

(Este es el Teorema de Furry ; el punto es que

$$G : A_\mu(x) \rightarrow -A_\mu(x) \quad \text{para compensar}$$

$$G : J^\mu(x) \rightarrow -J^\mu(x) \quad \text{con } J^\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi .)$$

Y por lo mismo, debemos tener $\alpha_1 = 0$.

$$\bullet \frac{1}{2} \alpha_2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} \alpha_{20} (\partial \cdot A)^2$$

↑ masa para el fotón

$$\alpha_2 = -Z_3 M_0^2$$

↑ renormalización de \int

$$\alpha_{20} = \frac{1}{\int} - \frac{Z_3}{\int_0}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \mu \quad \nu \\ \text{p} \rightarrow \end{array} = -i \delta Z_3 (\eta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) + i \alpha_2 \eta_{\mu\nu} - i \alpha_{20} p_\mu p_\nu$$

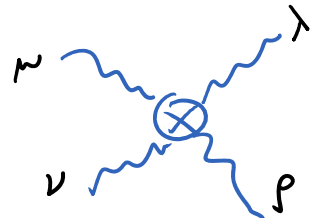
No descartar a priori por ninguna simetría.

$$\bullet \frac{1}{2} \alpha_3 \partial \cdot A A^2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \mu \quad \nu \\ \text{p}_1 \rightarrow \quad \text{p}_2 \leftarrow \\ \text{p}_3 \uparrow \\ \lambda \end{array} = -\alpha_3 (\eta_{\mu\nu} p_{3\lambda} + \eta_{\mu\lambda} p_{2\nu} + \eta_{\nu\lambda} p_{1\mu})$$

De nuevo, debemos tener $\alpha_3 = 0$ por G .

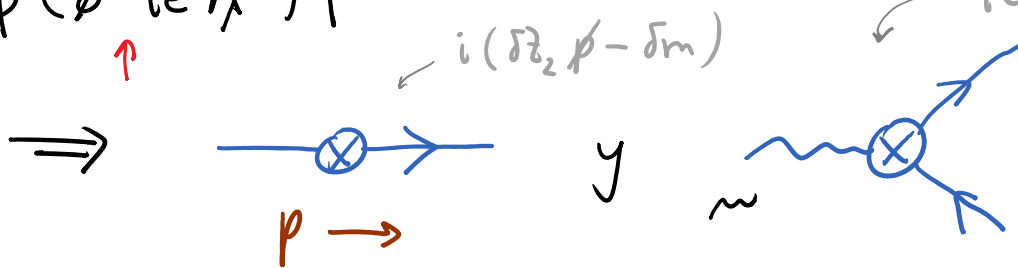
$$\bullet \frac{1}{4} \alpha_4 (A_\mu A^\mu)^2$$

$$\Rightarrow \text{Diagrama} = i \alpha_4 (\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda})$$


No descartado a priori por ninguna simetría.

$$\bullet \alpha_{0,1} \bar{\psi} (\not{\partial} - ie \not{A}) \psi$$

← p. 736 tenemos ya $\delta z_2 \bar{\psi} (\not{\partial} + ie \not{A}) \psi$ si $\delta z_1 = \delta z_2$

$$\Rightarrow \text{Diagrama 1} \quad \text{y} \quad \text{Diagrama 2}$$


$i(\delta z_2 \not{p} - \delta m)$ $-ie \delta z_1 \gamma^\mu$

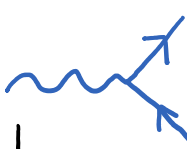
$$\text{con } \delta z_2 = \delta z_1 + 2\alpha_{0,1}.$$

Queda entonces la pregunta de si necesitaremos $\alpha_2, \alpha_{20}, \alpha_4$ ó $\alpha_{0,1} \neq 0$. Como veremos, el hecho de que tenemos todavía la invariancia bajo el cambio global de la fase de $\psi(x)$, que es suficiente para garantizar la conservación de la corriente $J^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ y por tanto

la validez de las correspondientes identidades de

Ward, bastará para garantizar que $\alpha_2 = \alpha_{20} = \alpha_4 = \alpha_{0,1} = 0$, y por tanto $\delta z_1 = \delta z_2$ y $e = \sqrt{z_2} e_0$, y con ello, la renormalizabilidad de QED.

Esto pudiera parecer inesperado, porque la transformación global $\psi(x) \rightarrow e^{ie\theta} \psi(x)$ no impone a priori ninguna restricción sobre los contra términos en cuestión. El punto, sin embargo, es que en esta teoría abeliana, cada pata externa de fotón debe (en amplitudes IP1) estar atada al vértice donde figura la corriente J^μ , y por tanto está sujeta a la correspondiente identidad de Ward.



En otras palabras, las propiedades de transformación de $\psi(x)$ son relevantes porque las interacciones necesariamente involucran a los fermiones. (En el caso no abeliano esto no es cierto, y la situación se vuelve entonces más complicada.)

L12: 11/03/19

Para ser más precisos, debemos notar que, para ser el fotón una partícula no masiva, el polo que correspondería

es un estado de 1 fotón



No está separado del corte asociado a estados con 2 o más fotones. Y el polo de 1 electrón No está separado del corte asociado a 1 electrón con 1 o más fotones.

110: 19/01/17

Esto complica la definición de estados asintóticos, y está relacionado con la aparición de divergencias infrarrojas (IR).

Para eludir este problema en los cálculos, podemos darle temporalmente al fotón una pequeña masa m_γ ($\rightarrow 0$ al final).

Conviene reescribir nuestras 3 condiciones en términos

de las correspondientes amplitudes irreducibles por

una partícula. Definamos la autoenergía del

electrón (una matriz espinorial) como

$$-i\Sigma(p) \equiv \text{Diagram with a fermion line and a self-energy loop labeled IP1}$$

← en notación anterior, $\tilde{\Gamma}_{2,0}(p)$

y la autoenergía del fotón (un tensor $(2,0)$) como

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) \equiv \text{Diagram with a photon line and a self-energy loop labeled IP1}$$

← $\tilde{\Gamma}_{0,2}(p)$

Es fácil mostrar (ver tarea 14) que una identidad de Ward para la corriente $J^\mu \equiv e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ (que expresa el hecho de que $\partial_\mu J^\mu = 0 \Leftrightarrow p_\mu \tilde{J}^\mu = 0$) garantiza que la autoenergía del fotón es "transversal", es decir,

$$p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) = 0.$$

Esto es importante, porque en amplitudes de dispersión (donde las pater externas de fotones contribuyen un factor de ϵ_μ) implica que los fotones con polarización longitudinal, $\epsilon_\mu \propto p_\mu$, se desacoplan, como tiene que suceder debido que NO son físicos.

Siendo este el caso, podemos escribir

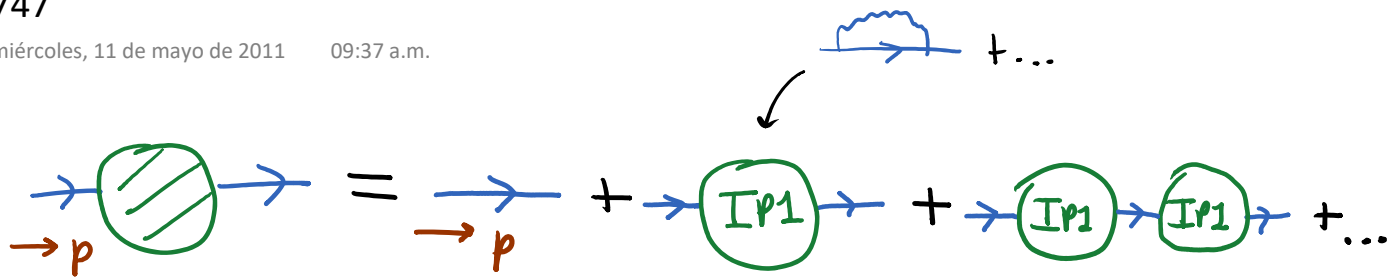
$$\Pi^{\mu\nu}(p) \equiv (p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Pi(p^2),$$

← los únicos tensores que pueden aparecer en $\Pi^{\mu\nu} \sim \langle \text{se} | A^\mu A^\nu | \text{se} \rangle$ son $\eta^{\mu\nu}$ y $p^\mu p^\nu$

con $\Pi(p^2)$ una función escalar.

16: 25/03/23

En términos de las autoenergías, tenemos



$$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \left\{ 1 + \left[(-i\Sigma(p)) \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \right] + \left[\quad \right]^2 + \dots \right\}$$

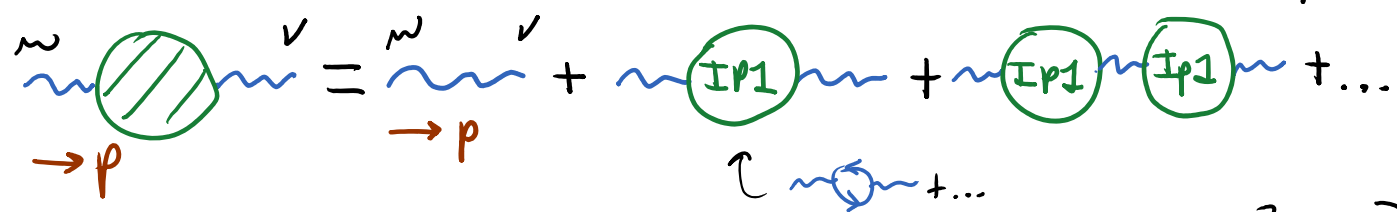
$$= \frac{i}{\not{p} - m} \frac{1}{1 + i\Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m}}$$

Commutan porque $\Sigma = \Sigma(\not{p})$

↻ matriz
espinores
SIN indice
vectorial
($\not{p}^2 = p^2$)

$$= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)}$$

Y de manera similar (definiendo $\eta_{\mu\nu}^3(p) \equiv \eta_{\mu\nu} - (1-\beta) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$),



$$= \frac{-i\eta_{\mu\lambda}^3(p)}{p^2} \left\{ \delta_{\nu}^{\lambda} + \left[i\Pi^{\lambda\rho}(p) \frac{(-i\eta_{\rho\nu}^3(p))}{p^2} \right] + \left[\quad \right]^2 + \dots \right\}$$

$$\Pi^{\lambda\rho}(p) \frac{\eta_{\rho\nu}}{p^2}, \quad \text{dado que} \quad \Pi^{\lambda\rho}(p) p = 0$$

$$11 \cdot \psi(p) \frac{\cdot \psi V}{p^2} \quad , \quad \frac{1}{T} \lambda \psi(p) p_s = 0$$

que usando

$$\Pi^{\lambda\rho}(p) \equiv (p^2 \eta^{\lambda\rho} - p^\lambda p^\rho) \Pi(p^2)$$

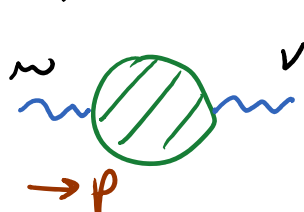
$$\Pi^{\lambda\rho}(p) \frac{\eta_{\rho\nu}}{p^2} = \left(\eta^{\lambda\rho} - \frac{p^\lambda p^\rho}{p^2} \right) \Pi(p^2) \eta_{\rho\nu}$$

$$= \left(\delta_\nu^\lambda - \frac{p^\lambda p_\nu}{p^2} \right) \Pi(p^2)$$

$$\equiv \mathcal{P}_\nu^\lambda(p) \quad p.348$$

Matriz de proyección sobre subespacio ortogonal a p^μ : $\mathcal{P}_\nu^\lambda(p) \mathcal{P}_\sigma^\nu(p) = \mathcal{P}_\sigma^\lambda(p)$

equivalente a



$$\underbrace{\eta_{\mu\nu}^{\xi}}_{\rightarrow p} = \frac{-i \eta_{\mu\nu}^{\xi}}{p^2} \left\{ \underbrace{\frac{p^\lambda p_\nu}{p^2} + \mathcal{P}_\nu^\lambda(p)}_{\delta_\nu^\lambda} + \underbrace{\left[\mathcal{P}_\nu^\lambda(p) \Pi(p^2) \right]}_{\mathcal{P}_\nu^\lambda(p) \Pi(p^2)} + \left[\quad \right]^2 + \dots \right\}$$

$$= \frac{-i}{p^2} \left(\mathcal{P}_{\mu\nu}^\xi(p) + \sum \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \underbrace{\mathcal{P}_\nu^\lambda(p) \left(1 + \Pi(p^2) + \Pi(p^2)^2 + \dots \right)}_{\frac{1}{1 - \Pi(p^2)}}$$

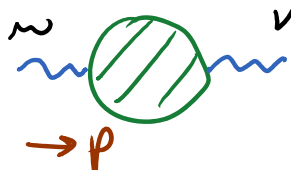
$$\eta_{\mu\nu}^{\xi}(p) \equiv \eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$$

$$= - \frac{i}{p^2(1-\pi(p^2))} \left\{ \underbrace{\sum \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} (1-\pi(p^2)) + \mathcal{P}_{\mu\nu}(p^2)} \right\}$$

$$\eta_{\mu\nu}^{\xi}(p) \equiv \eta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p^2}$$

$$\eta_{\mu\nu}^{\xi}(p) - \xi \frac{\pi(p^2) p_{\mu} p_{\nu}}{p^2}$$

es decir,



$$= \frac{-i \eta_{\mu\nu}^{\xi}(p) + i \xi \frac{\pi(p^2) p_{\mu} p_{\nu}}{p^2}}{p^2 (1 - \pi(p^2))}$$

Notar que el fotón No adquiere masa por correcciones radiativas (polo sigue en $p^2=0$)

perturbativamente NO puede haber en segundo polo, porque $\pi \propto e^2$

En este lenguaje, las 3 condiciones de renormalización de la p744 que definen a z_2, z_3 y m (y por tanto también a $\delta z_2, \delta z_3$ y δm) tienen la forma

$\Sigma(p=m) = 0$,	(I)	$\frac{i}{p-m-\Sigma(p)}$
$\left. \frac{d}{dp} \Sigma(p) \right _{p=m} = 0$,	(II)	
$\pi(p^2=0) = 0$.	(III)	$\frac{-i \eta_{\mu\nu}^{\xi}(p) + i \xi \frac{\pi(p^2) p_{\mu} p_{\nu}}{p^2}}{p^2 (1 - \pi(p^2))}$

Nos falta entonces únicamente imponer una

condición adicional para definir la carga
renormalizada e (y en ello a δZ_1).

Recordemos que en la teoría ϕ^4 definimos el acoplamiento renormalizado directamente a partir de

$$iM(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) = \text{diagrama} \quad \text{a } p_n = 0,$$

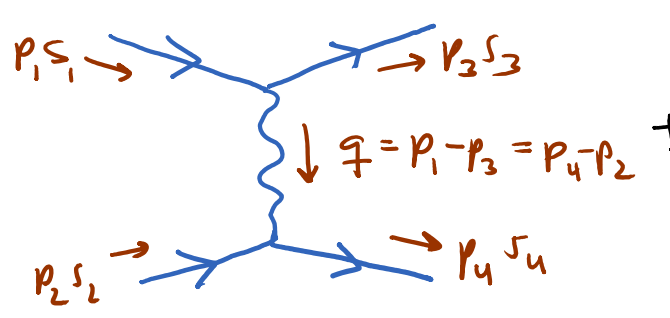
que a orden más bajo en la expansión perturbativa se reduce a $\text{diagrama} = -i\lambda$.

En QED es natural también definir la carga renormalizada e a partir de la amplitud de dispersión más sencilla de la teoría,

$$iM(e^- p_1, e^- p_2 \rightarrow e^- p_3, e^- p_4) = \text{diagrama},$$

pero debemos tomar en cuenta que ahora el vértice básico es de 3 (no 4) patas, por lo que la interacción entre los 2 electrones es mediada por el campo electromagnético, y iM contiene por tanto estructura adicional al

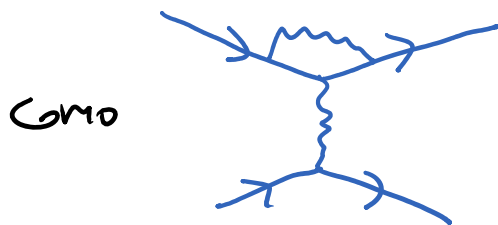
aplamiento e:

$i\mathcal{M} =$

 $+ \mathcal{O}(e^4)$

$$= \bar{u}_{p_3}^{s_3} (-ie\gamma^\mu) u_{p_1}^{s_1} \left(\frac{-i\eta_{\mu\nu}^3}{q^2 + i\epsilon} \right) \bar{u}_{p_4}^{s_4} (-ie\gamma^\nu) u_{p_2}^{s_2} + \dots$$

Recuerda (p.479) que, por LSZ, cada pata externa contribuye un factor de $\sqrt{\text{residuo en el polo}}$, pero estamos trabajando con la expansión perturbativa renormalizada en el esquema de la capa de MS, donde, por definición, residuo = 1.

Los términos de orden más alto incluyen nuevos efectos físicos, de 2 tipos principales. En diagramas

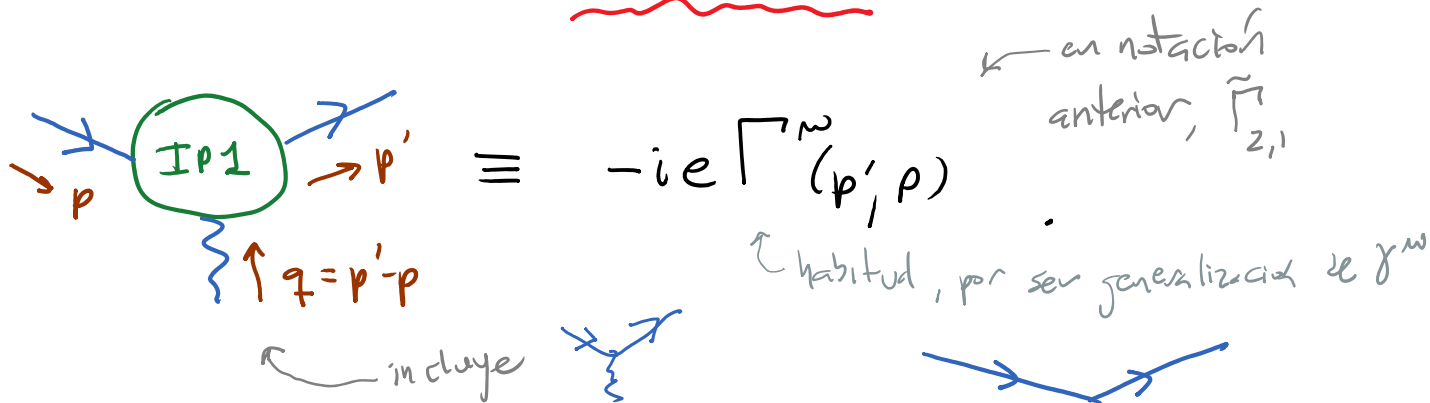


vemos correcciones al vértice,

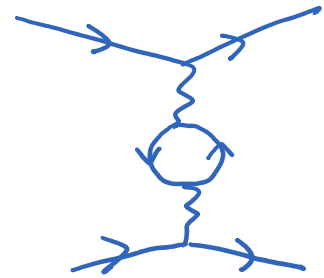
es decir, a la manera en que cada electrón se

acoplada al campo electromagnético, que pueden

resumirse en el vértice vertido



Por otro lado, en diagramas como



veremos correcciones a la propagación del fotón, es decir, al proceso que media la interacción electromagnética, cuyo efecto combinado da el propagador vertido del fotón, que ya discutimos en las pp. 747-749.

Una opción natural es definir el acoplamiento renormalizado e a partir de la amplitud de dispersión para el proceso $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ con transferencia de momento nula, $q=0$,

lo cual corresponde a una separación grande ($\rightarrow \infty$) entre los electrones, mucho mayor que su nube de partículas virtuales. Quitando los factores de patas externas y el propagador del fotón, exigimos entonces que

$$\boxed{-ie \Gamma^\mu(p', p) \Big|_{p'=p=m} = -ie \gamma^\mu} \quad (IV)$$

en reposo, o al tomar $\bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p)$ $\Rightarrow \vec{q} = p' - p = 0, p^2 = m^2 = p'^2$ (recordar que $p^2 = p'^2$)

Esta es nuestra última condición de renormalización, que define a e y por tanto a $Z_1 \equiv Z_2 \frac{e_0 \sqrt{Z_3}}{e}$ y δZ_1 .

[13:13/03/11]

El siguiente paso en el programa de renormalización es identificar los corretores $\mathbb{P}1$ que son primitivamente divergentes.

A partir de nuestra fórmula general (p.709),

$$D = D - \sum_c E_c \mathcal{D}_c - \sum_i V_i \mathcal{D}_i,$$

sabemos que el grado de divergencia superficial de

$\checkmark \phi_\psi = \frac{3}{2}$

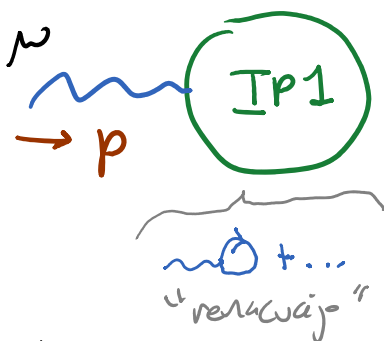
un diagrama con E_ψ patas externas del electrón,
 E_A patas externas del fotón $\leftarrow \phi_A = 1$ y V de los
 vértices básicos de 3 patas está dado por

$D = 4 - \frac{3}{2}E_\psi - E_A$, $\leftarrow D_e = 0$

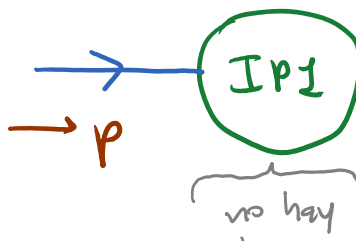
independiente de $V \leftrightarrow L$, es decir, del orden en la
 expansión perturbativa: e es estrictamente renormalizable.

Los correladores propios primitivamente divergentes
 son entonces:

• $(E_\psi, E_A) = (0, 1) \Rightarrow D = 3$

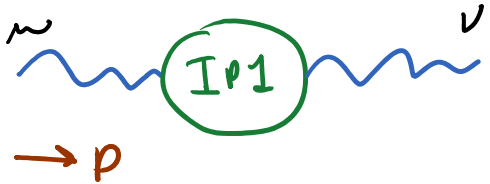

 $\equiv \langle \Omega | A_\omega(0) | \Omega \rangle_{\text{amputada}}$
 $= 0$ por G y por Lorentz.

• $(E_\psi, E_A) = (1, 0) \Rightarrow D = 5/2$

 $\equiv \langle \Omega | \psi(0) | \Omega \rangle_{\text{amputada}}$
 $= 0$ por Lorentz.

! $\overbrace{\text{no hay}}^{\text{diagramas}} = 0$ por Lorentz.

• $(E_\psi, E_A) = (0, 2) \Rightarrow D = 2$

 $\equiv i\Pi^{\mu\nu}(p)$ 

autoenergía del fotón

$=$  $+$... $+$  ,

también conocida como "polarización del vacío".

Como mencionamos en la p. 746 y en la Tarea 14, una identidad de Ward (\leftrightarrow conservación de J^μ) estipula que

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = i \underbrace{(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu)}_{\text{dim} = 2} \underbrace{\Pi(p^2)}_{\text{adimensional}}$$

así que No existen divergencias del tipo

$$+ i\alpha_2 \eta^{\mu\nu} - i\alpha_{22} p^\mu p^\nu$$

que nos preocuparon en la p. 741, es decir,

la identidad de Ward obliga a que $\alpha_2 = 0 = \alpha_{22}$.

Nuestra condición de renormalización (III),

investir a condición de verificación (iii),

$\Pi(p^2=0)=0$, se encargará de garantizar

que las divergencias UV en $\Pi(p^2)$ — que son solo logarítmicas, por análisis dimensional — serán absorbidas por δZ_3 en el contratérmino

$$\text{Diagram: } \text{wavy line } \otimes \text{ wavy line} \quad \nu \quad = \quad -i \delta Z_3 (\underbrace{\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu}_{\text{misma estructura tensorial}})$$

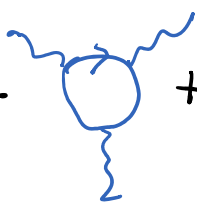
$p \rightarrow$

por lo que $i\Pi^{\mu\nu}(p)$ será finita. ✓

• $(E_\psi, E_A) = (1, 1) \Rightarrow D = 3/2$

\rightarrow IP1 $\text{--- wavy line } \text{---}$ $= 0$ por Lorentz (no hay Diagramas)

• $(E_\psi, E_A) = (0, 3) \Rightarrow D = 1$

$\text{--- wavy line } \text{---}$ IP1 $\text{--- wavy line } \text{---}$ $=$  $+ \dots = 0$ por C.

$\llcorner 11=26/09/17$

• $(E_\psi, E_A) = (2, 0) \Rightarrow D = 1$

\rightarrow IP1 \rightarrow $\equiv -i\Sigma(p)$ \leftarrow

$\rightarrow p$

autoenergía del electrón

$$-i\Sigma(p) = \text{[diagram of a loop with an arrow]} + \dots + \text{[diagram of a tadpole with an arrow]}$$

Para deducir la estructura de las divergencias, recordando la p.698 podemos desarrollar en Taylor alrededor de $p=0$,

$$-i\Sigma(p) = -i\Sigma(0) - i \left. \frac{d\Sigma(p)}{dp} \right|_0 p - \frac{i}{2} \left. \frac{d^2\Sigma(p)}{dp^2} \right|_0 p^2 + \dots$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 $D=1$ $D=0$ $D=-1$ \dots
 \dots

divergentes
finitos

$\uparrow p^2 = p^2$

Nuestras condiciones de renormalización (I) y (II),

$\Sigma = 0 = \frac{d}{dp} \Sigma$ en $p=m$, claramente asegurará que estas divergencias UV se cancelen con el contra término

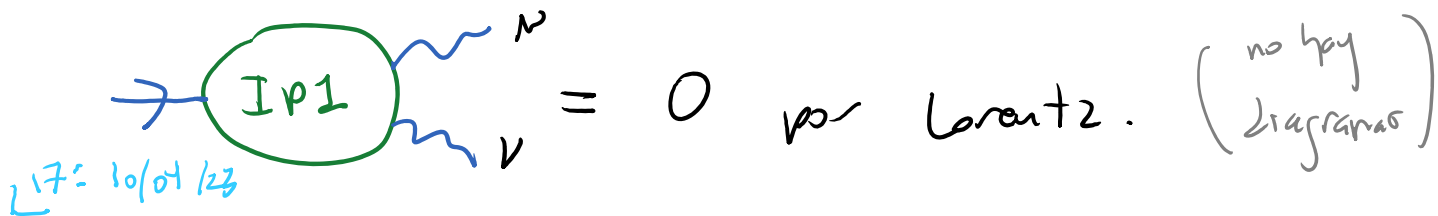
$$p \rightarrow \text{[tadpole diagram]} = i(\delta\delta_2 p - \delta m)$$

$\delta\delta_2$ será logarítmicamente divergente.

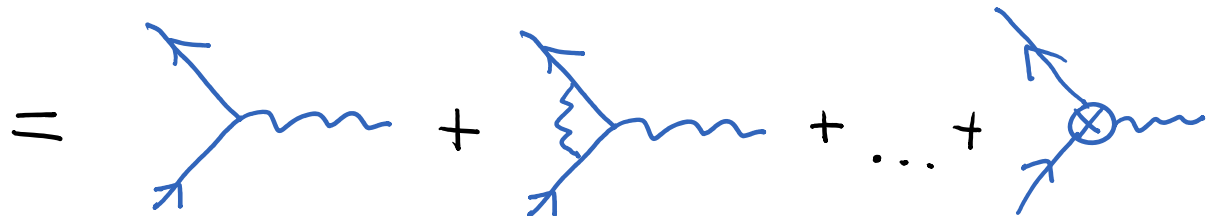
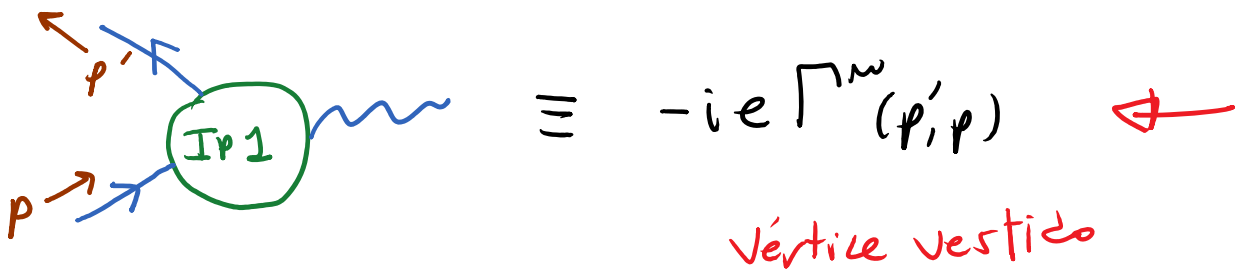
Y, contrario a las apariencias, δm también lo será: NO es posible tener una

divergencia lineal $\delta m \sim \Lambda$, pero que la simetría quiral existente cuando $m=0$ obliga a tener $\delta m \propto m \ln \Lambda$ (para que $m=0 \Rightarrow \delta m=0$). En cualquier caso, lo importante es que, al final, $-i \Sigma(p)$ será finita. ✓

• $(E_\psi, E_A) = (1, 2) \Rightarrow D = 1/2$



• $(E_\psi, E_A) = (2, 1) \Rightarrow D = 0$

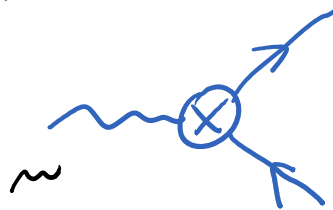


De nuevo, podemos desarrollar en Taylor alrededor de $p' = p = 0$,

$$-ie \Gamma^\mu(p', p) = -ie \Gamma^\mu(0, 0) - ie \left. \frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial p^\nu} \right|_{p=0} p^\nu + \dots$$

\uparrow $D=0$ \uparrow $D=-1$ análgo
 $\infty -ie \gamma^\mu$ \downarrow con p'
 porque no hay p, p'

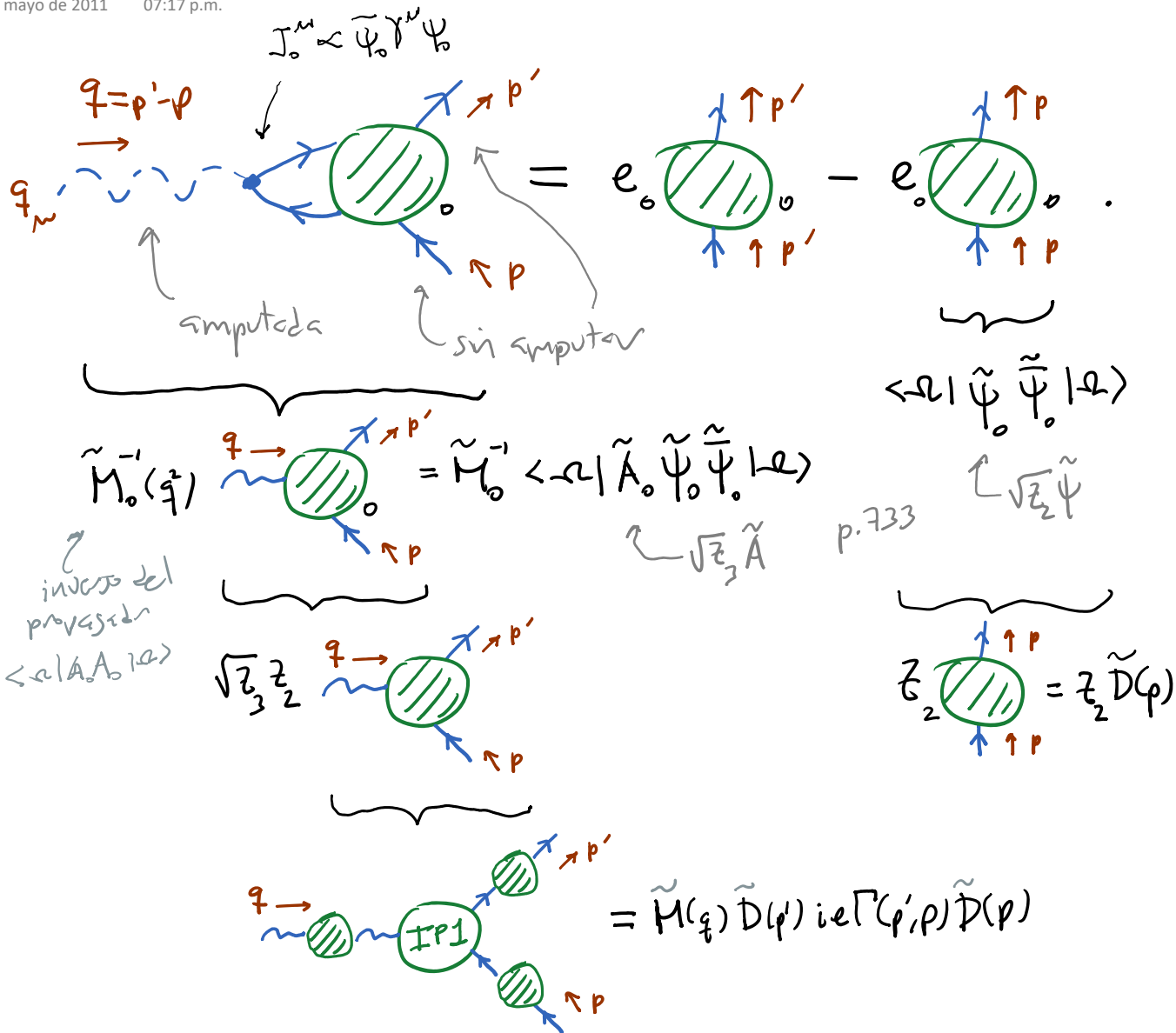
para convencernos de que la divergencia U ,
 únicamente logarítmica, será absorbida por
 δZ , del contratérmino



$$= -ie \delta Z \gamma^\mu$$

al imponer nuestra condición de renormali-
 zación (IV), $-ie \Gamma^\mu|_{p=p', p^2=m^2} = -ie \gamma^\mu$.
 $-ie \Gamma^\mu(p', p)$ será entonces finito. ✓

Adicionalmente, recordemos de la p. 636
 la identidad de Ward (-Takahashi) para
 correladores de los campos DEFINIDOS:



Cancelando el factor común z_2 , la identidad RENORMALIZADA es

$$q_w \sqrt{z_3} \frac{\tilde{M}}{\tilde{M}_0} \text{IP1} = \frac{e_0}{z_2} \frac{e}{\sqrt{z_3}} \left[\left(\text{diagram} \right)^{-1} - \left(\text{diagram} \right)^{-1} \right]$$

p.734

es decir,

$$-i(\not{p} - m - \Sigma(p)) \quad (\text{ver p. 747})$$