$$\underbrace{(p'-p)_\mu}_{q_\mu} \underbrace{\frac{Z_3 \tilde{M}}{\tilde{M}_0}}_{1} \cancel{ie}\underbrace{\Gamma^\mu(p',p)}_{\Gamma^\mu(p,p)+\dots} = \cancel{ie}\frac{Z_1}{Z_2}\left[(p'-p)_\mu \gamma^\mu - \underbrace{\left(\Sigma(\not p') - \Sigma(\not p)\right)}_{\underbrace{(\not p'-\not p)}_{(p'-p)_\mu\gamma^\mu}\frac{d\Sigma(\not p)}{d\not p}+\dots}\right]$$

desarrollar para $p' \to p$:

Igualando los coeficientes de los términos lineales en $(p'-p)_\mu$, esto implica que

$$Z_2 \Gamma^\mu(p,p) = Z_1\left[\gamma^\mu - \gamma^\mu \frac{d\Sigma(\not p)}{d\not p}\right],$$

que evaluado en la capa de masa, $\not p = m$, y con la ayuda de nuestras condiciones de renormalización (II) y (IV), dice que

$$Z_2 \gamma^\mu = Z_1 \gamma^\mu - 0,$$

es decir,

p. 736 $e \equiv \frac{Z_2}{Z_1}\sqrt{Z_3}\, e_0$

$$\boxed{Z_1 = Z_2} \longleftrightarrow \boxed{e = \sqrt{Z_3}\, e_0},$$

justo como necesitamos para que $\mathcal{L}_{QED,ren}$

sea invariante de norma (ver pp. 735-736).

En resumen, hemos visto que la identidad de Ward relaciona al vértice vestido con el propagador vestido del electrón, de modo que ambas estructuras se renormalizan de manera coordinada, y al final del día la renormalización de la carga $e_0 \to e = \sqrt{Z_3}\, e_0$ se debe solo a la polarización del vacío ($\delta Z_3 \leftrightarrow \Pi^{\mu\nu}$).

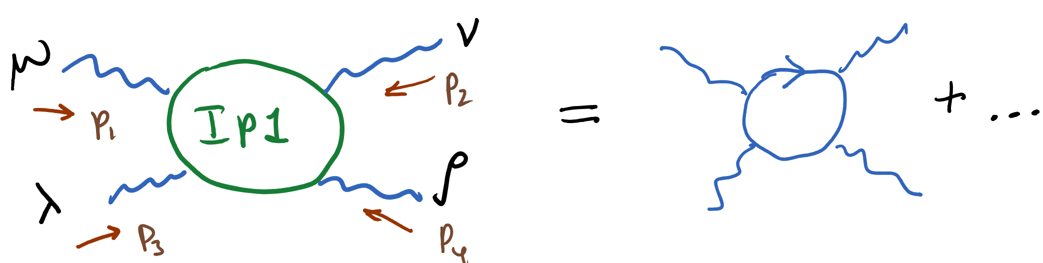
Esto se vuelve todavía más importante en una teoría con distintos campos cargados ψ_c con carga respectiva q_c (p.ej., electrón y protón o quarks), porque dada la relación $q_c = \frac{Z_{2c}}{Z_{1c}} \sqrt{Z_3}\, q_{0c}$,

con Z_{2c} y Z_{1c} diferentes para cada c (dado que involucran muy distintos diagramas), habría tensión entre la invariancia de norma

del Lagrangiano desnudo ($\leftrightarrow$ conservación de q_{0c})
y las relaciones entre las cargas físicas q_c
requeridas por conservación de la carga eléctrica
(p.ej., en un proceso como $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$)
a menos que Z_{1c}/Z_{2c} sea independiente
de c, como hemos mostrado.

Volviendo al caso con un solo campo
cargado, sabiendo que $Z_1 = Z_2$ aprendemos
también que $\alpha_{1,0} = 0$ (ver p. 742).

• $(E_\psi, E_A) = (0,4) \implies D = 0$



De nuevo, podemos desarrollar en Taylor
respecto a los momentos externos,

$$= \underbrace{b}_{\text{constante con } D=0}\overbrace{\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}\right)}^{\text{por simetría en intercambio entre las } A\text{'s}} + \underbrace{\mathcal{O}(p_i)}_{D=-1}$$

y notar que una identidad de Ward para el correlador de 4 corrientes $\langle J^\mu J^\nu J^\lambda J^\rho \rangle$ (ver Tarea 14) requiere que el resultado se anule al contraer con $p_{1\mu}$, $p_{2\nu}$, $p_{3\lambda}$ ó $p_{4\rho}$. Esto implica que b NO puede ser divergente en el UV. Aprendemos con esto que $\alpha_4 = 0$, y este era el último de los coeficientes que habían quedado en duda en la p.742.

En conjunto, hemos mostrado entonces que, gracias a las identidades de Ward que expresan la conservación de la corriente electromagnética, en QED existen únicamente 3 amplitudes propias superficialmente divergentes en el UV, que

por transversalidad de $\Pi^{\mu\nu}$
y por simetría quiral en lo que
respecta a δm

dichas divergencias son todas logarítmicas, que son absorbibles por los parámetros $\delta Z_2, \delta Z_3$ y δm que aparecen (junto con $\delta Z_1 = \delta Z_2$) en los 3 contratérminos, y que el lagrangiano renormalizado $\mathcal{L}_{QED,\,ren}$ es invariante de norma.

Un punto importante es que con la renormalización logramos eliminar las divergencias ultravioleta; pero en una teoría con partículas no masivas como QED, el propagador $\propto 1/p^2$ da lugar a divergencias infrarrojas (IR). Como ya habíamos mencionado (p. 745), desde el punto de vista conceptual el problema es que en presencia de partículas no masivas se vuelve imposible distinguir estados asintóticos de 1 vs. muchas partículas. Para resolver el problema de las divergencias IR, debemos nuevamente asegurarnos de plantearnos preguntas que sean físicamente sensatas. Los propios detectores experimentales tienen

siempre una resolución energética finita ΔE, y es posible mostrar que cuando se calculan secciones eficaces de dispersión que toman este hecho en cuenta (incluyendo p.ej. estados finales de 1 electrón + un número arbitrario de "fotones suaves", con energía total $\leq \Delta E$), las divergencias IR se cancelan. Esta técnica fue propuesta primero por Bloch y Nordsieck — ver p.ej. Peskin cap. 6, Srednicki cap. 26, ó Weinberg I cap. 13.

Desde el punto de vista práctico, en pasos intermedios de los cálculos contemplamos un diagrama de Feynman a la vez, así que se vuelve necesario regularizar de alguna manera las divergencias IR para domesticarlas en tanto uno espera su cancelación en los cálculos de observables "seguras en el IR" (inglés: IR safe). Como ya dijimos, la manera más sencilla de hacer esto es introducir una pequeña masa m_γ para el fotón, y tomar el límite $m_\gamma \to 0$ únicamente al final del cálculo completo. En años recientes se han descubierto muchas novedades interesantes sobre el sector IR [ver p.ej. Strominger 1703.05448].

L12: 28/09/17

El único ingrediente que nos falta para poder hacer cálculos concretos es elegir un esquema de regularización (UV). Hemos enfatizado que nos conviene utilizar un esquema que preserve tantas simetrías de la teoría original como sea posible, por 2 razones:

a) Si violamos alguna simetría al regularizar, no siempre está garantizado que podremos restaurarla al retirar el corte para volver a la teoría original — puede existir una "anomalía", es decir, una simetría clásica que se viola a nivel cuántico. En el caso de la invariancia de norma, esto sería un desastre ($\Rightarrow$ p.ej., probabilidades negativas).

b) Aún si es posible restaurar la simetría al retirar el regulador, su violación en etapas intermedias de los cálculos conduce a divergencias adicionales, y a la introducción de más contratérminos. Así que nos obliga a trabajar más, de manera innecesaria.

En QED, la pregunta es entonces si existe algún método de regularización que preserve (en particular) Lorentz y la invariancia de norma. NO es el caso para ninguno de los 2 métodos que hemos mencionado hasta ahora: la regularización por retícula viola Lorentz, y la regularización por corte de fuerza bruta (=abrupto =duro) viola la invariancia de norma. Conceptualmente, la razón es que las transformaciones locales se refieren a cada punto x, e involucran a todos los momentos. Operativamente, la identidad de Ward (p.636) prohibe cambiar al propagador del electrón de manera no correlacionada con el vértice. $\supset \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$

L18: 12/04/23 L14: 20/03/19

En cualquier teoría, dado que las divergencias UV que deseamos domesticar provienen de expresiones del tipo

$$\sim \int d^d k_1 \cdots d^d k_L \; \frac{i}{(p_1+k_1)^2-m_1^2} \cdots \frac{i}{(p_N-k_{L-2})^2-m_r^2} \,,$$

existen básicamente 2 opciones para mejorar el comportamiento UV:

i) Modificar los propagadores para que decrezcan más rápidamente cuando $k_i \to \infty$.

ii) Modificar la medida de integración para que crezca más lentamente cuando $k_i \to \infty$.

La opción i) equivale a cambiar los términos cinéticos, p.ej. agregando más derivadas:

$$\varphi(-\partial^2 - m^2)\varphi \longrightarrow \varphi \overbrace{K(\partial^2)}^{-\partial^2 - \frac{c_1}{\Lambda^2}\partial^4 - \frac{c_2}{\Lambda^4}\partial^6 + \ldots - m^2} \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{i}{p^2-m^2} \longrightarrow \frac{i}{K(-p^2)} = \frac{i}{p^2 - \frac{c_1}{\Lambda^2}p^4 + \frac{c_2}{\Lambda^4}p^6 + \ldots - m^2} \,.$$

El corte de fuerza bruta de hecho pertenece a esta categoría, con $K^{-1}(-p^2)$ proporcional a la <u>función escalón</u> $\Theta(\Lambda^2-p^2)$. Pero también es posible imponer un corte "suave", p.ej. con $K(\partial^2) = -\exp(\partial^2/\Lambda^2)\,\partial^2 - m^2$, que conduce a

$$\frac{i}{p^2-m^2} \longrightarrow \frac{i\,e^{-p^2/\Lambda^2}}{p^2-m^2}\,.$$

En una teoría de norma, al aplicar este tipo de regularización a campos cargados, por invariancia de norma necesitamos utilizar la derivada <u>covariante</u> D_μ en lugar de ∂_μ. (Es por esta razón que el corte duro <u>NO</u> preserva la invariancia de norma.) Al reemplazar $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, acabaríamos agregando también un número (potencialmente infinito) de interacciones (aparentemente) <u>no</u> renormalizables.

Una manera útil de reportar una subclase de este tipo de modificaciones al propagador es lo que se conoce como regularización de Pauli-Villars, donde se reemplaza

$$\frac{i}{p^2-m^2} \longrightarrow \frac{i}{p^2-m^2} - \sum_{r=1}^{R} \frac{i\,c_r}{p^2-m_r^2},$$

con los coeficientes c_r ajustados para lograr un comportamiento UV $\sim (p^2)^{-R-1}$. Interpretamos a los términos añadidos como asociados a nuevos campos auxiliares conocidos como "campos reguladores". Sus masas m_r funcionan como parámetro de corte: al tomar $m_r \sim \Lambda \to \infty$, los nuevos términos desaparecen. P.ej., con un solo campo regulador ($R=1$) de masa $M=\Lambda$,

$$\frac{i}{p^2-m^2} \longrightarrow \frac{i}{p^2-m^2} - \frac{i}{p^2-\Lambda^2} = \underbrace{\frac{i}{p^2-m^2}\cdot\frac{m^2-\Lambda^2}{p^2-\Lambda^2}}$$

propagador original si $\Lambda\to\infty$, pero $\propto (p^2)^{-2}$ si $p\to\infty$ con Λ fija

Para que esta modificación figure en todos los diagramas, es necesario que los campos reguladores tengan interacciones idénticas al campo original.

Entre las ventajas de este método se cuenta que es físicamente muy intuitivo, que está definido a nivel del Lagrangiano y por tanto es no perturbativo, y que puede implementarse preservando la invariancia de norma abeliana. Como todo en la vida, tiene también desventajas. Dado que algunos $c_r < 0$, los términos cinéticos tienen el signo equivocado (como $A^{\mu=0}$ — esos campos se denominan "fantasmas") y la teoría regularizada No es unitaria (existen estados con norma negativa). Si bien es fácil aplicar el método para el fotón [ver p.ej. Peskin cap. 6], en el caso del electrón (o cualquier campo cargado) la implementación es más complicada [ver p.ej.

Bjorken & Drell]. Y lo peor es que no se ha encontrado la manera de utilizar Pauli-Villars en el caso de una teoría no abeliana.

Respecto al tema de los campos cargados, dado que en QED ó QCD aparecen cuadráticamente en $\mathcal{L}$, otra opción es realizar de manera exacta la integral funcional sobre ellos, y regularizar únicamente al nivel de la determinante funcional resultante, p.ej. con la regularización de tiempo propio de Schwinger

$$\underbrace{\ln \det}_{=\mathrm{Tr}\ln}\left[\frac{(-D^2+m^2)}{(-\partial^2+m^2)}\right] = \mathrm{Tr}\left\{\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left[e^{-t(-D^2+m^2)} - e^{-t(-\partial^2+m^2)}\right]\right\}.$$

[momentos grandes suprimidos a menor que t sea pequeño]

↳ reemplazar por $t_0 = \epsilon > 0$

Esto preserva la invariancia de norma abeliana, pero de nuevo, no se generaliza al caso no abeliano.

El único método conocido que es invariante de Lorentz y de norma incluso en el caso

No abeliano es la llamada regularización dimensional.

Este es el método más popular y útil.

Fue inventado por 't Hooft y Veltman, Bollini y Giambiagi, etc., y puede considerarse como (el único) perteneciente a la opción que llamamos ii): en lugar de modificar los propagadores, cambia la definición de la medida de integración $\int d^d k_i$.

Sabemos (p. 727) que el comportamiento UV mejora al disminuir la dimensión espaciotemporal. La regularización dimensional aprovecha esto, planteando los cálculos en una dimensión d menor a la que nos resulta de interés, normalmente $d<4$. Lo peculiar de este método es que, para poder eventualmente retirar la regularización, regresando a la

$\int d^d k_i$

teoría original, ¡debemos poder variar la dimensión de manera continua, tomando $d \to 4_-$, y considerando a

$$\boxed{\varepsilon \equiv 4-d} \qquad (\to 0)$$

como nuestro parámetro de corte!

La regularización dimensional NO debe interpretarse como un planteamiento físico en el cual la teoría de campos de alguna manera se define sobre un espaciotiempo de dimensión fractal d, ni nada por el estilo. Se trata de una maniobra formal, mediante la cual básicamente calcularemos las integrales en una dimensión entera d, y luego continuaremos analíticamente el resultado para permitir que d tome valores no enteros. No debemos confundirnos por lo abstracto de esta maniobra: entendemos ya que, al regularizar, lo indispensable es especificar alguna manera de modificar los fórmulas para domesticar los infinitos, NO que tengamos una interpretación física muy clara de esa modificación.

Más específicamente, definiremos la noción requerida de "integral" en d dimensiones a través de 4 propiedades básicas:

1) linealidad:

$$\int d^dp\ [af(p)+bg(p)] = a\int d^dp\, f(p) + b\int d^dp\, g(p).$$

2) Invariancia bajo translaciones:

$$\int d^dp\ f(p+q) = \int d^dp\ f(p) \quad \text{para cualquier } q \text{ fijo.}$$

(Esta es precisamente la propiedad que NO se respeta al modificar los propagadores por medio de un corte —duro o suave— sobre los momentos.)

3) Invariancia bajo rotaciones:

$$\int d^dp\ f(Rp) = \int d^dp\, f(p) \quad \text{para cualquier matriz de rotación } R$$

(Estamos pensando en el caso euclideano, después de hacer una rotación de Wick para tener al tiempo y al espacio en el mismo pie. En Minkowski estaríamos hablando de invariancia bajo Lorentz.)

4) Escalamiento :

$$\int d^d p\, f(sp) = s^{-d} \int d^d p\, f(p) \quad \text{para cualquier } s \neq 0.$$

Es posible mostrar que estos 4 requisitos definen a $\int d^d p$ de manera única, salvo una constante de normalización. Esta puede fijarse pidiendo que se satisfaga el resultado habitual para una integral gaussiana,

5) $$\int d^d p\, e^{-p^2} = \pi^{d/2} . \qquad = \left(\int dp_1 e^{-p_1^2} \right)^d$$

[Ver Collins, cap. 4 para una descripción más sistemática.]

Es importante notar que, por operar directamente a nivel de las integrales, la regularización dimensional es un método intrínsecamente perturbativo. El único método NO perturbativo conocido que preserva la invariancia de norma incluso en el caso no abeliano es la regularización por retícula, que como ya hemos dicho, no preserva Lorentz. (Para ciertas teorías no abelianas, la llamada "Correspondencia Holográfica" permite imponer un corte UV no perturbativo que es invariante de norma y de Lorentz.)

En la práctica, después de agrupar denominadores usando parámetros de Feynman (ver p. 667), de correr la variable de integración (propiedad 2) $k \to \ell$ (p. 668) para obtener un denominador con simetría esférica, y de hacer la rotación de Wick habitual $\ell \to L$ con $\ell^0 = iL^4$, $\ell^{1,2,3} = L^{1,2,3}$ ($\Rightarrow \ell^2 \equiv \ell_\mu \ell^\mu = -L^2$, p. 668), llegamos a una integral como p.ej.

$$\int \frac{d^dL}{(2\pi)^d} \frac{1}{(L^2+M^2)^2} ,$$

(esto es justo lo que obtuvimos en la p. 668 para Γ_4 en la teoría φ^4)

que en $d=4$ diverge logarítmicamente.

Dado que vamos a querer considerar esta integral para distintos valores de d, para no tener problemas de unidades conviene incorporar una escala energética arbitraria μ para formar la combinación

$$I(d,M^2) \equiv \mu^{4-d} \int \frac{d^dL}{(2\pi)^d} \frac{1}{(L^2+M^2)^2} ,$$

cuya dimensión es la misma (cero) para cualquier d.

Físicamente, μ se puede interpretar como la escala a la cual se definen (en particular) los acoplamientos de la teoría, análoga a la escala arbitraria que en la p. 657 dijimos que figura en la definición de λ en φ^4. P.ej., en QED escribimos

$$e^2 = \mu^{d-4} Z_3 e_0^2 ,$$

cf. p. 761

unidades: M^{4-d}

para lograr que e sea adimensional $\forall\, d$. En este contexto, llamamos a μ la "escala de renormalización". Veremos esto en más detalle más adelante.

Para aplicar la regularización dimensional, primero aprovechamos la simetría esférica para pasar a coordenadas esféricas,

propiedad 3)

$$I(d,M^2) = \mu^{4-d} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \underbrace{\int_0^\infty dL \; L^{d-1} \frac{1}{(L^2+M^2)^2}}_{\text{integral 1-dim ordinaria}} ,$$

con $\int d\Omega_{d-1} \equiv \Omega_{d-1}$ el volumen de una esfera $(d-1)$-dimensional. Podemos calcular Ω_{d-1} notando que

$$\pi^{d/2} \overset{\text{propiedad 5)}}{=} \int d^d x \, e^{-x^2} = \int d\Omega_{d-1} \int_0^\infty dx \; x^{d-1} e^{-x^2}$$

$$\overset{y=x^2}{=} \Omega_{d-1} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty dy \; y^{\frac{d}{2}-1} e^{-y}}_{\equiv \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \text{ función gamma}} ,$$

$\left(\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \right.$, y para $n=0,1,2,\ldots$ se tiene $\Gamma(n+1) = n!$, $\left. \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{n!\,2^{2n}}\sqrt{\pi} \right)$