

de donde

$$\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

← Notamos que esta fórmula está bien definida para d no entera

(Podemos verificar que esta fórmula reproduce los

casos conocidos

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi \quad \checkmark, \quad \Omega_2 = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = 4\pi \quad \checkmark,$$

$\leftarrow 0! = 1$
 $\leftarrow \sqrt{\pi}/2$

$$\Omega_3 = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2 \quad \checkmark \quad - \text{ver p. 665} \quad)$$

$\leftarrow 1! = 1$

LF: 25/03/11 (-30 min)

Podemos también procesar la integral radial:

$$\begin{aligned} I(d, M^2) &= \frac{\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \mu^{4-d} \int_0^\infty dL \, L^{d-1} \frac{1}{(L^2 + M^2)^2} \\ &= \frac{\Omega_{d-1}}{2(2\pi)^d} \mu^{4-d} \int_0^\infty d(L^2) \frac{(L^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(L^2 + M^2)^2} \end{aligned}$$

← Ya desde aquí, la integral está bien definida para d no entera: d es solo un parámetro

$$y = \frac{M^2}{L^2 + M^2} = \frac{\Omega_{d-1}}{2(2\pi)^d} \left(\frac{M^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dy y^{1-\frac{d}{2}} (1-y)^{\frac{d}{2}-1}$$

$L^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots$ corresponde a $y = \int_0^1$

Figura aquí la representación integral de la función beta,

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \equiv B(\alpha, \beta),$$

así que tenemos el resultado final

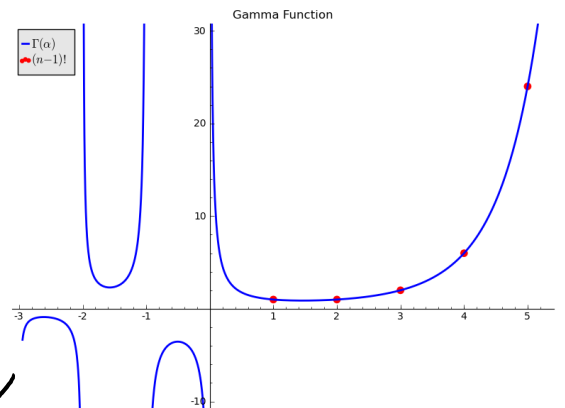
$$I(d, M^2) = \frac{1}{2(2\pi)^d} \frac{\Omega_{d-1}}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{M^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{M^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

$\leftarrow 1! = 1$

$\Gamma(z)$ tiene polos aislados en $z=0, -1, -2, \dots$, así que $I(d, M^2)$ tiene polos en $d=4, 6, 8, \dots$

Para encontrar el valor cerca de 4, en $d=4-\epsilon$, podemos utilizar la relación



$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)$$

cte. de Euler-Mascheroni,
 $\gamma = -\Gamma'(1) = 0.57721566\dots$ ¡NO confundir con γ^m !

(que es consecuencia de la representación de Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

para deducir que $\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{2 - \frac{d}{2}}$ $d=4-\epsilon$

$$I(4-\epsilon, M^2) = \frac{(4\pi)^{\epsilon/2}}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{\epsilon/2}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \underbrace{\left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right)}_{\exp\left(\frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi)\right)} \underbrace{\left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right)}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right].$$



Vemos aquí que lo que hubiere sido una divergencia logarítmica al regularizar con un corte de fuerza bruta, $\sim \ln \Lambda$, aparece en regularización

dimensional simplemente como un polo. \swarrow a L lazos, $\frac{1}{\epsilon^2} + \dots + \frac{1}{\epsilon}$

Es interesantemente, con este método de regularización las divergencias tipo potencia (cuadráticas, etc.) conducen igualmente a un polo (p.ej. resultado para $d=6$).

L19:17/01/23

Hemos visto que en QED en particular las divergencias UV se absorben al renormalizar, así que polos como el que hemos encontrado aquí se cancelarán con otros que aparecerán en $\delta Z_2, \delta Z_3, \delta Z_1, \delta m$. Exactamente qué parte finita sobra después de restar $\infty - \infty$ está determinado por las condiciones de renormalización utilizadas. Nosotros hemos elegido trabajar en el esquema de la capa de masa, que se abrevia "OS", por las siglas en inglés, pero otra posibilidad muy socorrida al trabajar en regularización

$$\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)$$

dimensional es el esquema de sustracción mínima, abreviado "MS", que consiste en restar exactamente el polo, y nada más. Una tercera opción es el esquema de sustracción mínima modificada, abreviado "MS", que además del polo, resta la constante de Euler-Mascheroni γ y el $\ln(4\pi)$ que frecuentemente lo acompañan. Esto equivale a trabajar con

$$\bar{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\gamma/2} \mu$$

como escala de renormalización en vez de μ .

De manera similar a como procesamos $I(d, M^2)$, se puede mostrar [ver Collins, capítulo 4] que

$$\mu^{2n-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{1}{(L^2 + M^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{n - \frac{d}{2}},$$

$$\mu^{2n-d-2r} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{(L^2)^r}{(L^2 + M^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - r) \Gamma(\frac{d}{2} + r)}{\Gamma(n) \Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{n - \frac{d}{2} - r}.$$

Necesitamos también ser capaces de hacer integrales con estructura tensorial $L^{\mu_1} L^{\mu_2} \dots L^{\mu_n}$ en el numerador. Por invariancia bajo rotaciones (\leftrightarrow Lorentz) ^(propiedad 3), estos integrales dan cero si n es impar, y en el caso par, deben dar un resultado proporcional a

$$(L^2)^{\frac{n}{2}} \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \dots \delta^{\mu_{n-1} \mu_n} + \text{permutaciones} \right).$$

\uparrow serían $\eta^{\mu_1 \mu_2}$, etc. en Minkowski

Tomando en cuenta que $\delta_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} = d$ ($\leftrightarrow \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = d$) en d dimensiones, podemos entonces simplemente reemplazar

$$L^\mu L^\nu \rightarrow \frac{1}{d} L^2 \delta^{\mu\nu} \quad (L^\mu L^\nu \rightarrow \frac{1}{d} L^2 \eta^{\mu\nu}),$$

$$L^\mu L^\nu L^\rho L^\sigma \rightarrow \frac{1}{d(d+2)} (L^2)^2 (\delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} + \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho}),$$

etc.

El último ingrediente que figura en nuestros diagramas para QED son las matrices de Dirac.

Estas pueden simplemente manipularse de manera formal como un conjunto de d matrices 4×4 (no

cambia el tamaño de los espinores) que satisfacen con definición atada
a $d=4$; para $d=2,3$
No tendremos las
verdaderas γ^{μ} s

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \text{tr}(\mathbb{1}) = 4$$

Y por tanto (usando $\eta^{\lambda\rho}\eta_{\lambda\rho} = d = 4 - \epsilon$, cf. p. 502)

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu} = -(2 - \epsilon)\gamma^{\nu},$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma_{\mu} = 4\eta^{\nu\rho} - \epsilon\gamma^{\nu}\gamma^{\rho},$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma_{\mu} = -2\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu} + \epsilon\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}.$$

Puede ser importante no perder de vista los términos proporcionales a ϵ , que darán una contribución finita al multiplicarse por un polo $\frac{1}{\epsilon}$. Aunque las partes finitas se fijan por los condicionales de renormalización, así que esto sería importante en el esquema MS o $\overline{\text{MS}}$; pero no en el OS.

Estamos listos entonces para proceder a cálculos concretos en QED a un lazo. Examinaremos primero la autoenergía del fotón (= polarización del vacío, pp. 745-749, 755-756),

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) \equiv \text{Diagram with a photon line from } \mu \text{ to } \nu \text{ and a loop labeled } \Pi(1) \text{ in a green circle.} \quad D=2$$

$$= i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \Pi(p^2) \quad \text{por Ward } p_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0 \text{ (Tarea 14)}$$

$$= \text{Diagram with a photon line from } \mu \text{ to } \nu \text{ and a fermion loop.} + \text{Diagram with a photon line from } \mu \text{ to } \nu \text{ and a tadpole loop.} + \mathcal{O}(e^4)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-i\delta Z_3^{(1)} (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu)}$

↑ contribución a 1 lazo

Debemos entonces calcular

$$i\Pi_{1\text{lazo}}^{\mu\nu}(p) \equiv \text{Diagram with a photon line from } \mu \text{ to } \nu \text{ and a fermion loop with momenta } k \text{ and } k+p.$$

$$= (-1)(-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k}+\not{p}-m} \right],$$

↑ por lazo de fermión (pp. 494-5) ↑ +iε sobreentendido

o lo que es lo mismo,

$$(-1)(-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{k-m} \gamma^\nu \frac{i}{k+p-m} \right]$$

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{(k+m)}{k^2-m^2} \gamma^\nu \frac{(k+p+m)}{(k+p)^2-m^2} \right].$$

En el numerador tenemos

$$\text{Tr} \left[\cancel{\gamma^\mu k} \cancel{\gamma^\nu k} + \cancel{\gamma^\mu k} \cancel{\gamma^\nu p} + \cancel{\gamma^\mu k} \cancel{\gamma^\nu m} + m \cancel{\gamma^\mu} \cancel{\gamma^\nu} k + m \cancel{\gamma^\mu} \cancel{\gamma^\nu} p \right]$$

p. 484 p. 483

$$k_\rho k_\sigma 4(\eta^{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\nu}) + k_\rho p_\sigma 4(\eta^{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\nu})$$

$$= 4(k^\mu k^\nu - \eta^{\mu\nu} k^2 + k^\mu k^\nu) + 4(k^\mu p^\nu - \eta^{\mu\nu} k \cdot p + p^\mu k^\nu)$$

$$+ \text{Tr} \left[m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \right]$$

p. 483

, así que

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = -4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k+p)^\nu + k^\nu (k+p)^\mu - \eta^{\mu\nu} (k \cdot (k+p) - m^2)}{(k^2 - m^2)((k+p)^2 - m^2)}.$$

A continuación, podemos combinar los denominadores

utilizando un parámetro de Feynman (p. 667), $\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)A + xB]^2}$

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k+p)^\nu + k^\nu (k+p)^\mu - \eta^{\mu\nu} (k \cdot (k+p) - m^2)}{\left[(1-x)(k^2 - m^2) + x(k^2 + 2k \cdot p + p^2 - m^2) \right]^2}.$$

$$\underbrace{k^2 - m^2 + x(2k \cdot p + p^2)}_{(k+xp)^2 + (x-x^2)p^2 - m^2} \quad \text{p. 668}$$

Definiendo $l^\mu \equiv k^\mu + xp^\mu$, $M^2 \equiv m^2 + (x^2 - x)p^2$, el denominador combinado es simplemente $[l^2 - M^2]^2$.

Reescribiendo el numerador en términos de l^μ ,

$$\begin{aligned} k^\mu (k+p)^\nu + k^\nu (k+p)^\mu - \eta^{\mu\nu} (k \cdot (k+p) - m^2) &= (l-xp)^\mu (l+(1-x)p)^\nu + \mu \leftrightarrow \nu \\ &\quad - \eta^{\mu\nu} ((l-xp) \cdot (l+(1-x)p) - m^2) \\ &= 2l^\mu l^\nu - \eta^{\mu\nu} l^2 + (1-2x)(l^\mu p^\nu + l^\nu p^\mu - \eta^{\mu\nu} l \cdot p) + 2(x^2-x)p^\mu p^\nu \\ &\quad + \eta^{\mu\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2). \end{aligned}$$

16: 27/03/19

Haciendo el cambio de variable de integración $k^\mu \rightarrow l^\mu = k^\mu + xp^\mu$, y tomando en cuenta que la región de integración es simétrica bajo $l^\mu \rightarrow -l^\mu$, de modo que

$$\int d^4 l l^\mu f_{\text{par}}(l) = 0,$$

obtenemos

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2l^\mu l^\nu - \eta^{\mu\nu} l^2 + 2(x^2-x)p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2)}{[l^2 - M^2]^2}.$$

Si hacemos ahora la rotación de Wick $l^0 = iL^0$, $\vec{l} = \vec{L}$ ($\Rightarrow l^2 = -L^2$),

llegamos a

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = -4i e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{2i \overset{\leftarrow}{=} i \delta_0^\mu i \delta_0^\nu L^\omega L^\nu + \eta^{\mu\nu} L^2 + 2(x^2-x) p^\omega p^\nu + \eta^{\mu\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2)}{[L^2 + M^2]^2}.$$

$\leftarrow \text{No rotamos } p^\omega$

Podemos ver aquí que si regularizamos con un corte abrupto $L^2 < \Lambda^2$, entonces la contribución dominante es una divergencia cuadrática,

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) \propto e^2 \Lambda^2 \eta^{\mu\nu},$$

que no respeta la identidad de Ward ($p_\omega \Pi^{\mu\nu} \neq 0$), y no puede cancelarse con el controtérmino

$$\text{wavy line with } \otimes_1 = -i \delta_{3,2}^{\text{dimensional}} (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\omega p^\nu).$$

Es decir, un corte de fuerza bruta viola la simetría $U(1)$ global \leftrightarrow conservación de la corriente \leftrightarrow invariancia de norma, tal como habíamos prometido/argumentado (pp. 768, 770).

Sabemos ya que podemos evitar esta dificultad utilizando la regularización dimensional, así que tomamos $d=4 \rightarrow d=4-\epsilon$, con $e^2 \rightarrow e^2 \mu^{4-d}$ para que e^2 siga siendo dimensional para todo d (p. 771), y procesamos por separado las integrales con/sin dependencia cuadrática de L^μ en el numerador. Con L^2 tenemos

L20: 19/04/23

$$e^2 \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{2i \delta^{\omega\nu} L^\omega L^\nu + \eta^{\omega\nu} L^2}{[L^2 + M^2]^2} \rightarrow e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{2i \delta^{\omega\nu} L^\omega L^\nu + \eta^{\omega\nu} L^2}{[L^2 + M^2]^2}$$

unidades de masa² y d

$$\stackrel{\text{p.786}}{=} e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{\frac{2}{d} i \delta^{\omega\nu} L^2 + \eta^{\omega\nu} L^2}{[L^2 + M^2]^2}$$

$$i \delta_0^\omega + \delta_0^\nu \delta^{\omega\nu} = -\eta^{\omega\nu} \rightarrow e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{(-\frac{2}{d} + 1) \eta^{\omega\nu} L^2}{[L^2 + M^2]^2}$$

$$\stackrel{\text{p.785}}{=} e^2 \mu^2 (-\frac{2}{d} + 1) \eta^{\omega\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} (\frac{\mu^2}{M^2})^{1-\frac{d}{2}}$$

1! = 1

$$= e^2 \eta^{\omega\nu} \frac{(-1)}{(4\pi)^{d/2}} \underbrace{\Gamma(2-\frac{d}{2})}_{\text{p.780}} \underbrace{(\frac{\mu^2}{M^2})^{2-\frac{d}{2}}}_{m^2 + (x^2-x)p^2 \text{ p.790}} M^2$$

Por otra parte, la integral sin L^2 en el numerador es

$$e^2 \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{2(x^2-x) p^\omega p^\nu + \eta^{\omega\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2)}{[L^2 + M^2]^2} \rightarrow e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{2(x^2-x) p^\omega p^\nu + \eta^{\omega\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2)}{[L^2 + M^2]^2}$$

masa² y d

$$\stackrel{\text{p.785}}{=} e^2 [2(x^2-x) p^\omega p^\nu + \eta^{\omega\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2)] \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} (\frac{\mu^2}{M^2})^{2-\frac{d}{2}}$$

1! = 1

Sumando estos 2 resultados tenemos de la primera integral

$$\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \left[-\eta^{\mu\nu} (m^2 + (x^2-x)p^2) + 2(x^2-x)p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} (m^2 - (x^2-x)p^2) \right]$$

$$\underbrace{-2(x^2-x) (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu)}$$

dependencia esperada para que $p_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$

↔ la identidad de Ward se respeta ✓

Recuperando el factor de $-4i \int_0^1 dx$ que habíamos dejado de lado, llegamos a

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) 8e^2 \int_0^1 dx (x^2-x) \left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}}$$

$d=4-\epsilon$
 \downarrow
 $\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$

\uparrow
 $m^2 + (x^2-x)p^2$ p.790

$$\underbrace{\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}_{\left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right) + \dots\right]}$$

$$\underbrace{\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots}_{\text{p.783}}$$

$$\frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right) - \gamma + \dots$$

es decir,

polo: divergencia logarítmica
 $\sim \ln \Lambda$ (NO cuadrática)

$$i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) = i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x^2 - x) \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2 + (x^2 - x)p^2}{4\pi\bar{\mu}^2}\right) - \gamma \right].$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-\ln\left(\frac{m^2 + (x^2 - x)p^2}{\bar{\mu}^2}\right) \text{ p.785}}$

A este orden, podemos concluir entonces que

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = \text{diagrama} + \text{diagrama} + \mathcal{O}(e^4)$$

$$= i\Pi_{1k_2}^{\mu\nu}(p) - i\delta Z_3^{(1)}(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) + \mathcal{O}(e^4)$$

$$= i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \Pi(p^2)$$

con

$$\Pi(p^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x^2 - x) \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2 + (x^2 - x)p^2}{4\pi\bar{\mu}^2}\right) - \gamma \right] - \delta Z_3^{(1)}.$$

Tal como mencionamos en la p.785, en el esquema de renormalización \overline{MS} (sustracción mínima), elegiríamos $\delta Z_3^{(1)}$ para cancelar al más ni menos que el polo $\frac{2}{\epsilon}$; mientras que en el esquema \overline{MS} (sustracción mínima modificada), cancelaríamos además el $-\gamma + \ln(4\pi)$. Pero nosotros aquí hemos elegido trabajar en el esquema OS (en la caps

de masa), donde exigimos que se cumple la condición (III) de la p.749,

$$0 = \Pi(0) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x^2-x) \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2 + (x^2-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right) - \gamma \right] - \delta Z_3^{(1)}$$

$$\Rightarrow \delta Z_3^{(1)} = \frac{e^2}{2\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) - \gamma \right] \underbrace{\int_0^1 dx (x^2-x)}_{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}}$$

Así que nuestro resultado para la autoenergía del fotón (= polarización del vacío) se reduce a

$$\Pi(p^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x-x^2) \ln\left(1 - (x-x^2) \frac{p^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}(e^4),$$

que es finito, como esperábamos. ✓

Podemos ahora extraer algunas consecuencias físicas de nuestro resultado. Sabemos de las pp. 747-749 que la autoenergía corrige el propagador completo del fotón de acuerdo con

$$\text{wavy line} \text{ (shaded circle)} \text{ wavy line} = \text{wavy line} \text{ (momentum } p) + \text{wavy line} \text{ (momentum } p) \text{ (IP1)} \text{ wavy line} + \text{wavy line} \text{ (momentum } p) \text{ (IP1)} \text{ (IP1)} \text{ wavy line} + \dots$$

$$\begin{array}{c} \text{w} \\ \text{w} \end{array} \begin{array}{c} \text{v} \\ \text{v} \end{array} = \frac{-i \eta_{\mu\nu}^{\xi}(p) + i \xi \pi(p^2) \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p^2}}{p^2 (1 - \pi(p^2))} \cdot$$

con ξ un parámetro arbitrario (multiplicador de Lagrange)

El hecho de que el polo se mantenga en $p^2=0$ indica que (si preservamos la identidad de Ward \leftrightarrow conservación de la corriente) el fotón NO adquiere masa por correcciones cuánticas.

Sabemos además (pp. 352, 582) que por invariancia de norma (\leftrightarrow conservación de corriente), $A_{\mu}(x) \simeq A_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \Theta(x)$ ó $\tilde{A}_{\mu}(p) \simeq \tilde{A}_{\mu}(p) - i p_{\mu} \tilde{\Theta}(p)$, los términos en el propagador del fotón que son proporcionales a p^{μ} o p^{ν} son físicamente irrelevantes (de donde se sigue en particular que cualquier valor de ξ conduce a los mismos resultados físicos), así que por simplicidad podemos quedarnos solo con

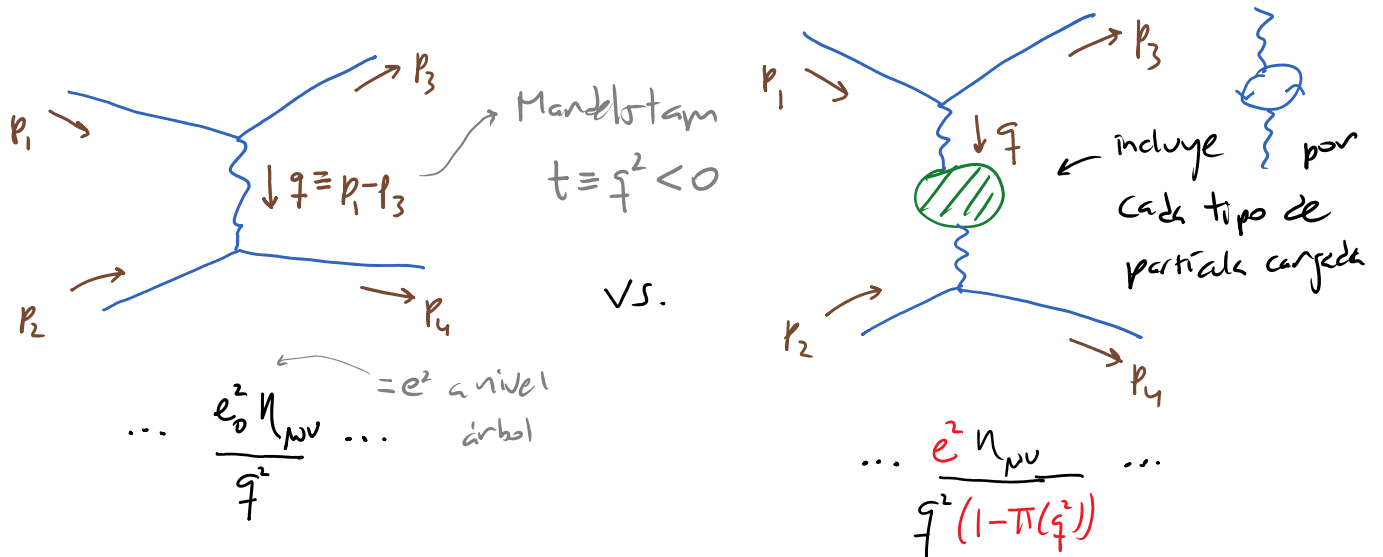
$$\begin{array}{c} \text{w} \\ \text{w} \end{array} \begin{array}{c} \text{v} \\ \text{v} \end{array} = \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{p^2 (1 - \pi(p^2))} \cdot$$

$\pi^{(1)}(p^2) + \mathcal{O}(e^4)$

L14: 10/10/17

Consideremos ahora un proceso de dispersión de 2 partículas cargadas, comparando el resultado a nivel árbol contra el resultado tomando en cuenta las correcciones debidas a k

autoenergía del fotón, e ignorando por ahora las correcciones al vértice, que dependen del tipo específico de partícula cargada (podríamos incluso hablar de 2 fuentes clásicas):



Un primer efecto físico de $\Pi(q^2)$, visible ya en el límite de baja transferencia de momento $q^2 \rightarrow 0$ (\leftrightarrow alto parámetro de impacto $r \rightarrow \infty$), es el reescalamiento que conecta al acoplamiento (o carga eléctrica) desnudo(a) e_0 con su contraparte renormalizado(a) e , que ya desde las pp. 734, 736 tendríamos identificado como

$$e = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} e_0 = \sqrt{Z_3} e_0,$$

↑ Ward p. 761

donde ahora sabemos (pp. 795) que

$$Z_3 = 1 + \delta Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) - \gamma \right] + \mathcal{O}(e^4).$$

Por definición, e es el acoplamiento/carga físicamente medible a gran distancia del electrón (o protón, etc.), tal que

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.0359991\dots} = 7.297352568 \times 10^{-3}$$

(y fue para asegurarnos de esto que exigimos que

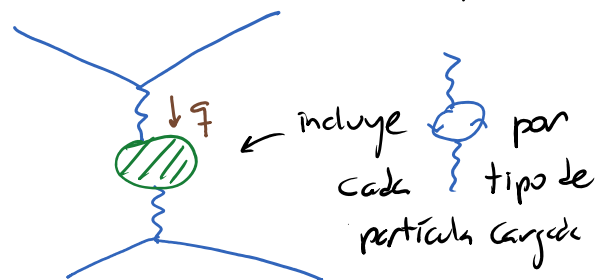
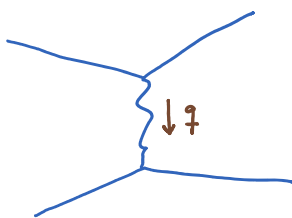
$\Pi(0)=0$). Lo que hubiera sido la carga de la partícula desnuda, en

cambio, es logarítmicamente divergente, $e_0 = \frac{e}{\sqrt{Z_3}} \propto \frac{1}{\epsilon} \sim \ln \Lambda$.

Este rescalamiento de la carga no es directamente observable.

Un segundo efecto de usar el propagador completo es que $\Pi(q^2)$ depende no trivialmente de q^2 , lo cual puede interpretarse como una carga dependiente de la transferencia de momento q^2 , o lo que es lo mismo, del parámetro de impacto r :

$$\alpha_0 \equiv \frac{e_0^2}{4\pi} \rightarrow \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} \text{ a } q^2=0 \rightarrow \alpha_{\text{ef}}(q^2) \equiv \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{1-\Pi(q^2)}$$



En el límite no relativista, tiene sentido describir el proceso de dispersión en términos de la interacción entre los 2 objetos cargados a través de un potencial $V(r)$. De la Tarea 5, sabemos que

$V(r)$ se obtiene esencialmente haciendo una transformada de Fourier espacial del propagador del fotón. Si solo tomamos en cuenta el diagrama a nivel árbol, el resultado es por supuesto el potencial de Coulomb,

$$V(r) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^2}{-\vec{q}^2} = -\frac{e^2}{4\pi r} = -\frac{\alpha}{r}$$

$\vec{q}^0 = p_1^0 - p_3^0 \approx m - m = 0$ $r = |\vec{r}|$
 en el límite no relativista

el signo por supuesto depende de los signos de las cargas de las 2 partículas

Si incluimos las correcciones debidas a la autoenergía del fotón,

$$V(r) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^2}{-\vec{q}^2} \frac{1}{(1 - \Pi(-\vec{q}^2))} \approx \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^2}{-\vec{q}^2} (1 + \Pi(-\vec{q}^2))$$

\uparrow
 p. 795 $\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x-x^2) \ln(1 + (x-x^2) \frac{\vec{q}^2}{m^2}) + \mathcal{O}(e^4)$

Considerando $\frac{\vec{q}^2}{m^2} \ll 1$ ($\Leftrightarrow r \gg 1/m$), y reteniendo solo la primera corrección, $\ln(1 + (x-x^2) \frac{\vec{q}^2}{m^2}) \approx (x-x^2) \frac{\vec{q}^2}{m^2}$,

$$V(r) \approx \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^2}{-\vec{q}^2} \left(1 + \underbrace{\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (x-x^2)^2 \frac{\vec{q}^2}{m^2}}_{1/30} \right)$$

$$= \frac{-e^2}{4\pi r} - \frac{e^4}{60\pi^2 m^2} \delta^{(3)}(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\vec{r})$$

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$

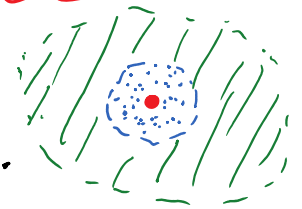
esto es solo una aproximación de función suave concentrada en $r \lesssim 1/m$

Esta corrección indica que la interacción electromagnética se vuelve más intensa a distancias pequeñas, y produce un corrimiento medible en los niveles de energía del átomo de hidrógeno:

$$\Delta E = \int d^3r |\psi(\vec{r})|^2 \left(-\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\vec{r}) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2$$

\swarrow función de onda del electrón \searrow aproximación aquí se refiere a $|\psi(r)|^2$ en $r \leq 1/m$
 \swarrow masa del electrón

La aproximación $\vec{q}^2 \ll m^2$ ($\leftrightarrow r \gg 1/m$) que estamos utilizando, donde $\Delta V(r) \propto \delta^{(3)}(\vec{r})$, es válida para este propósito porque la función de onda $\psi(\vec{r})$ está espaciada en una región del orden del radio de Bohr, $a_B \equiv \frac{1}{\alpha m} \sim 5 \times 10^{-11} \text{ m}$, ^{metros} que es mucho más grande que $\lambda_c \equiv \frac{1}{m} \sim 4 \times 10^{-13} \text{ m}$, la longitud de onda de Compton del electrón (\leftrightarrow tamaño de nube virtual), a su vez ^{ver p. 801} mucho mayor que el radio del protón $R \sim 10^{-15} \text{ m}$.



Para un estado con momento angular orbital l , $\psi(\vec{r}) \propto r^l$, así que $\psi(0) \neq 0$ solo para los estados de onda s , $l=0$. En el caso del estado $2s$, se tiene $|\psi(0)|^2 = \frac{\alpha^3 m^3}{8\pi}$,

y por tanto

$$\Delta E = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \left(\frac{\alpha^3 m^3}{8\pi} \right) = -1.12 \times 10^{-7} \text{ eV} \leftrightarrow \Delta \nu = \frac{\Delta E}{2\pi} = -37.1 \text{ MHz}$$

\uparrow corrimiento en frecuencia