primeras

correcciones $\propto g_2$ vendrán de diagramas como $\text{loop} \propto g_4^2 g_2$).

Una tercera opción para probar el caso de masa finita fue ideada por Weinberg en 1973, y se emplea frecuentemente. En lugar de separar el término $-\frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2$ en una parte renormalizada $-\frac{1}{2} m^2 \phi^2$ y un contratérmino $-\frac{1}{2} \Delta m^2 \phi^2$, y luego especificar lo que significa m^2 usando una condición de renormalización que involucre a

alguna amplitud propia $\tilde{\Gamma}_N$ (normalmente $\tilde{\Gamma}_2$), podemos optar por definir m^2 de modo que tengamos directamente

$$\frac{1}{2} m_0^2 \varphi_0^2 = \frac{1}{2} m^2 [\varphi^2], \text{ donde } [\varphi^2] \text{ denota el}$$

operador compuesto ya renormalizado, $[\varphi^2(x)] \equiv \frac{\varphi_0^2(x)}{Z_{\varphi^2}(\mu)}$

(recorder la discusión en las pp. 852-854), y por tanto,

$$m^2(\mu) \equiv Z_{\varphi^2}(\mu) m_0^2.$$

$\Rightarrow \beta_2$ está determinado por γ_{φ^2}
(ver p. 880)

El punto es que con esta definición

$$Z_{ren} = \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 [\varphi^2] - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4, \text{ y al hacer la expansión}$$

perturbativa de un correlador $G_N = \langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \} | \Omega \rangle$

en potencias de m^2 , el término de orden $(m^2)^n$ involucrará a

$$(m^2)^n \int d^4 y_1 \dots d^4 y_n \underbrace{\langle \Omega | T \{ [\varphi^2(y_1)] \dots [\varphi^2(y_n)] \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \} | \Omega \rangle}_{\equiv G_{N\varphi, n\varphi^2}},$$

que por definición de $[\varphi^2]$, será finito. Dado que el término de

masa NO da lugar a divergencias, podemos entonces definir a

los otros acoplamiento de la teoría (en nuestro ejemplo favorito, λ)

tal como si tuviéramos $m^2 = 0$ (recordando el otro término

en δm^2 para absorber la divergencia cuadrática, que es aditiva, p. 872).

Es obvio entonces que, en este esquema, las funciones beta de los acoplamiento no acrítilos no dependen, en absoluto de m^2 o g_2 : $\beta_4 = 3g_4^2/16\pi^2 + \mathcal{O}(g_4^3)$.

El efecto de la masa figura directamente en la ecuación de Callan-Jymanzik: de la p.852 sabemos que el término de orden $(m^2)^n$ dentro de G_N , proporcional a $G_{N\varphi, n\varphi^2}$, satisface la ecuación

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + n \gamma_{\varphi^2} + N \gamma_{\varphi} \right) G_{N\varphi, n\varphi^2} = 0.$$

$$\uparrow \equiv \frac{\partial(\ln Z_{\varphi^2})}{\partial(\ln \mu)} \quad G_N \sim \sum_{n=0}^{\infty} (m^2)^n G_{N\varphi, n\varphi^2}$$

Pero dentro de G_N , el término $(m^2)^n G_{N\varphi, n\varphi^2}$ se puede identificar porque es el único que es eigenfunción de $m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}$ con eigenvalor n : $m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} (m^2)^n = n (m^2)^n$. La ecuación de C-J para G_N puede escribirse entonces en la forma

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \gamma_{\varphi^2} m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + N \gamma_{\varphi} \right) G_N = 0.$$

Si ahora definimos $g_2 \equiv \frac{m^2}{\mu^2}$, entonces $m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \Big|_{\mu} = g_2 \frac{\partial}{\partial g_2} \Big|_{\mu}$, y en el término $\propto (m^2)^n G_{N\varphi, n\varphi^2} = g_2^n \mu^{2n} G_{N\varphi, n\varphi^2}$, la derivada $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$,

considerar ahora a g_2 fija en lugar de m^2 fija, dará un factor adicional de $Z_{\mu\varphi, \varphi^2}$. Llegamos por tanto a

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + (-2 + \gamma_{\varphi^2}) g_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N \gamma_{\varphi} \right] G_N = 0,$$

o definiendo $\beta_2 \equiv (-2 + \gamma_{\varphi^2}) g_2$,

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N \gamma_{\varphi} \right) G_N = 0,$$

que es idéntica a la ecuación que tenemos ya en la p. 852.

Para calcular γ_{φ^2} , y en ello β_2 , necesitamos el factor de renormalización Z_{φ^2} en $[\varphi^2(x)] \equiv \frac{\varphi_0^2(x)}{Z_{\varphi^2}(\mu)} \equiv \frac{\varphi_0^2(x)}{1 + \delta Z_{\varphi^2}} \equiv \frac{(\sqrt{Z_{\varphi}})^2 \varphi^2(x)}{1 + \delta Z_{\varphi^2}}$.

Por antes de potenciar, el único correlador con $[\varphi^2]$ que es primitivamente divergente es $G_{2\varphi, 2\varphi^2} = \langle \Omega | T \{ [\varphi^2(x)] \varphi(x_1) \varphi(x_2) \} | \Omega \rangle$,

o en espacio de momentos 1 (correspondiendo a $\varphi^2(x)$)

