

la amplitud escala como una potencia ( $\leftrightarrow$  teoría conforme),

$$\Gamma(p, c, g, m_{\text{fir}}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} p^D \Gamma(1, c, g, 0).$$

equivalente al límite  $m_{\text{fir}} \rightarrow 0$   
a  $p$  fijo

Y esto resulta ser cierto para la amplitud a nivel árbol (nivel clásico);  
¡pero no es lo que se encuentra de 1 kzo en adelante!

Pej., en nuestro cálculo de la autoenergía del fotón a 1 kzo, que luego usamos para pensar en un proceso de dispersión entre 2 objetos cargados e identificar al acoplamiento efectivo  $\alpha_{\text{ef}}(\zeta^2)$ , obtuvimos

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x-x^2) \ln\left(1 - (x-x^2) \frac{p^2}{m_{\text{fir}}^2}\right)$$

pp. 754-755

↑  
D=2

potencia de p esperada

p. 802  
 $p \gg m_{\text{fir}} \rightarrow \frac{e^2}{12\pi^2} \left\{ \ln\left(-\frac{p^2}{m_{\text{fir}}^2}\right) - 5/3 + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\text{fir}}^2}{p^2}\right) \right\}$

Y, aunque no lo resaltaré en su momento, en  $\varphi^4$  obtuvimos un comportamiento similar: la amplitud de dispersión  $2 \rightarrow 2$

$$iM(s, t) = -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_{\text{fir}}^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{s-4m_{\text{fir}}^2} + \sqrt{s}}{\sqrt{s-4m_{\text{fir}}^2} - \sqrt{s}}\right) + s \rightarrow t + s \rightarrow u - 2 \right]$$

pp. 676-677

↑  
D=0

$s \gg m_{\text{fir}}^2 \rightarrow -\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \ln\left(-\frac{s}{m_{\text{fir}}^2}\right) + \dots$

Claramente, la aparición de estos factores de  $\ln\left(\frac{p^2}{m_{\text{fijo}}^2}\right)$  para  $p \rightarrow \infty$  con  $m_{\text{fijo}}$  fija impide el reemplazo  $\Gamma(1, c, s, \frac{m_{\text{fijo}}}{p}) \rightarrow \Gamma(1, c, q, 0)$ , e implica además que el límite  $m_{\text{fijo}} \rightarrow 0$  con  $p$  fija es singular.

¿De dónde salieron estos logaritmos grandes? Si

reparamos nuestros cálculos, encontramos que provienen de las divergencias logarítmicas y de la manera específica en que hemos definido el acoplamiento renormalizado. P.ej., en  $\varphi^4$ ,

[21: 23/04/19

obtuvimos en las pp. 671-677

$$i\mathcal{M}(s, t) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$= -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ I(s) + I(t) + I(u) \right\} - i\delta\lambda^{(1)}$$

con

$$I(s) = \frac{i}{8\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - 1}\right) + 1 \right].$$

con  $\tilde{\Gamma}_2$  habíamos optado por usar  $m = m_{\text{fijo}}$

↑ singular cuando  $m \rightarrow 0$  ↑

Luego imponemos nuestra condición de renormalización

$$-i\lambda = i\mathcal{M}(s=4m^2, t=0, u=0) = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ I(4m^2) + 2I(0) \right\} - i\delta\lambda^{(1)},$$

↑ esquema 05: singular cuando  $m \rightarrow 0$

$$I(s) = \frac{i}{8\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - 1}\right) + 1 \right]$$

deduciendo entonces que

$$i\delta\lambda^{(1)} = \frac{\lambda^2}{2} \{ I(4m^2) + 2I(0) \} = \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \underbrace{\left[ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) + 0 + 1 + 2\left(\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - 1 + 1\right) \right]}_{3\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) + 1}$$

Debido que (pp. 652)  $\delta\lambda \equiv \overset{2 \rightarrow 1 \text{ p. 65}}{\cancel{Z}} \lambda_0 - \lambda$ , con esta definición

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} [3\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - 1] \text{ es singular cuando } M = m_{\text{fijo}} \rightarrow 0.$$

Lo anterior nos llevó a

$$iM(s,t) = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \left[ \cancel{3\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)} + 3 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - 1}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{t}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{t}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{t}} - 1}\right) \right]$$

de ~~X~~  $\left[ -\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{u}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{u}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{u}} - 1}\right) - \cancel{3\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)} - 1 \right],$

donde se cancela la divergencia UV; pero se preserva la singularidad cuando  $m \rightarrow 0$ , y por tanto el logaritmo grande cuando  $|s| \gg m^2$ . En resumen, nuestro esquema de renormalización reemplazó  $\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{s}{m^2}\right)$ .

25: 17/05/23

Consideremos en cambio lo que ocurre si abandonamos el esquema

OS y definimos  $\lambda$  a una escala de renormalización  $\mu$  arbitraria,

pidiendo p.ej. que  $\tilde{\Gamma}_4$

$$-i\lambda(\mu) = iM(s=t=u=-\mu^2) = -i\lambda_{os} + \frac{i\lambda_{os}^2}{16\pi^2} \left[ 2 - \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right].$$

Región euclídea, para garantizar que  $\lambda$  es real (recordar que para  $s, t$  ó  $u > 4m^2$  la amplitud tiene un corte). Aquí  $s+t+u \neq 4m^2$ : estamos fuera de la capa de masa.

$$-i\lambda(\rho) = -i\lambda_{05} + \frac{i\lambda_{05}^2}{16\pi^2} \left[ 2 - \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln \left( \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1} \right) \right]$$

Para  $\mu \sim m$ , esto es  $\lambda(\mu) \sim \lambda_{05} - \frac{\lambda_{05}^2}{32\pi^2} \left[ 4 - 3\sqrt{5} \ln \left( \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \right) \right] \sim \lambda_{05}$ ; pero para  $\mu \gg m$ ,

$$\lambda(\mu) \simeq \lambda_{05} + \frac{3\lambda_{05}^2}{32\pi^2} \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) \quad \text{crece logarítmicamente con } \mu.$$

Invertiendo esta relación,

$$\lambda_{05} \simeq \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{3\lambda}{8\pi^2} \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right)}}{\frac{3}{16\pi^2} \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right)} \simeq \lambda - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right),$$

encontramos que para  $-s, -t, -u \gg m^2$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_4 &\simeq -i \left( \lambda_{05} + \frac{\lambda_{05}^2}{32\pi^2} \left[ \ln \left( \frac{-s}{m^2} \right) + \ln \left( \frac{-t}{m^2} \right) + \ln \left( \frac{-u}{m^2} \right) \right] \right) \\ &\simeq -i \left( \underbrace{\lambda - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right)}_{\lambda_{05} \text{ solo términos de } \mathcal{O}(\lambda^3)} + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[ \ln \left( \frac{-s}{m^2} \right) + \ln \left( \frac{-t}{m^2} \right) + \ln \left( \frac{-u}{m^2} \right) \right] \right) \\ &= -i \left( \lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[ \ln \left( \frac{-s}{m^2} \right) + \ln \left( \frac{-t}{m^2} \right) + \ln \left( \frac{-u}{m^2} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Aquí vemos claramente que, mientras que en términos de  $\lambda_{05}$

tenemos logaritmos grandes si  $-s, -t$  ó  $-u \gg m^2$ , cuando

reescribimos la amplitud en términos de  $\lambda$ , incluso si

$-s, -t$  ó  $-u \gg m^2$  NO tenemos logaritmos grandes si elegimos

$\mu \sim |s|, |t|, |u|$  (en particular, para  $s=t=u=-\mu^2$  tenemos  $iM = -i\lambda$ ,

por definición ✓).

Por supuesto, dado que  $\mu$  es una escala completamente arbitraria, nuestras predicciones no pueden depender de la elección de  $\mu$ : la dependencia explícita de  $\mu$  que vemos en  $\tilde{\Gamma}_4$  es compensada/cancelada por la dependencia implícita  $\lambda = \lambda(\mu)$ . Lo que hemos hecho, entonces, es simplemente esconder los logaritmos grandes dentro de la definición de  $\lambda$ .

Puede parecer que esto no es un gran logro; pero la idea importante es que, desde el punto de vista físico, en realidad lo que nos interesa es este acoplamiento "corriente" (en inglés, "running coupling")  $\lambda(\mu)$  y no el acoplamiento fijo  $\lambda_{05} \sim \lambda(\mu \sim m)$ , porque es  $\lambda(\mu)$  quien determina la validez de la expansión perturbativa para un proceso en energía "experimental"  $p \sim \mu$ . En efecto, hemos visto

que esquemáticamente  $\tilde{\Gamma}_4 \sim -i\lambda_{05} - i\lambda_{05}^2 \left[ \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \text{cte.} \right] + \mathcal{O}(\lambda_{05}^3)$ , y

al examinar los términos con más lazos se encuentra que

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_4 &\sim -i\lambda_{05} - i\lambda_{05}^2 \left[ \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \text{cte.} \right] - i\lambda_{05}^3 \left[ \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right)^2 + \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \text{cte.} \right] + \dots \\ &\sim -i\lambda - i\lambda^2 \left[ \ln\left(\frac{-s}{\mu^2}\right) + \text{cte.} \right] - i\lambda^3 \left[ \ln\left(\frac{-s}{\mu^2}\right)^2 + \ln\left(\frac{-s}{\mu^2}\right) + \text{cte.} \right] + \dots, \end{aligned}$$

así que lo que necesitamos para que la expansión perturbativa

ses válidas es que  $\lambda(\mu \sim p) \ll 1$ , no que  $\lambda_{or} \ll 1$ .

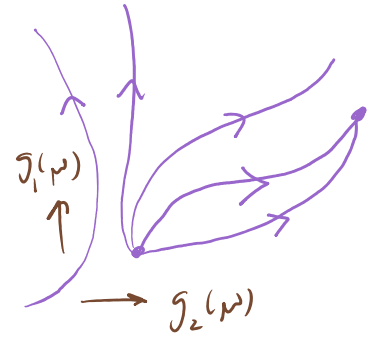
Habríamos encontrado ya esta misma idea para QED en la p.802, donde hablamos de un acoplamiento efectivo  $\alpha_{ef}(q^2) \sim \alpha_{or} + \alpha_{or}^2 \ln\left(\frac{q^2}{m^2}\right)$ . Regresaremos a ese ejemplo en detalle más adelante; pero por ahora, nos sirve para empezar a entender que la idea de un acoplamiento corriente no es una peculiaridad de  $\phi^4$ , sino una propiedad genérica de las teorías de campo.

En cualquier teoría de campos, el punto principal es que, cuando reportamos las predicciones en términos de acoplamientos corrientes  $g_i(\mu)$ , para seguirle la pista a los logaritmos potencialmente grandes basta con seguirle la pista a los  $g_i(\mu)$ .

En particular, para saber si las amplitudes/correladores a ultra-alta o ultra-baja energía en verdad se aproximan a una ley de potencia (tal como corresponde a una teoría conforme), bastará con preguntarnos si los acoplamientos corrientes se aproximan a valores constantes cuando  $\mu \rightarrow \infty$  ó  $0$ :  $g_i(\mu) \rightarrow g_i^*$ ,

es decir, si llegamos a un punto fijo  
del grupo de renormalización.

LIB: 26/10/17



Volviendo a la teoría  $\varphi^4$ , ya que nos queda claro que el acoplamiento corriente  $\lambda(\mu)$  es de mucho interés físico, es útil tener presente que podemos obtener su relación con el acoplamiento desnudo  $\lambda_0(\Lambda)$  directamente a partir de nuestra condición de renormalización

$$\tilde{\Gamma}_4(s=t=u=-\mu^2) = -i\lambda,$$

sin invocar jamás a  $\lambda_{05}$ . Usando la expresión para  $i\mathcal{M} = \tilde{\Gamma}_4$  en la p. 842,

$$\tilde{\Gamma}_4(s,t,u) = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ I(s) + I(t) + I(u) \right\} - i\delta\lambda^{(1)}$$

$$\text{con } I(s) = \frac{i}{8\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - 1}\right) + 1 \right],$$

esta condición implica que

$$\delta\lambda^{(1)} = \frac{-i3\lambda^2}{2} I(-\mu^2) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right\},$$

y en ello tenemos  $\lambda_0 = \frac{\lambda + \delta\lambda}{z^2}$  (p. 649, ver p. 855).

Para completar la especificación de nuestro nuevo esquema de

renormalización, nos falta definir el parámetro de masa  $m(\mu)$  y el campo renormalizado  $\varphi$  (o equivalentemente,  $Z(\mu)$ ).

Podemos elegir p.ej. las condiciones (cf. p.658)

un  
acoplamiento  
más

$$\tilde{\Gamma}_2(p^2) \Big|_{p^2=-\mu^2} = 0, \quad \frac{d\tilde{\Gamma}_2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=-\mu^2} = 0.$$

Esto equivale a pedir que  $\tilde{G}_2(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2}$  en  $p^2 = -\mu^2$ , NO en  $m^2$  (nuevamente nos enfocamos en la región euclidiana  $p^2 < 0$  para no toparnos con el arte raval proveniente de estados multipartículas). Utilizando el resultado que tenemos en la p.665,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_2 &= \cancel{0} + \cancel{\frac{1}{1}} + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= -\frac{i\lambda}{32\pi^2} \left[ \Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \right] + i(\delta Z^{(1)} p^2 - \delta m_{(1)}^2) + \mathcal{O}(\lambda^2), \end{aligned}$$

nuestras condiciones implican que

$$\delta Z^{(1)} = 0, \quad \delta m_{(1)}^2 = -\frac{\lambda}{32\pi^2} \left[ \Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \right],$$

y por tanto  $\tilde{\Gamma}_2 = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$  (tal como ocurrió en el



esquemas OS). Esto significa que a 1 lazo el propagador sigue siendo  $G_2(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Delta m^2(p^2)}$  (donde  $\Delta m^2 \equiv i\tilde{\Gamma}_2$ , pp. 658, 678), con lo cual de hecho  $m = m_{\text{fís}}$  a este orden. De 2 lazos en adelante sí se obtiene  $Z \neq 1$ ,  $m \neq m_{\text{fís}}$  (lo cual sucede ya a 1 lazo en otras teorías, como  $\varphi^3$ ).

En este nuevo esquema de renormalización, podemos calcular cualquier correlador  $G_N(x_1, \dots, x_N) = \langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \} | \Omega \rangle$  como una expansión perturbativa en potencias de los acoplamientos  $d$ -dimensionales

$$g_4(\mu) \equiv \lambda(\mu), \quad g_2(\mu) \equiv \frac{m^2(\mu)}{\mu^2},$$

siempre y cuando ocurra que  $g_2, g_4 \ll 1$ .

Independientemente de si nuestro análisis es perturbativo o no, el hecho de que la escala de renormalización  $\mu$  es arbitraria implica que **nuestras predicciones físicas NO pueden depender de  $\mu$** . Esto es completamente obvio antes de renormalizar, puesto que la teoría se define con el corte  $\Lambda$  y los acoplamientos desnudos  $m_0(\Lambda)$ ,  $\lambda_0(\Lambda)$ , que no hacen referencia alguna a  $\mu$ .

En particular, los correladores de orden

$$G_N^\circ(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_N) \} | \Omega \rangle$$

← no nivel árbol

dependen de  $\Lambda$ ; pero NO de  $\mu$ . Dado que  $\varphi(x) \equiv \frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{Z(\mu)}}$ ,  
podemos escribir

$$Z(\mu)^{N/2} \langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

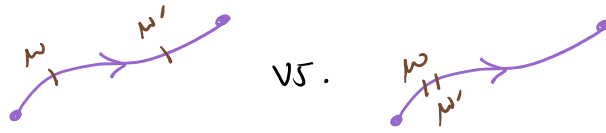
$$\equiv G_N(x; g_2(\mu), g_4(\mu), \mu) \qquad \equiv G_N^\circ(x; m_0(\Lambda), \lambda_0(\Lambda), \Lambda)$$

con lo cual vemos que para cualquier  $\mu, \mu'$  y  $N$  se debe cumplir que

$$Z(\mu)^{N/2} G_N(x; g_2(\mu), g_4(\mu), \mu) = Z(\mu')^{N/2} G_N(x; g_2(\mu'), g_4(\mu'), \mu').$$

Esta es la ecuación básica del grupo de renormalización. Ella indica cómo debemos cambiar los  $g_i(\mu)$  y  $Z(\mu)$  cuando cambiamos  $\mu$ , para seguir hablando de la misma teoría (mismos  $\Lambda, m_0(\Lambda), \lambda_0(\Lambda)$ ).  
↔ definición de  $\varphi$  renormalizado

A través de L5Z (p.444), garantiza en particular que las amplitudes de dispersión, aún si las expresamos en términos de  $g_2(\mu), g_4(\mu)$  y  $\mu$ , NO tienen una dependencia netas de  $\mu$ . (OJO: ¡no debemos confundir  $Z(\mu)$  con  $Z_0$ , el residuo de  $\tilde{G}_2^{(0)}(p^2)$  en  $p^2 = m_{\text{fis}}^2$ , que era a lo que nos referíamos como  $Z$  en la fórmula de la p.444!)



En lugar de pensar en un cambio finito de escala  $\mu \rightarrow \mu'$ , es útil pensar en un cambio infinitesimal  $\mu \rightarrow \mu + \delta\mu$ . En este caso, la independencia de  $\mu$  se expresa como una ecuación diferencial:

$$0 = \frac{d}{d\mu} G_N^0(x; m_0(\mu), \lambda_0(\mu), \Lambda) = \frac{d}{d\mu} \left[ z(\mu)^{N/2} G_N(x; g_2(\mu), g_4(\mu), \mu) \right]$$

$$= \frac{N}{2} z^{\frac{N}{2}-1} \frac{\partial z}{\partial \mu} G_N + z^{N/2} \frac{\partial g_2}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_2} + z^{N/2} \frac{\partial g_4}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_4} + z^{N/2} \frac{\partial G_N}{\partial \mu}$$

Dividiendo entre  $z^{N/2}$  y multiplicando por  $\mu$ , esto es

$$\mu \frac{\partial G_N}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_4} + \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_2} + \frac{N}{2} \frac{\mu}{z} \frac{\partial z}{\partial \mu} G_N = 0$$

Es habitual definir por cada acoplamiento una función beta,

$$\beta_2 \equiv \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu}, \quad \beta_4 \equiv \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} \quad \text{tasa de cambio de acoplamiento} \quad \left( \leftrightarrow \beta_i = \frac{\partial g_i}{\partial(\ln \mu)} \right),$$

y por cada campo, una dimensión anómala

$$\gamma \equiv \frac{\mu}{z} \frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial(\ln z)}{\partial \mu} \quad \text{dependencia extra bajo rescalamiento} \quad \left( \leftrightarrow \gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln z)}{\partial(\ln \mu)} \right).$$

Con esta notación, tenemos entonces que

$$\mu \frac{\partial G_N}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_4} + \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} \frac{\partial G_N}{\partial g_2} + \frac{N}{2} \frac{\mu}{z} \frac{\partial z}{\partial \mu} G_N = 0$$

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N\gamma \right) G_N(x; g_2, g_4, \mu) = 0,$$

La ecuación de Callan-Symanzik (relación no perturbativa).

L22: 06/05/19

Claramente, una transformada de Fourier conmuta con las derivadas  $\partial_\mu, \partial_{g_4}, \partial_{g_2}$ , así que esta misma ecuación es válida para los correladores en espacio de momentos,  $\tilde{G}_N(p; g_2, g_4, \mu)$ .

La ecuación también aplica si en lugar de correladores de los campos básicos  $\varphi(x)$  consideramos correladores de operadores compuestos como  $\varphi^2(x)$  o  $\varphi \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi(x)$ , solo que para cada operador  $\mathcal{O}(x)$  debemos usar el factor de renormalización y

la dimensión anómala correspondiente,  $\mathcal{O}(x) \equiv \frac{\tilde{\mathcal{O}}_0(x)}{\sqrt{Z_{\mathcal{O}}(\mu)}}$  y

$$\gamma_{\mathcal{O}} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln Z_{\mathcal{O}})}{\partial(\ln \mu)}. \text{ P.ej.},$$

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + \gamma_{\varphi^2} + 2\gamma_{\varphi} \right) \langle \Omega | T \{ \varphi^2(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \} | \Omega \rangle = 0.$$

(Si elegimos definir  $Z_{\varphi^2}$  a través de  $\varphi^2(x) \equiv \frac{\varphi_0^2(x)}{Z_{\varphi^2}}$ , entonces

calculáramos la dimensión anómala usando  $\gamma_{\varphi^2} \equiv \frac{\partial(\ln Z_{\varphi^2})}{\partial(\ln \mu)}$ , o si definimos

$\varphi^2(x) \equiv Z_{\varphi^2} \varphi_0^2(x)$ , entonces obviamente  $\gamma_{\varphi^2} \equiv -\frac{\partial(\ln Z_{\varphi^2})}{\partial(\ln \mu)}$ .)

L26: 20/05/23

La idea básica aquí es que cuando nos proponemos definir un operador acoplado, como  $\varphi^4 \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi(x)$ , encontramos divergencias adicionales por el hecho de que tenemos varias instancias del operador de campo en el mismo punto  $x$ , así que por ej.  $\varphi^4 \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi(x) \neq \lim_{x_n \rightarrow x} \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \partial_\mu \varphi(x_5) \partial^\mu \varphi(x_6) = \frac{\varphi_0(x)^4 \partial_\mu \varphi_0(x) \partial^\mu \varphi_0(x)}{(\sqrt{Z_\varphi})^6}$ .

Por esta razón, los operadores renormalizadores  $\mathcal{O}_i(x)$  (incluido el propio  $\varphi(x)$ ) NO escalan bajo cambios en  $\mu$  simplemente como su dimensión ingenua indicaria, y la dimensión anómala  $\gamma_i$  justamente por la diferencia en el exponente. Como ejemplo, calcularemos  $\gamma_\varphi$  en las pp. 880-2. Y por otra parte, en las pp. 868-9 veremos que, en torno a un punto fijo:

$$\mathcal{O}_i(x) \text{ a escala } \mu \xrightarrow{x \rightarrow \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)x} \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{\Delta_i} \mathcal{O}_i(x) \text{ a escala } \mu' = \mu + \delta\mu,$$

↖ en inglés: scaling dimension

donde la dimensión de escalamiento  $\Delta_i$  está dada por

$$\Delta_i \equiv D_i - \gamma_i$$

↖ dimensión clásica  $D_i = d - \Delta_i$  ↗ dimensión de  $\lambda_i$  correspondiente

$S \supset \int d^d x \lambda_i \mathcal{O}_i(x)$

↖ dimensión anómala de  $\mathcal{O}_i$

Y de hecho, la función beta  $\beta_i$  asociada al acoplamiento  $g_i(\mu) \equiv \frac{\lambda_i(\mu)}{\mu^{\Delta_i}}$  está relacionada con la dimensión anómala  $\gamma_i$  para el operador  $\mathcal{O}_i(x)$ .

En general, la situación se complica porque para eliminar todas las divergencias, al renormalizar un operador  $\mathcal{O}_i$  se requieren contratérminos que involucren a todos los operadores en los mismos números cuánticos e igual o menor dimensión, así que distintos operadores se mezclan bajo el flujo de renormalización. [Ver p.ej. Perkin sec. 12.4, o mejor, Collins capítulo 6.] P.ej., se puede tener

$$[\varphi^4](x) \equiv Z_{\varphi, \varphi}^{-1} \varphi_0^4(x) + Z_{\varphi, \partial^2}^{-1} (\partial \varphi_0(x))^2 + Z_{\varphi, \varphi^2}^{-1} \mu^2 \varphi_0^2(x).$$

↗ denota operador renormalizado (en algún esquema de)

Por esta razón, en general la renormalización de operadores compuestos se da a través de una ecuación matricial,

$$\underset{\text{desnudo}}{\mathcal{O}_0^i(x)} = \sum_j Z_{\mathcal{O}}^{ij}(\mu) \underset{\text{renormalizado}}{\mathcal{O}^j}, \quad (\text{cf. } \varphi_0(x) = \sqrt{Z} \varphi(x))$$

Esto sucede igualmente a una matriz de dimensiones anómalas

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} \equiv \sum_k [Z_{\mathcal{O}}^{-1}(\mu)]^{ik} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_{\mathcal{O}}^{kj}(\mu),$$

que es lo que figurará en la ecuación de Callan-Jymcznik (matricial).

Esto implica en particular que solo ciertas combinaciones lineales específicas de los  $\mathcal{O}_i$  tienen una dimensión de escalamiento  $\Delta_i$

bien definida: aquellas combinaciones que son eigenvectores de  $\gamma_{\mathcal{O}}^{ij}$ .

Regresemos ahora a la ecuación de Callan-Tymanzik en  $\varphi^4$ ,

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N \gamma_\varphi \right) \tilde{G}_N(p; g_2, g_4, \mu) = 0.$$

Podemos determinar las funciones  $\beta$  y  $\gamma$  usando los resultados que obtuvimos ya para la renormalización de esta teoría a 1 lazo, en el esquema en la escala deslizante  $\mu$ .

De la p. 848 sabemos que  $\delta Z^{(1)} = 0$ , así que a este orden todavía  $\tilde{z} = 1$ , y por tanto la dimensión anómala

$$\gamma_\varphi = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{z} \frac{\partial z}{\partial \mu} \Big|_\Lambda = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

De la p. 847 tenemos  $\Lambda$  fijo y por tanto también  $\lambda_0(\Lambda)$ ,  $m_0(\Lambda)$

$$\delta \lambda^{(1)} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right\},$$

que usando  $\delta \lambda \equiv \tilde{z} \lambda_0 - \lambda$  (p. 649) implica que

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right\} + \mathcal{O}(\lambda^3),$$

o en sentido inverso (ver inverso análogo en la p. 844),

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right) \right\} + \mathcal{O}(\lambda_0^3).$$

Si por simplicidad consideramos primero el caso no masivo,

$$m=0 \iff g_2 \equiv \frac{m^2}{\mu^2} = 0 \quad (\iff m_{\text{fir}} = 0, \text{ p. 849})$$

esto se reduce a

$$\lambda \approx \lambda_0 - \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \lim_{m \rightarrow 0} \left\{ \underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)}_1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \underbrace{\ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right)}_{\ln\left(\frac{2}{\frac{2m^2}{\mu^2}}\right) = 2 \ln\left(\frac{\mu}{m}\right)} \right\},$$

$$\circ \quad \lambda \approx \lambda_0 + \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right). \quad \underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \ln\left(\frac{\mu}{m}\right)}_{\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)} \quad \text{No singular } \checkmark \quad (\text{cf. p. 843})$$

De aquí podemos concluir que la función beta para el acoplamiento

cuántico  $g_4 \equiv \lambda$  es

$$\beta_4 = \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} \Big|_{\lambda} \approx \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} \approx \frac{3g_4^2}{16\pi^2}.$$

$\lambda_0(\mu), m_0(\mu)$  fijos

← diferencia entre  $\lambda_0$  y  $\lambda = g_4$   
es de  $\mathcal{O}(\lambda^2)$

Y evidentemente, en este caso la otra función beta es  $\beta_2 = \mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} = 0$ .



Conociendo  $\gamma$ ,  $\beta_4$  y  $\beta_2$ , podemos verificar que la ecuación de Callan-Symanzik

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N\gamma_\varphi \right) \tilde{G}_2(p; g_2, g_4, \mu) = 0.$$

se satisface para los 2 correladores renormalizados que ya tenemos a nuestra disposición a 1 lazo. Para

$$\tilde{G}_2(p^2) = \frac{i}{p^2 - \underbrace{m^2 - \Delta m^2(p^2)}_{\substack{\text{p. 658 } i\tilde{\Gamma}_2 = 0 \\ \text{p. 848}}}} = \frac{i}{p^2},$$

obviamente

$$\mu \frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial g_2} + 2\gamma_\varphi \tilde{G}_2 = 0. \quad \checkmark$$

Por otra parte, de la p. 847 sabemos que

$$\tilde{\Gamma}_4 = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ I(s) + I(t) + I(u) \right\} - i\delta \lambda^{(1)} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\text{con } I(s) = \frac{i}{8\pi^2} \left[ \underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - 1}\right) + 1}_{\substack{m \rightarrow 0 \\ \rightarrow \ln\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{s}}\right) \quad (\text{p. 856})}} \right],$$

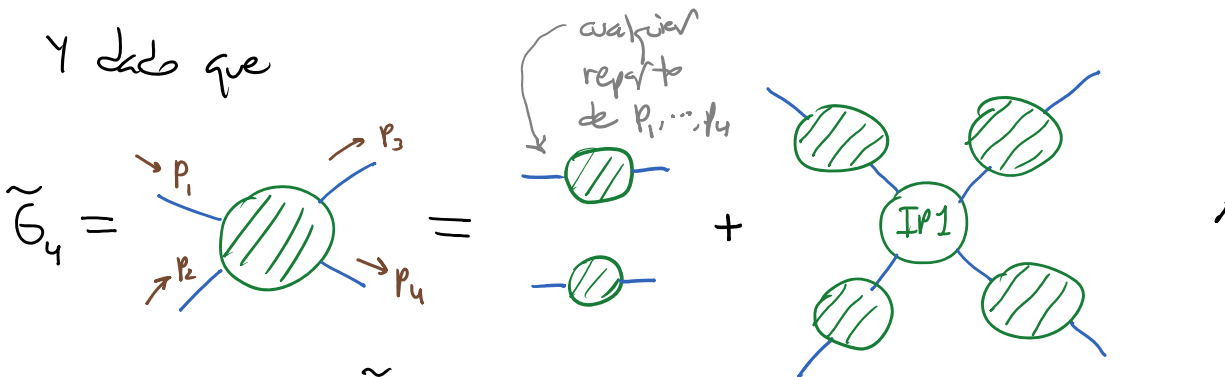
$$\text{y } \delta \lambda^{(1)} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \underbrace{\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{\mu^2}} - 1}\right)}_{\substack{m \rightarrow 0 \\ \rightarrow \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}} \right\},$$

es decir,

$$\tilde{\Gamma}_4 = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{s}}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{t}}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{u}}\right) + 3 - 3\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \right\}$$

$$= -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{s}}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{t}}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{u}}\right) + 3 \right\} \quad \text{cf. p. 844}$$

Y dado que



a 1 lazo (en  $\tilde{\Gamma}_2 = 0$ , p. 848)

$$\tilde{G}_4 = \underbrace{\tilde{G}_2(p_1^2) \tilde{G}_2(p_2^2)}_{\text{podemos ignorar en Callan-Symanzik (a este orden)}} + \text{otros disconexos} + \tilde{G}_2(p_1^2) \tilde{G}_2(p_2^2) \tilde{G}_2(p_3^2) \tilde{G}_2(p_4^2) \tilde{\Gamma}_4$$

$$\approx \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \frac{i}{p_3^2} \frac{i}{p_4^2} \left[ -ig_4 + \frac{ig_4^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\mu}{s}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{t}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{u}\right) + 3 \right\} \right].$$

Podemos ver entonces que

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + 4\gamma_4 \right) \tilde{G}_4 \quad \beta_4 \text{ p. 856}$$

$$= \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \frac{i}{p_3^2} \frac{i}{p_4^2} \left[ \frac{ig_4^2}{16\pi^2} \left\{ 3 \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial(\ln \mu)} \right\} + \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \left\{ -i + \sigma(g_4) \right\} \right]$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

19: 31/10/17

De hecho, en la teoría con  $g_2=0$ , cuando ya tenemos en mano 2 correladores renormalizados, como en este caso  $\tilde{G}_2$  y  $\tilde{G}_4$ , en lugar de proceder como en las pp. 855-856, determinamos explícitamente  $\lambda_0(\lambda)$  y  $\gamma(\lambda)$  y luego invertimos para obtener  $\lambda(\lambda_0, \mu)$  y  $\gamma(\lambda_0, \mu)$  y calculamos  $\gamma_\varphi$  y  $\beta_4$  directamente a partir de sus definiciones, un atajo es exigir que  $\tilde{G}_2$  y  $\tilde{G}_4$  satisfagan la ecuación de Callan-Symanzik, y a partir de ello deducir  $\gamma_\varphi$  y  $\beta_4$  en términos de  $g_4$ , sin involucrar a  $\lambda$  y  $\lambda_0(\lambda)$ :

$$0 = \left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + 2\gamma_\varphi \right] \tilde{G}_2 \Rightarrow \boxed{\gamma_\varphi = 0}, \checkmark$$

y

$$0 = \left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + 4\gamma_\varphi \right] \tilde{G}_4$$

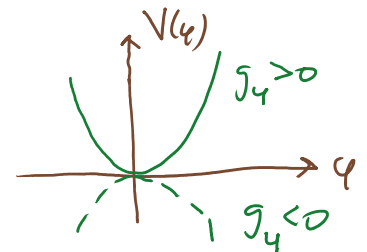
$$\frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \frac{i}{p_3^2} \frac{i}{p_4^2} \left[ -ig_4 + \frac{ig_4^2}{16\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{t}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{u}\right) + 3 \right\} \right]$$

$$= \frac{i}{p_1^2} \frac{i}{p_2^2} \frac{i}{p_3^2} \frac{i}{p_4^2} \left[ \frac{ig_4^2}{16\pi^2} \{3\} + \beta_4 \{-i + O(g_4)\} \right] \Rightarrow \boxed{\beta_4 = \frac{3g_4^2}{16\pi^2}}. \checkmark$$

Una característica que podemos ver en estos resultados, y que es completamente genérica, es que **las funciones beta y las dimensiones anómalas dependen únicamente de los acoplamientos**:  $\beta_i = \beta_i(g_j)$ ,  $\gamma_c = \gamma_c(g_j)$ . La razón es que  $\beta_i$  y  $\gamma_c$  son adimensionales, y al estar asociados a correladores renormalizados  $G_N$ , NO pueden depender de  $\Lambda$ , así que, por análisis dimensional, tampoco pueden depender de  $\mu$  (puesto que no hay otras escalas involucradas: m ya figura como  $g_2 \equiv \frac{M}{\mu}$ , y ciertamente  $\beta_i$  y  $\gamma_c$  no dependen de las posiciones  $x_n$  o momentos  $p_n$ ).

El hecho de que  $\gamma_\varphi \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln Z_\varphi)}{\partial(\ln \mu)} = 0$  nos dice que (a 1 lazo)  $Z_\varphi = 1$ , y por tanto el campo renormalizado  $\varphi(x) = \varphi_0(x)$  no tiene dependencia de  $\mu$ , de modo que su dimensión de escalamiento sigue siendo  $\Delta_\varphi = D_\varphi = 1$ .   
← distinto en p.e.j.  $\varphi^2$  a 1 lazo

Sabemos que necesitamos  $g_4 = \lambda \geq 0$  para que la teoría tenga un vacío estable,



y nuestro resultado  $\beta_4 \equiv \mu \frac{\partial g_4}{\partial \mu} = \frac{3g_4^2}{16\pi^2} \geq 0$  nos dice que  $g_4$  crece con la energía  $\mu$ , o equivalentemente, decrece en el flujo de renormalización. En otras palabras, el acoplamiento