

Esta es una pequeña contribución al famoso "corrimiento de Lamb" entre los niveles $2s$ ($l=0$) y $2p$ ($l=1$) del átomo de hidrógeno, que en total es de $+1058$ MHz.

[21: 24/04/23]

La forma $\Delta V(r) \propto \delta^{(3)}(\vec{r})$ es solo una aproximación; con un mejor tratamiento de nuestro resultado [ver p.ej. Perkin 7.5, o Weinberg I 11.2] se obtiene

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} - \underbrace{\frac{\alpha^2}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}}_{\text{Potencial de Uehling}} + \dots \quad \text{para } r \gg 1/m$$

Nota que, si hay más de un tipo de partícula cargada, las de menor masa contribuyen más.

Aquí vamos ya más explícitamente que la

polarización del vacío convierte a la partícula en



un objeto no puntual, una distribución de carga con radio $\sim 1/m$.

[17: 01/04/19]

Si consideramos el límite opuesto, con muy alta transferencia de momento, $-q^2 \gg m^2 \iff$ parámetro de impacto muy pequeño, $r \ll 1/m$, NO podemos describir el proceso de dispersión en términos de un potencial no relativista, pero sí podemos examinar directamente el comportamiento del

acoplamiento / carga efectiva \leftrightarrow constante de estructura fina

efectiva de la p. 798,

$$\alpha_{ef}(q^2) \equiv \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{1-\pi(q^2)}$$

interacción
entre cargas
va como $\frac{\alpha_{ef}(q^2)}{q^2}$

$$\underbrace{\alpha}_{\substack{\text{p. 795} \\ \frac{2\alpha}{\pi}}} \underbrace{\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x-x^2) \ln(1-(x-x^2) \frac{q^2}{m^2}) + \mathcal{O}(e^4)}_{\ln(-\frac{q^2}{m^2}) + \ln(x-x^2) + \mathcal{O}(\frac{m^2}{q^2})}$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ \underbrace{\int_0^1 dx (x-x^2) \ln(-\frac{q^2}{m^2})}_{1/6} + \underbrace{\int_0^1 dx (x-x^2) \ln(x-x^2)}_{\left[-\frac{x}{6} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^3}{9} - \frac{1}{6} \ln(1-x) + \frac{x^2}{2} \ln(x-x^2) - \frac{x^3}{3} \ln(x-x^2) \right]_0^1} \right\}$$

$$= -5/18$$

$$= \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \underbrace{\ln(-\frac{q^2}{m^2}) - 5/3}_{\ln\left(\frac{-q^2}{\exp(5/3)m^2}\right)} + \mathcal{O}(m^2/q^2) \right\}$$

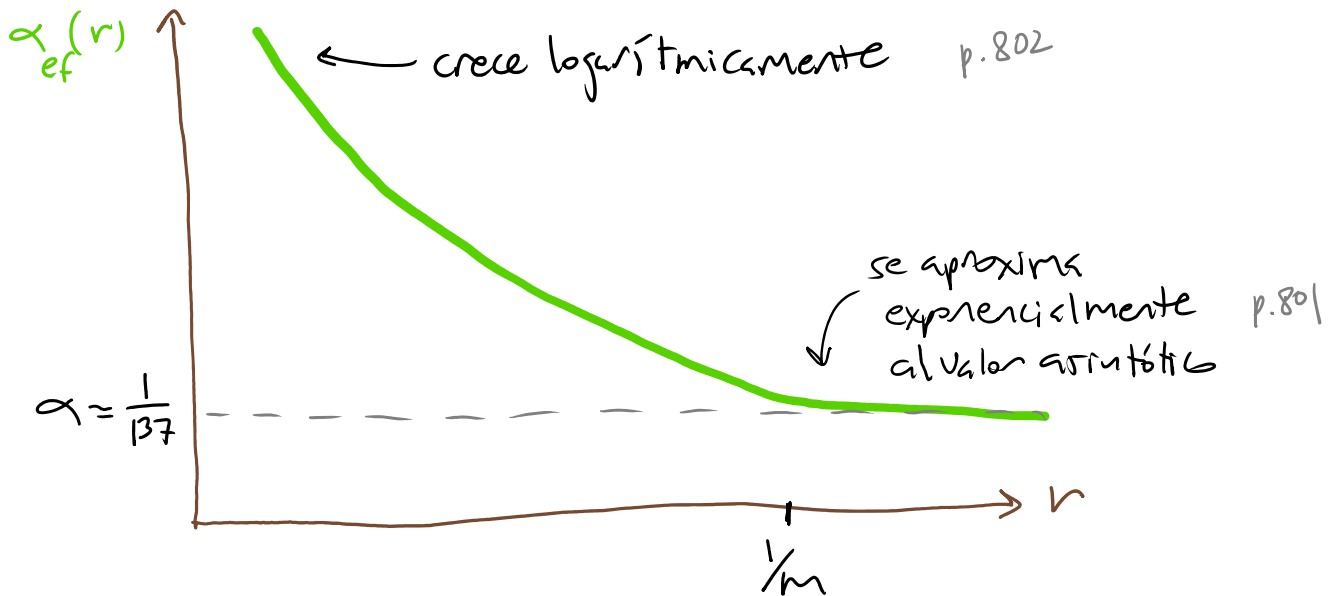
es decir,

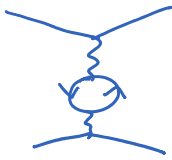
$$\alpha_{ef}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\exp(5/3)m^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \alpha \frac{m^2}{q^2})} \simeq \alpha + \underbrace{\frac{\alpha^2}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\exp(5/3)m^2}\right)}_{> 0}$$

OJO: esto debe ser $\ll \alpha$
para que la expansión
perturbativa sea válida

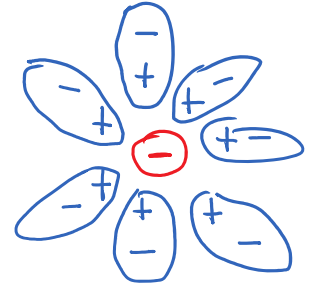
La constante de acoplamiento crece logaritmicamente cuando

$|f^2|$ aumenta $\leftrightarrow r$ decrece. Si estimamos $f \sim 1/r$,
 y combinamos con lo que aprendimos antes para
 distancias grandes, el comportamiento cualitativo del
 acoplamiento/carga efectiva de nuestra partícula es:



La interpretación física de este comportamiento está
 implícita en el diagrama que calculamos, :
 el campo electromagnético (\leftrightarrow fotón) producido
 por la partícula ^{no necesariamente un electrón} puede crear pares e^-e^+ del vacío. Es decir,
 el vacío se comporta como un medio dieléctrico, que se
polariza en presencia de la partícula desnuda, y la apantalla.

Los pares e^+e^- producidos son dipolos, cuyo extremo positivo/negativo naturalmente se ve atraído/repelido por la carga desnuda.



Crear un par e^+e^- tiene un costo energético $\sim m$, así que (por el principio de incertidumbre) es solo cuando nos acercamos a distancias $r \lesssim 1/m$ que este efecto de polarización del vacío se vuelve apreciable. Y la consecuencia es que, conforme penetramos en la nube de partículas virtuales que rodea a la partícula, vemos más y más a la partícula desnuda, sin apantallamiento, y es por ello que su carga aumenta progresivamente. Desde esta perspectiva, la carga desnuda e_0 es literalmente la carga de la partícula pelona, sin su nube. Y en efecto, podemos ver que

$$\alpha_{\text{ef}}(r \sim \frac{1}{\Lambda}) \underset{\text{p. 802}}{\sim} \frac{\alpha}{1 - \alpha \ln \Lambda} \underset{\text{p. 795}}{\sim} \frac{\alpha}{Z_3} \underset{\text{p. 797}}{=} \alpha_0 \quad \checkmark$$

Parlemos ahora a la autoenergía del electrón (p.757),

$$-i\Sigma(p) = \underbrace{\text{diagrama 1}}_{\equiv -i\Sigma_{1kz}(p)} + \underbrace{\text{diagrama 2}}_{i(\delta Z_2^{(1)} p - \delta m^{(1)})} + \mathcal{O}(e^4).$$

Siguiendo por caminos similares a los que usamos para $\Pi^{\mu\nu}(p)$,
puede mostrarse (Tarea 15) que

$$-i\Sigma_{1kz}(p) = \frac{-ie^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\overset{\text{Feynman}}{\Gamma(2-d/2)}}{[(1-x)m^2 + xm^2 - x(1-x)p^2]^{2-d/2}} (d \cdot m - (d-2)x p).$$

masa ficticia de foton para divergencia IR ↑ *polo $\frac{2}{\epsilon}$ en $d=4-\epsilon$: divergencia logarítmica* *usando Γ^{μ} en d dim*

Usando nuestros condiciones de renormalización (I) y (II)
(p.749), $\Sigma=0 = d\Sigma/2p$ en $p=m$, esto implica que

$$m\delta Z_2^{(1)} - \delta m^{(1)} = \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-d/2)}{[(1-x)^2 m^2 + xm^2]^{2-d/2}} (d(1-x) + 2x),$$


$$\delta Z_2^{(1)} = \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-d/2)}{[(1-x)^2 m^2 + xm^2]^{2-d/2}} \left[-(d-2)x + (2-\frac{d}{2}) \frac{2x(1-x)m^2}{(1-x)^2 m^2 + xm^2} (d(1-x) + 2x) \right],$$

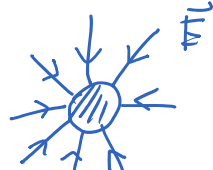
con lo cual $-i\Sigma(p)$ es finito a este orden. ✓

Vemos que tanto δm como δz_2 son logarítmicamente divergentes, $\propto \Gamma(2-\frac{d}{2}) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} \sim \ln \Lambda$. Y en particular, $\delta m \sim e^2 m \ln \Lambda$, tal como habíamos anticipado en la p. 758, de modo que $\delta m = 0$ si $m = 0$. Podemos notar que esto es muy diferente al caso del campo escalar que vimos en la p. 665, $\delta m^2 \sim \Lambda^2$. Es decir, el paso de masa desnuda a masa física es drásticamente distinto en ambos casos (ver pp. 649, 734):

escalar $m_0^2 = \frac{m^2 + \delta m^2}{z} \sim m^2 + \Lambda^2$ vs. espino $m_0 = \frac{m + \delta m}{z_2} \sim m + m \ln \Lambda$.

Es por esta diferencia que lo que nos preocupa en el "problema de jerarquía" del Modelo Estándar (¿con $\Lambda \sim m_{\text{Planck}} \sim 10^{19}$ GeV?) es la masa del Higgs ($m \sim 10^2$ GeV), no la de los fermiones (ni la de los bosones de norma).

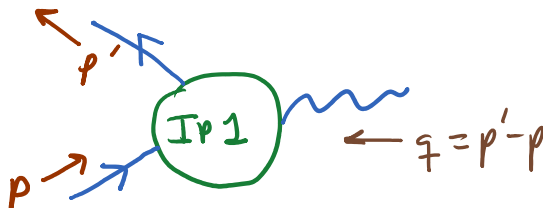
En QED, la diferencia que hemos calculado entre m_0 y m se debe al diagrama , es decir, al hecho de que el electrón puede sentir el campo electromagnético que él mismo genera.

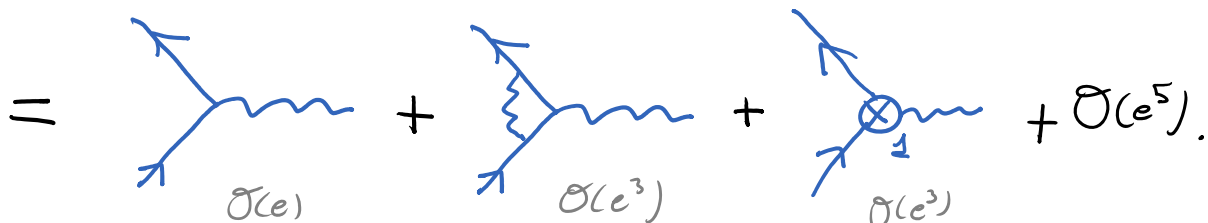
Esta autointeracción existe incluso en el caso clásico: si modelamos al electrón como una esfera cargada de radio $r_A \sim 1/\Lambda$, su energía electrostática es $E \sim e^2/r_A \sim e^2 \Lambda$, y contribuye .

vs. resultado cuántico $e^2 m \ln \Lambda \ll e^2 \Lambda$

entonces $\delta m = E \sim e^2 \Lambda$ a la masa física $m = m_0 + \delta m$.


Solo por resta analizan el vértice vestido (p.758)

$$-ie \Gamma^\mu(p', p) \equiv$$


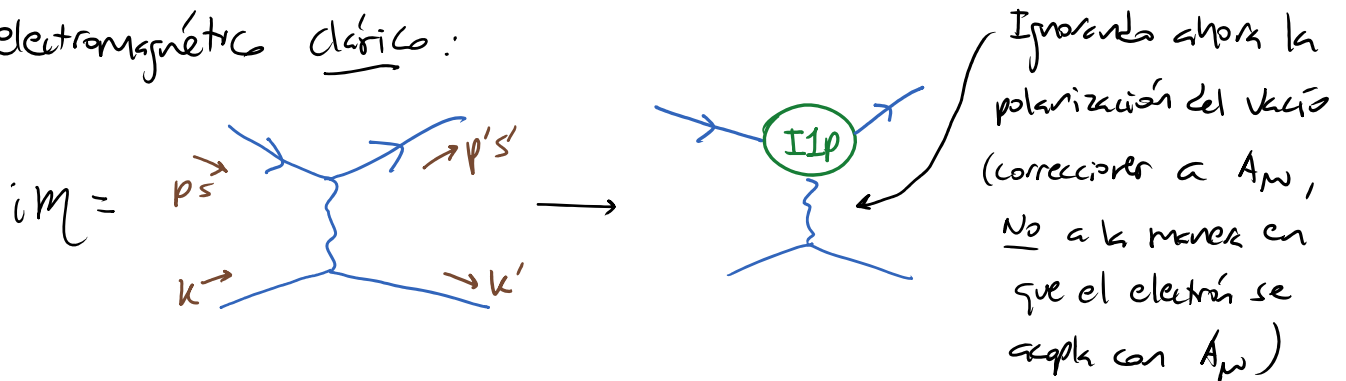
$$=$$


$$+ \mathcal{O}(e^5).$$

Nuestra condición de renormalización (IV) (p.753), se refiere a este vértice para $p = m$, $p' = m$ y $q = p' - p = 0$. Y

la aplicación física que nos interesará es estudiar la corrección que el diagrama  implica para la manera en que el electrón se acopla al campo electromagnético. Para

ello, queremos examinar un proceso de dispersión del electrón con otra partícula cargada o con un potencial electromagnético clásico:



es decir,

$$iM = -ie (\bar{u}^s(p') \gamma^\mu u^s(p)) \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{q^2} \tilde{J}^\nu(k', k)$$

\nwarrow \nearrow
 pater
 exte^{er}

\nwarrow \nearrow
 $\Gamma^\mu(p', p)$ \leftarrow $q = p' - p$

p.ej., $-ie \bar{u}^r(k') \gamma^\nu u^r(k)$

$$\rightarrow -ie (\bar{u}^s(p') \Gamma^\mu(p', p) u^s(p)) \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{q^2} \tilde{J}^\nu(k', k)$$

ó $\tilde{A}_\mu^{cl}(q)$ clásico campo electromagnético
 se corrige a Γ^μ

$$(L_{int} = -e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu^{cl}(x) \Rightarrow \text{vértice } \otimes = -ie \gamma^\mu A_\mu^{cl}(x).)$$

Para nuestros propósitos, entonces, nos centraremos en concentrarnos en $-ie \Gamma^\mu(p', p)$ para $p = m$, $p' = m$, con $q = p' - p$ no necesariamente cero. Podemos inferir la estructura genérica de $-ie \Gamma^\mu(p', p)$ con argumentos de simetría.

Las reglas de Feynman involucran solo a γ^μ , p^μ , p'^μ y constantes como e y m . Dado que Γ^μ es un vector, debe entonces tomar la forma

$$\Gamma^\mu = F(q^2) \gamma^\mu + G(q^2) (p' + p)^\mu + H(q^2) (p' - p)^\mu,$$

con F, G y H funciones de q^2 , la única variable disponible en nuestra situación de interés (recordemos en particular que $p^2 = m^2 = p'^2$).

Adicionalmente, la identidad de Ward (p.637) implica que debemos tener

↙ equivale a tener fotón longitudinal

$$0 = \int_{\mu} M^{\mu\nu} \propto \int_{\mu} \bar{u}(p') \Gamma^{\mu\nu}(p', p) u(p)$$

$$= (p' - p)_{\mu} \bar{u}(p') [F \gamma^{\mu} + G(p' + p)^{\mu} + H(p' - p)^{\mu}] u(p)$$

$$= F \bar{u}(p') \underbrace{(p' - p)}_{\substack{\text{cc. de Dirac} \\ m - m = 0}} u(p) + G \bar{u}(p') u(p) \underbrace{(p'^2 - p^2)}_{m'^2 - m^2 = 0} + H \bar{u}(p') u(p) \int_{\mu}^2,$$

de donde concluimos que necesariamente $H = 0$.

Llegamos entonces a

$$\Gamma^{\mu\nu}(p', p) = \gamma^{\mu} F(\int_{\mu}^2) + (p' + p)^{\mu} G(\int_{\mu}^2).$$

L15: 12/10/17 ~~12/10~~

Es habitual reescribir esto usando la "identidad de Gordon"

$$\bar{u}(p') [\gamma^{\mu} \gamma^{\nu}] (p' - p)_{\nu} u(p) = \bar{u}(p') \left[\underbrace{\gamma^{\mu} (p' - p)_{\nu}}_{\substack{\rightarrow \\ m}} - \underbrace{(p' - p)_{\nu} \gamma^{\mu}}_{\substack{\leftarrow \\ m}} \right] u(p)$$

$$= \bar{u}(p') \left[\gamma^{\mu} p'_{\nu} + p_{\nu} \gamma^{\mu} \right] u(p) - 2m \bar{u}(p') \gamma^{\mu} u(p),$$

$$\underbrace{-p'_{\nu} \gamma^{\mu} + p_{\nu} \{ \gamma^{\mu}, \gamma^{\nu} \}}_{\substack{\leftarrow m \\ = -m \gamma^{\mu} + 2p'_{\nu}}} \quad \underbrace{-\gamma^{\mu} p_{\nu} + 2p_{\nu}^{\mu}}_{\substack{\rightarrow \\ = -\gamma^{\mu} m + 2p^{\mu}}} = -\gamma^{\mu} m + 2p^{\mu}$$

$$= 2(p + p')^{\mu} \bar{u}(p') u(p) - 4m \bar{u}(p') \gamma^{\mu} u(p),$$

{ $\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}$ } = $2\eta^{\mu\nu}$

es decir,

$$m \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \frac{(p'+p)^\mu}{2} \bar{u}(p') u(p) - \bar{u}(p') \frac{[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}{4} \not{p}_\nu u(p)$$

p.223 $-i S^{\mu\nu} \equiv -i \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}$

generador de Lorentz ↗

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Esta identidad nos permite reescribir

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) &= \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) F(\zeta^2) + \underbrace{(p'+p)^\mu \bar{u}(p') u(p)}_{2m \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) - 2i \bar{u}(p') S^{\mu\nu} \not{p}_\nu u(p)} G(\zeta^2) \\ &= \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu (F(\zeta^2) + 2m G(\zeta^2)) - 2i S^{\mu\nu} \not{p}_\nu G(\zeta^2) \right] u(p), \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(\zeta^2) + i S^{\mu\nu} \frac{\not{p}_\nu}{m} F_2(\zeta^2)$$

cuando

$$p = m, p' = m$$

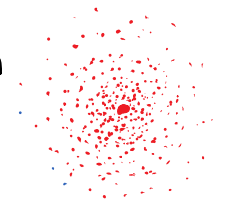
↑ mismas unidades ↓

donde $F_1(\zeta^2) \equiv F(\zeta^2) + 2m G(\zeta^2)$ y $F_2(\zeta^2) \equiv -2m G(\zeta^2)$ se

comportan como factores de forma, y físicamente, codifican la

estructura interna del electrón (o la partícula en cuestión), en lo que se refiere a su acoplamiento

al campo electromagnético.



↑ interacción
cuántica del
fermión ψ
cf. p. 801

Podemos notar que en términos de estos factores de forma, nuestra condición de renormalización (IV) (p.753),

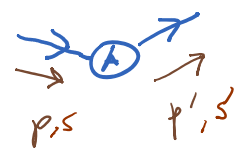
$$-ie \Gamma^\mu(p', p) \Big|_{p'=p=m} = -ie \gamma^\mu, \quad \Rightarrow q = p' - p = 0, \quad p^2 = m^2 = p'^2$$

dice simplemente que \leftarrow a todos los órdenes en e^2

$$\boxed{F_1(q^2=0) = 1} \quad \cdot \quad (IV')$$

Sabemos además que $F_1(q^2) = 1 + O(e^2)$, $F_2(q^2) = 0 + O(e^2)$.
para cualquier q

223: 24/01/13 L 03/04/19

Para entender el significado de $F_1(q^2)$ y $F_2(q^2)$ en más detalle, consideremos la amplitud de dispersión de un electrón sobre un fondo electromagnético clásico (pp.807-8) y estático, 

$$2\pi \delta(p'^0 - p^0) iM = -ie (\bar{u}^s(p') \Gamma^\mu(p', p) u^s(p)) \hat{A}_\mu^{cl}(q)$$

\leftarrow solo la energía se conserva

Si se trata de un potencial electrostático, $A_\mu^{cl}(x) = (\phi(x), \vec{0})$, entonces $\tilde{A}_\mu^{cl}(q) \equiv \int d^4x e^{iq \cdot x} A_\mu^{cl}(x) = (2\pi \delta^{(0)}(q^0) \tilde{\phi}(\vec{q}), \vec{0})$, y

$$iM = -ie \bar{u}^s(p') \Gamma^\mu(p', p) u^s(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + i \gamma^5 \frac{q_i}{m} F_2(q^2)$ p.810

$$= -ie \bar{u}^s(p') \left[\gamma^0 F_1(q^2) + i \gamma^5 \frac{q_i}{m} F_2(q^2) \right] u^s(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

Para un fondo cuya variación espacial sea muy gradual (en escalas

macroscópicas), $\tilde{\phi}(\vec{q})$ estará concentrado alrededor de $\vec{q}=0$, así que es una buena aproximación tomar el límite $\vec{q} \rightarrow 0$ en el elemento de matriz espinorial:

$$iM \approx -ie \underbrace{\bar{u}^{s'}(p')}_{u^{s't}(p)} \left[\gamma^0 F_1(0) + i \cancel{S}^{oi} \frac{q_i}{m} F_2(0) \right] u^s(p) \tilde{\phi}(\vec{q})$$

$$= -ie F_1(0) \tilde{\phi}(\vec{q}) \underbrace{u^{s't}(p) u^s(p)}_{p.259 \quad 2p^0 \delta^{s's'} \approx 2m \delta^{s's'}} \cdot \begin{array}{l} \text{espín no cambia en} \\ \text{esta dispersión} \\ \text{en el límite} \\ \text{no relativista} \end{array}$$

Recordando que el factor de $2m$ proviene de nuestra normalización relativista para los estados ($p, \mathcal{H} : \langle p' | p \rangle = 2p^0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})$), y es por tanto natural omitirlo en el límite no relativista, vemos que esta amplitud corresponde a la dispersión de un electrón no relativista sobre un potencial $V(\vec{x}) = e F_1(0) \phi(\vec{x})$. ← carga eléctrica total (en unidades de e) Con ello verificamos que nuestra condición (IV'), $F_1(0) = 1$, es justamente lo necesario para que e sea en verdad la carga física del electrón. Y entendemos que $F_1(q^2 \neq 0)$ contiene información sobre cómo responde el electrón a un potencial electrostático que varía especialmente (en este caso, contribuye también $F_2(q^2 \neq 0)$).

Repetimos ahora el análisis con un potencial magnetostático,

$$A_m^{cl}(x) = (0, \vec{A}(\vec{x})) : \Gamma^j(p', p)$$

$$iM = -ie \bar{u}^s(p') \left[\gamma^j F_1(\vec{\zeta}^2) + i S^{jk} \frac{F_k}{m} F_2(\vec{\zeta}^1) \right] u^s(p) \tilde{A}_j(\vec{\zeta}) .$$

↑ porque $\vec{\zeta}^0 = 0$

Si nuevamente aproximamos $\vec{\zeta} = 0$ en el elemento de matriz espinorial, el término con F_2 se anula de inmediato, y el de F_1 también, porque

en el límite no relativista, la definición (p.256) $u^s(p) \equiv \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}$

junto con (p.229) $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

conduce a $\not{p} + m \approx m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $u^s(p) \approx \frac{2m}{2\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}$, y por tanto

$$\bar{u}^s(p) \gamma^j u^s(p) \approx (\sqrt{m})^2 \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger} & \xi^{s\dagger} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 0 .$$

Para entender el efecto del potencial magnetostático al orden más bajo en la variación espacial, necesitamos entonces conservar términos lineales en $\vec{\zeta}$ (\Leftrightarrow lineales en \vec{p} y \vec{p}'):

$$u^s(p) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{pmatrix} m\mathbb{1} & m\mathbb{1} - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ m\mathbb{1} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & m\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \xi^s \\ \left(1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \xi^s \end{pmatrix} .$$

↑ $m + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} + \dots$

En el término con $F_1(\vec{\zeta}^2)$, esto conduce a

$$u^s(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \zeta^s \\ \left(1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \zeta^s \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}^{s'}(p') \gamma^j u^s(p) \approx (\sqrt{m})^2 \left(\zeta^{s't} \left(1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \zeta^{s'} \right) \underbrace{\left(\begin{matrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{matrix} \right)}_{\gamma^j} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \zeta^s \\ \left(1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \zeta^s \end{pmatrix}$$

$$\approx m \begin{pmatrix} \zeta^{s't} & \zeta^{s't} \\ -\zeta^{s't} \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m} & \zeta^{s't} \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \zeta^s \\ +\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \zeta^s \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -\zeta^{s't} \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m} & \zeta^{s't} \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m} \\ \zeta^{s't} & \zeta^{s't} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^s \\ \zeta^s \end{pmatrix}$$

$$= 2m \zeta^{s't} \left(\sigma^j \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} + \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m} \sigma^j \right) \zeta^s$$

$$\underbrace{\frac{p^k}{2m} \sigma^j \sigma^k}_{\delta^{jk} + i \epsilon^{jkl} \sigma^l} = \frac{p^j}{2m} + \frac{i p^k}{2m} \epsilon^{jkl} \sigma^l \quad \text{p.229}$$

$$= (p+p')^j \underbrace{\zeta^{s't} \zeta^s}_{\delta^{s's}} + i \zeta^{s't} \left(p^k \epsilon^{jkl} \sigma^l + \underbrace{p'^k \epsilon^{kjl} \sigma^l}_{-p'^k \epsilon^{jkl}} \right) \zeta^s$$

$$\underbrace{-q^k \epsilon^{jkl} \sigma^l}_{\quad} \quad q = p' - p$$

factor por normalización relativista

$$= 2m \zeta^{s't} \left(\frac{(p+p')^j}{2m} - \frac{i \epsilon^{jkl} q^k \sigma^l}{2m} \right) \zeta^s$$

El término con F_2 y g_T tiene un factor explícito de q_k , así que en este caso sí podemos quedarnos solo con la expresión para los espinores a orden más bajo en \vec{p} , $u^s(p') \approx u^s(p) \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} \zeta^s \\ \zeta^s \end{pmatrix}$:

$$\bar{u}^{s'}(\rho') \left(iS^{jk} \frac{q_k}{m} \right) u^s(\rho) \simeq (\sqrt{m})^2 \underbrace{\left(\begin{matrix} \xi^{s't} & \xi^{s't} \end{matrix} \right)}_{\left(\begin{matrix} \xi^{s't} & \xi^{s't} \end{matrix} \right)} \underbrace{\left(\begin{matrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{matrix} \right)}_{\gamma^0} \left(iS^{jk} \frac{q_k}{m} \right) \underbrace{\left(\begin{matrix} \xi^s \\ \xi^s \end{matrix} \right)}_{\left(\begin{matrix} \xi^s \\ \xi^s \end{matrix} \right)}$$

$$= 2m \xi^{s't} \left(-i \frac{\epsilon^{jkl} q_k \sigma^l}{2m} \right) \xi^s.$$

Juntamos los 2 resultados,

$$iM = -ie \bar{u}^{s'}(\rho') \left[\gamma^j F_1(\vec{q}) + iS^{jk} \frac{q_k}{m} F_2(\vec{q}) \right] u^s(\rho) \tilde{A}_j^{\text{cl}}(\vec{q})$$

$$\simeq -ie 2m \xi^{s't} \left[\frac{(p+p')^j}{2m} F_1(0) - \frac{i\epsilon^{jkl} q_k \sigma^l}{2m} (F_1(0) + F_2(0)) \right] \xi^s \tilde{A}_j^{\text{cl}}(\vec{q})$$

El primer término que (después de omitir el factor de normalización relativista $2m$), $-ie \frac{(p+p')^j}{2m} \tilde{A}_j^{\text{cl}}(\vec{q}) \delta^{ss'}$, es espín no cambia justamente lo que esperamos a partir del Hamiltoniano para una partícula cargada de cualquier espín no relativista en un campo externo,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\vec{p}} - e \vec{A}(\hat{\vec{x}}))^2 - e\phi(\hat{\vec{x}}) \quad \left(L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - e\phi + e \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} \right)$$

$$= \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{e}{2m} (\hat{\vec{p}} \cdot \vec{A}(\hat{\vec{x}}) + \vec{A}(\hat{\vec{x}}) \cdot \hat{\vec{p}}) + \vec{A}^2(\hat{\vec{x}}), \quad -e \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}$$

cuy elemento de matriz entre estados con momento definido contiene

$$-\frac{e}{2m} \langle \vec{p}' | (\hat{\vec{p}} \cdot \vec{A}(\hat{\vec{x}}) + \vec{A}(\hat{\vec{x}}) \cdot \hat{\vec{p}}) | \vec{p} \rangle = -\frac{e}{2m} (p'+p)^j \tilde{A}_j^{\text{cl}}(\vec{q}) \quad \checkmark$$

El segundo término, en cambio,

$$ie 2m \zeta^{\dagger} \left(- \frac{i e \hbar^2}{2m} \zeta^{\dagger} \sigma^{\lambda} (1 + F_2(0)) \right) \zeta^{\nu} \tilde{A}_a^j(\vec{r})$$

$$= i 2m \zeta^{\dagger} \left[\frac{e}{2m} \sigma^{\lambda} (1 + F_2(0)) \right] \zeta^{\nu} \underbrace{(-i e \hbar^2 \zeta^{\dagger} \tilde{A}_{cl}^j(\vec{r}))}_{= \tilde{B}^{\lambda}(\vec{r}) \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}},$$

expresa la manera en la que el espín del electrón se acopla al campo magnético: vemos un potencial de interacción

$$\hat{V} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}(\hat{\vec{x}}),$$

con el momento magnético del electrón dado por

$$\hat{\vec{\mu}} \equiv \frac{e}{m} \hat{S} (1 + F_2(0)).$$

$$\uparrow \equiv \frac{\sigma}{2} \text{ espín del electrón}$$

Es habitual escribir la relación entre el espín y el momento magnético de una partícula en la forma

$$\vec{\mu} = g \underbrace{\left(\frac{e}{2m} \right)}_{\equiv -\mu_B \text{ magnetón de Bohr}} \vec{S}, \quad -|e|$$

con g el llamado factor g de Landé. De la deducción anterior

veremos entonces que el factor g del electrón está dado por

$$g = 2 + 2F_2(0),$$

↙ carga magnética (dipolar)


lo cual establece el significado físico de $F_2(0)$. Más en general, aprendemos que $F_2(\frac{q^2}{\Lambda^2})$ codifica la manera en que el electrón responde a un campo magnético no uniforme (también contribuye $F_1(\frac{q^2}{\Lambda^2})$).

A nivel árbol, $F_2^{(0)}(0) = 0$, y por tanto $g^{(0)} = 2$, que es la famosa predicción de la teoría de Dirac. Las correcciones cuánticas (lazos) son de $\mathcal{O}(e^2)$ e implican una pequeña desviación del valor de Dirac,

$$a \equiv \frac{g-2}{2} = F_2(0),$$

conocida como el momento magnético anómalo del electrón.

La posibilidad de reescribir el vértice $\Gamma^\mu(p', p)$ en términos de $F_1(\frac{q^2}{\Lambda^2})$ y $F_2(\frac{q^2}{\Lambda^2})$ surge a partir de las simetrías, así que aplica igualmente para cualquier partícula de espín $1/2$, incluyendo partículas compuestas como el protón. En este último caso, por supuesto no tenemos por qué esperar que

los valores de la teoría de Dirac $F_1(0)=1$ y $F_2(0)=0$ dan una buena aproximación (p.ej., $g_{proton}=5.58569...$). Y peor aún, NO tenemos una buena manera de calcular $F_1(q^2)$ y $F_2(q^2)$, porque el vértice electromagnético $\Gamma^\mu(p',p)$ recibe correcciones por la interacción fuerte (p.ej., ) en el régimen fuertemente acoplado.

Aun así, los factores de forma $F_1(q^2)$ y $F_2(q^2)$ son una manera útil de parametrizar las amplitudes de dispersión del protón (p.ej.), y por tanto, las secciones eficaces medidas en los experimentos.

[Ver p.ej. Peskin problems 6.1.]

Ya que entendamos muy bien la forma que puede tomar el vértice $\Gamma^\mu(p',p)$, podemos proceder al cálculo del diagrama correspondiente a 1 lazo para el electrón en QED (p.758,806),

$$\begin{aligned}
 -ie\Gamma^\mu(p',p) &= \underbrace{\text{tree}}_{D=0} + \underbrace{\text{1-loop}} + \underbrace{\text{2-loop}} + O(e^5) \\
 &= -ie\gamma^\mu F_1^{(0)}(q^2) - ie\Gamma_{2\text{loop}}^\mu(p',p) - ie\delta Z_1^{(1)}\gamma^\mu \\
 &\stackrel{p.809}{=} \underbrace{\gamma^\mu F_1^{(1)}(q^2) + iS^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{m} F_2^{(1)}(q^2)}_{\text{Ward}} = \delta Z_2^{(1)} \text{ (Ward)} \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{que tenemos ya en la p.805}
 \end{aligned}$$

Podemos notar aquí que la parte divergente de Γ_{1122}^{μ} estará únicamente en $F_1^{(1)}(q^2)$, mientras que el factor de forma relacionado con el momento magnético anómalo del electrón, $F_2^{(1)}(q^2)$, es finito (no tiene tampoco divergencias IR, y para calcularlo, entonces, no es necesario elegir un método de regularización específico).

Llevando a cabo los cálculos necesarios con regularización dimensional en $d=4-\epsilon$ (Tarea 15), se encuentra que

logarítmicamente

pdo. $\frac{2}{\epsilon}$

$$F_1^{(1)}(q^2) = \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1+x_2+x_3-1) \left[\frac{(d-2)^2 \Gamma(2-d/2)}{2M^{4-d}} \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(3-d/2)}{M^{6-d}} \left\{ q^2 (2(1-x_1)(1-x_2) - (4-d)x_1x_2) + m^2 (2(1-4x_3-x_3^2) - (4-d)(1-x_3)^2) \right\} \right]$$

finito en $d=4$

parámetros de Feynman por combinar 3 denominadores

$$\text{con } M^2 \equiv (1-x_3)^2 m^2 + x_3 m^2 - x_1 x_2 q^2.$$

↑ regular IR

Imponiendo nuestra condición de renormalización (IV') (p.811), $F_1(q^2=0)=1 \Rightarrow F_1^{(1)}(0) + \delta Z_1^{(1)} = 0$, obtenemos a partir de aquí

← habiendo hecho ya $\int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$

$$\delta Z_1^{(1)} = -F_1^{(1)}(0) = -\frac{e^2 \omega^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx_3 \left[\frac{(d-2)^2 \Gamma(2-d/2)}{2 \underline{M}^{4-d}} + \frac{\Gamma(3-d/2)}{\underline{M}^{6-d}} m^2 (2(1-4x_3 - x_3^2) - (4-d)(1-x_3)^2) \right]$$

donde $\underline{M}^2 \equiv M^2|_{q^2=0} = (1-x_3)^2 m^2 + x_3 m^2$ (con lo cual efectivamente $\delta Z_1^{(1)} = \delta Z_2^{(1)}$, ver p. 805 ✓). Puede verificarse que esto implica que $F_1^{(1)}(q^2)$ es finito. ✓

El otro factor de forma resulta ser (Tarca 15)

$$F_2^{(1)}(q^2) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 \frac{dx}{1-x(1-x)q^2/m^2} = \frac{e^2}{8\pi} \frac{4m^2}{q^2 \sqrt{4m^2 - q^2}} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{4m^2 - q^2}} \right).$$

De aquí podemos obtener en particular

$$F_2^{(1)}(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

y por tanto la primera contribución al momento magnético anómalo del electrón (p. 817),

$$a \equiv \frac{g-2}{2} = F_2(a) = \frac{\alpha}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2),$$

que obtuvo por primera vez

Schwinger, en 1948.

LG: 08/04/19

