implica que, al agregar suficientes vértices de tipo j, podemos lograr que el grado de divergencia superficial de cualquier correlador $\hat{\Gamma}_{(E_1, \dots)}$ sea negativo. En otras palabras, la situación mejora al ir a órdenes cada vez más altos en la expansión perturbativa.

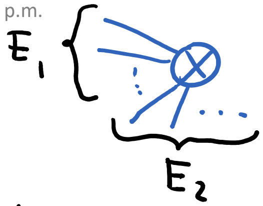
Esta subclase de interacciones renormalizables se conoce por tanto como interacciones súper-renormalizables. Cuando queremos hacer esta distinción, la subclase restante de interacciones renormalizables —aquellas con $\mathcal{D}_i = 0$— se llaman estrictamente renormalizables, categoría donde se ubican φ^4 y (casi) todas las interacciones del Modelo Estándar.
excepción es el término de masa del Higgs
Interacciones de este tipo dan lugar a nuevos infinitos, y por tanto, a nuevas contribuciones a los contratérminos, en cada orden sucesivo en la expansión perturbativa, puesto que D no cambia al

agregar más vértices de esta categoría.

En una teoría donde todas las interacciones son súper-renormalizables, solo habrá un número finito de diagramas (no solamente correladores) superficialmente divergentes, ¡y es posible por tanto terminar de eliminar todas las divergencias UV en un número finito de pasos!

A la inversa, si una interacción tiene $D_i < 0$, entonces agregando suficientes vértices del tipo i podemos lograr que cualquier amplitud $\tilde{\Gamma}_{(E_1, \cdots)}$ sea superficialmente divergente. Salvo casos excepcionales (p.ej., la supersimetría puede dar lugar a cancelaciones especiales entre distintos diagramas), necesitaremos entonces un número infinito de términos en $\mathcal{L}$, con E_c arbitrariamente altas, para (a través de los

← restringidos por simetrías

contratérminos 

: correspondientes) poder eliminar <u>todas</u> las divergencias al renormalizar (aun si <u>a cada orden</u> nos topamos solo con un número <u>finito</u> de ellas).

Esto a su vez implica que EN TOTAL necesitaríamos un número <u>infinito</u> de condiciones de renormalización, y por tanto de datos experimentales, para poder fijar las correspondientes constantes de acoplamiento renormalizadas, ¡situación que claramente no es muy afortunada!

Llamamos a tales interacciones/teorías <u>no renormalizables</u>. Es importante tener claro que <u>sí</u> se pueden renormalizar, pero al precio de ajustar un número infinito de parámetros, después de lo cual en principio aún podríamos hacer predicciones —en particular, las partes <u>no</u> analíticas de las amplitudes.

Si en una teoría incluimos solo un número <u>finito</u>

de interacciones no renormalizables, no será posible eliminar todas las divergencias UV, así que si la teoría pretende ser una descripción fundamental del sistema, donde en verdad deseamos tomar $\Lambda \to \infty$, entonces No tiene sentido físico, al menos perturbativamente. Lo mismo puede ocurrir si hay un número infinito, pero insuficiente, de interacciones no renormalizables.

Por otro lado, si creemos que las teorías cuánticas de campos nos dan apenas una descripción aproximada de la naturaleza, entonces existe un corte UV Λ que es físico, y tiene tanto sentido trabajar con teorías no renormalizables como renormalizables. Regresaremos a este punto un poco más adelante.

LL: 06/03/19

Primero, para ilustrar todas estas ideas nos conviene dar algunos ejemplos:

- Teorías/Interacciones Estrictamente Renormalizables ($D_i = 0$)

$\lambda \varphi^4$ en $d = 3+1$ $[\varphi] = 1$

electrodébil

$g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$ (QED, QCD, GSW) en $d = 3+1$

$[A] = 1$ $[\psi] = 3/2$

$g \varphi \partial_\mu \varphi A^\mu$, $g \varphi^2 A_\mu A^\mu$ en $d = 3+1$

$\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$ (Yang-Mills) en $d = 3+1$

$$\equiv \frac{i}{g_{YM}} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i g_{YM} [A_\mu, A_\nu]$$

$g \varphi \bar{\psi} \psi$ (Yukawa) en $d = 3+1$

Modelo Estándar

$\lambda \varphi^3$ en $d = 5+1$ $[\varphi] = \frac{d}{2} - 1 = 2$ $\int d^d x (\partial\varphi)^2$

$\lambda \varphi^6$ en $d = 2+1$ $[\varphi] = 1/2$

$g \varphi^2 \bar{\psi} \psi$ en $d = 2+1$ $[\psi] = \frac{d-1}{2} = 1$ $\int d^d x\, \bar{\psi} \partial \psi$

$g (\bar{\psi} \psi)^2$ en $d = 1+1$ $[\psi] = 1/2$

etc.

- Teorías / Interacciones Súper-Renormalizables $(D_i > 0)$

$\lambda\varphi^3$ en $d = 3+1$

$\lambda\varphi^4$ en $d = 2+1$ $[\varphi] = \frac{d}{2} - 1 = 1/2$

$\sum_n \lambda_n \varphi^n$ en $d = 1+1$ $[\varphi] = 0$

$\sum_n \lambda_n \varphi^n \bar{\psi}\psi$ en $d = 1+1$ $[\psi] = \frac{d-1}{2} = 1/2$

$\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ (Yang-Mills) en $d < 3+1$

$\sim \partial A \partial A + g_{YM} \partial A A A + g_{YM}^2 AAAA$ $[A] = \frac{d-2}{2}$

$g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi$ en $d < 3+1$ $[\psi] = \frac{d-1}{2}$

etc.

- Teorías / Interacciones No Renormalizables $(D_i < 0)$

$\lambda\varphi^{n \geq 5}$ en $d \geq 3+1$

(y por tanto cualquier acción no polinomial)

$G_F(\bar{\psi}\psi)^2$ (Fermi: $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$) en $d \geq 3+1$

$[\psi] = \frac{d-1}{2}$

$(\bar{\Psi}\Psi)^{n\geq 3}$ en $d \geq 2+1$ $\qquad [\Psi] = \frac{d-1}{2}$

$\bar{\Psi}\, S^{\mu\nu} \Psi\, F_{\mu\nu}$ (Pauli) en $d \geq 2+1$ $\qquad [F] = \frac{d}{2}$

$\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ $\qquad$ por esta razón NO lo incluimos en QED o QCD

$\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ (Yang-Mills) en $d > 3+1$ $\qquad [A] = \frac{d-2}{2}$

$\partial A \partial A + g_{YM}\partial A\, AA + g_{YM}^2 AAAA$

$$\frac{1}{G_N}\sqrt{-g}\,R \sim (\partial h)^2 + \sqrt{G_N}\, h\partial h \partial h + (\sqrt{G_N})^2 hh\partial h\partial h + \ldots$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{G_N}\, h_{\mu\nu} \qquad [h] = \frac{d-2}{2}$$

(Einstein-Hilbert: Relatividad General) en $d \geq 2+1$

etc.

Vemos un patrón muy claro: el comportamiento UV en general empeora al agregar más factores de los campos, y mejora al disminuir la dimensión d del espaciotiempo. (Esta segunda observación es la base para el método de "regularización dimensional" que es el más útil/socorrido en la práctica, y que discutiremos unas páginas más adelante.)

Ahora, dado que la relatividad general figura en la última lista, resulta difícil pensar en desechar por completo las teorías no renormalizables. Después de todo, ¡parece que la gravedad existe!

Hoy en día, la visión más generalizada es que cualquier teoría cuántica de campos es apenas una "teoría efectiva a bajas energías", es decir, una descripción aproximada de una teoría más fundamental, que se vuelve imprescindible a altas energías / distancias pequeñas. La idea es que existe una cierta escala energética Λ más allá de la cual aparecen nuevos efectos físicos, y la teoría de campos no es ya una buena aproximación. (P.ej., esperamos efectos de gravitación cuántica a distancias tan pequeñas como la longitud de Planck, $l_P \sim 10^{-20}\,m - 10^{-35}\,m$,

dim extra grandes ("mundo brana") Planck tradicional

o lo que es lo mismo, a energías tan grandes

como la escala de Planck, $m_p \sim 10^4 - 10^{19}$ GeV.)
El parámetro de corte Λ tendría entonces un claro sentido físico.

Ahora bien, en presencia de un corte, las teorías no renormalizables tienen tanto sentido como las renormalizables, porque no existen verdaderas divergencias UV. La diferencia entre ambos tipos radica en que en el caso de una teoría renormalizable podemos 'alejar' la nueva física tanto como deseemos (es decir, mandar $\Lambda \to \infty$), al punto que nuestras predicciones sean insensibles a ella. Entenderemos con más claridad este punto más adelante, desde otra perspectiva, cuando estudiemos el "grupo de renormalización".

15:27/03/23

19:07/09/17

10. Renormalización de QED

Aplicaremos ahora la maquinaria general de renormalización a otro ejemplo particular:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}\underbrace{F_0^{\mu\nu}F_{0\,\mu\nu}}_{\partial^\mu A_0^\nu - \partial^\nu A_0^\mu} + \bar{\psi}_0(i\underbrace{\not{D}_0}_{\gamma^\mu(\partial_\mu + ie_0 A_{0\mu})} - m_0)\psi_0$$

← desnudo, no componente

electrón: $= -|e_0|$

$$= -\frac{1}{4}F_0^{\mu\nu}F_{0\,\mu\nu} + \bar{\psi}_0(i\not{\partial} - m_0)\psi_0 - e_0\bar{\psi}_0\gamma^\mu\psi_0 A_{0\mu}$$

en 3+1 dimensiones, que como sabemos es un ejemplo muy importante porque realmente describe a (una parte de) el mundo real.

A partir de $[\mathcal{L}] = 4$ tenemos $D_A = 1$, $D_\psi = 3/2$.

$D_{m_0} = 1$ es un acoplamiento súper-renormalizable,

$D_{e_0} = 0$ es estrictamente renormalizable,

así que QED es una teoría renormalizable por conteo de potencias.

Antes de proceder con el análisis, debemos asegurarnos de tener el lagrangiano más general posible consistente con las simetrías.

$\mathcal{L}_{QED}$ es invariante bajo:

1. Traslaciones
2. Lorentz restringido

$\Big\}$ Poincaré

3. P, T y C ($\Rightarrow$ obviamente PT, CPT, etc.)
4. Cambio de fase global $\psi_0(x) \to e^{ie_0\theta_0}\psi_0(x)$
5. Transformaciones de norma (redundancia)

$$\psi_0(x) \to e^{ie_0\theta_0(x)}\psi_0(x) \, , \quad A_{0\mu}(x) \to A_{0\mu}(x) - \partial_\mu\theta_0(x)$$

$$\text{con } \theta_0(x) \to 0 \quad \text{cuando } |x^\mu| \to \infty .$$

← excluye parte global (simetría (4))

Consideremos ahora todos los posibles términos renormalizables construidos con ψ_0 y A_0^μ que uno podría pensar en agregar a $\mathcal{L}_{QED}$:

- Términos con dependencia explícita de x^μ obviamente quedan excluidos por (1).

- Términos no escalares (como A_μ, ψ, $\bar\psi\partial_\mu\psi$, etc.) evidentemente quedan excluidos por ②.
- $\bar\psi_0\gamma^5\psi_0$, $\bar\psi_0\gamma^5(\not\partial+ie_0\not A_0)\psi_0$

  están prohibidos por ③, y $\bar\psi_0\gamma^5(\not\partial-ie_0\not A_0)\psi_0$ por ③ y por ⑤.
- $F_{0\mu\nu}\tilde F_0^{\mu\nu}=-4\vec E\cdot\vec B$ queda descartado por ③ (viola P y T) y es en cualquier caso una derivada total.

$\psi^c\equiv C\bar\psi^T$

- $\psi_0^T C\psi_0$, $\psi_0^T C\gamma^5\psi_0$, $\psi^T C(\not\partial+i\not A_0)\psi_0$, etc. (donde $C\equiv i\gamma^2\gamma^0$ es la matriz de conjugación de carga – ver pp. 293-94) quedan descartados por ④ (además de ③).

- $\partial\cdot A_0$, $A_0\cdot A_0$, $(\partial\cdot A_0)^2$, $\partial\cdot A_0 A_0^2$, $(A_0\cdot A_0)^2$ $\bar\psi_0(\not\partial-ie_0\not A_0)\psi_0$ están prohibidos por ⑤.
  ($\partial\cdot A_0A_0^2$ y $(A_0^2)^2$ sí figuran desde el inicio en el caso no abeliano.)

$\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

- $\bar{\psi}_0 S^{\mu\nu} \psi_0 F_{0\mu\nu}$, $(\bar{\psi}_0 \psi_0)^2$, $\overline{D_{0\mu}\psi_0} D_0^\mu \psi_0$, etc.

son compatibles con ①-⑤ pero quedan descartados (al menos a bajas energías) por ser no renormalizables.

Concluimos entonces que $\mathcal{L}_{QED}$ contiene ya todos los términos que resultarán necesarios para absorber las divergencias UV. Es importante recalcar que esto solo será cierto si tenemos cuidado de trabajar con un método de regularización que preserve a las simetrías ①-⑤.

Definiendo de la manera habitual campos renormalizados a través de

$$\psi(x) \equiv \frac{\psi_0(x)}{\sqrt{Z_2}}, \quad A_\mu(x) \equiv \frac{A_{0\mu}(x)}{\sqrt{Z_3}},$$

$Z_2 \equiv Z_\psi$ $\quad$ $Z_3 \equiv Z_A$

tenemos

$\partial^\mu A_0^\nu - \partial^\nu A_0^\mu$

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{0\,\mu\nu} F_0^{\mu\nu} + \bar{\psi}_0 (i\not{\partial} - m_0)\psi_0 - e_0 \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0 A_{0\mu}$$

$$= -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + Z_2 \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_0)\psi - e_0 Z_2 \sqrt{Z_3}\, \bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu$$

qe podemos separar en 2 partes,

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{QED,ren} + \mathcal{L}_{QED,ct} \quad , \qquad \text{con}$$

$$\mathcal{L}_{QED,ren} \equiv -\frac{1}{4} \underbrace{F_{\mu\nu}}_{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu$$

y

$$\mathcal{L}_{QED,ct} \equiv -\frac{1}{4} \underbrace{(Z_3 - 1)}_{\equiv \delta Z_3} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \underbrace{(Z_2 - 1)}_{\equiv \delta Z_2} \bar{\psi} i\not{\partial}\psi$$

$$- \underbrace{(Z_2 m_0 - m)}_{\equiv \delta m} \bar{\psi}\psi - \underbrace{(\underbrace{Z_2 \sqrt{Z_3}\, e_0}_{\equiv Z_1 e} - e)}_{(Z_1 - 1)e \,\equiv\, \delta Z_1 e \;\; (\equiv \delta e)} \bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu$$

Para definir a Z_2, Z_3, m y e (y con ello a δZ_2, δZ_3, δm y δZ_1), necesitamos 4 condiciones de renormalización, que escribiremos en detalle más adelante (usaremos nuevamente un esquema de renormalización en la capa de masa).

Podemos notar que la transformación de norma de los campos desnudos,

$$\psi_0(x) \to e^{ie_0\theta_0(x)}\psi_0(x) \ , \quad A_{0\mu}(x) \to A_{0\mu}(x) - \partial_\mu \theta_0 \ ,$$

se puede reescribir en términos de los campos renormalizados y de una función reescalada de norma

$$\theta(x) \equiv \frac{e_0}{e}\theta_0(x)$$ en la forma

$$\psi(x) \to e^{ie\theta(x)}\psi(x) \ , \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{e}{\sqrt{Z_3}\,e_0}\partial_\mu \theta(x).$$

En el lagrangiano renormalizado, A_μ aparece solo en la combinación $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$, así que $\mathcal{L}_{QED,ren}$ será por sí solo invariante bajo la anterior transformación solo si ocurre que

$$e = \sqrt{Z_3}\, e_0 \qquad \Big(\longleftrightarrow D_\mu = \partial_\mu + i \underset{\sqrt{Z_3}\, e_0}{e} \underset{\frac{A_{0\mu}}{\sqrt{Z_3}}}{A_\mu} = \underbrace{\partial_\mu + i e_0 A_{0\mu}}_{D_{0\mu}} \Big).$$

En ese caso tendremos

$$Z_1 \equiv Z_2 \frac{\sqrt{Z_3}\, e_0}{e} = Z_2$$

(y por tanto $\underset{Z_1 - 1}{\delta Z_1} = \underset{Z_2 - 1}{\delta Z_2}$), en virtud de lo cual

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED,ct} &= -\frac{1}{4}\delta Z_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \delta Z_2 \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi \\ &\quad - \delta m \bar{\Psi}\Psi \qquad - \delta Z_1 \bar{\Psi} e \not{A} \Psi \\ &= -\frac{1}{4}\delta Z_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}\Big[i\delta Z_2 \underbrace{(\not{\partial} + ie\not{A})}_{D_\mu} - \delta m \Big]\Psi\end{aligned}$$

será también invariante por sí solo.

Pero debemos tener presente que $\delta Z_2, \delta Z_3, \delta Z_1, \delta m$ quedarán definidos (más adelante) a través de nuestras 4 condiciones de renormalización, por lo que solo después de los cálculos sabremos si $\delta Z_1 = \delta Z_2$ o no.

A partir de $\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{QED,ren} + \mathcal{L}_{QED,ct}$, podemos deducir las reglas de Feynman de la expansión perturbativa renormalizada en QED.
Pero primero, debemos recordar (p.ej., de la p. 338) que el operador diferencial $\Delta_x^{\mu\nu}$ que aparece en el término cinético para A_μ,

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \overset{\text{partes}}{=\!=} \frac{1}{2}A_\mu \underbrace{\left(\eta^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu\right)}_{\equiv \Delta_x^{\mu\nu}} A_\nu$$

__No__ es invertible, porque $\partial_\nu \theta(x)$ (para cualquier función escalar $\theta(x)$) es una eigenfunción de $\Delta_x^{\mu\nu}$ con eigenvalor cero. Esto es consecuencia de la invariancia de norma, y nos impide obtener el propagador del fotón simplemente como $\Delta^{-1}_{\mu\nu}$.
Pero conocemos muy bien la solución a este problema: debemos eliminar la redundancia, agregando (ya

sea en el formalismo canónico o el de integral funcional) al término fijador de norma

$$\mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 = -\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{\xi Z_3}}_{\equiv \frac{1}{\xi_0}}(\partial\cdot A_0)^2$$

Como vimos en las pp. 357 y 581-82, esto modifica

$$\Delta_x^{\mu\nu} \longrightarrow (\Delta_x^\xi)^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu}\partial^2 - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu ,$$

que sí es invertible:

$$\Delta^{-1}_{\lambda\nu}(x,x') = \underbrace{\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-x')}\underbrace{\left(\frac{-i}{p^2+i\epsilon}\right)\left[\eta_{\lambda\nu} - (1-\xi)\frac{p_\lambda p_\nu}{p^2+i\epsilon}\right]}_{\equiv \tilde{M}_{F\lambda\nu}(p)}}_{\equiv M_{F\lambda\nu}(x-x')}$$

satisface

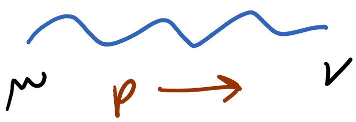
$$(\Delta_x^\xi)^{\mu\lambda}\Delta^{-1}_{\lambda\nu}(x,x') = i\,\delta^\mu_\nu\,\delta^{(4)}(x-x') .$$

Tomando esto en cuenta, y el hecho de que

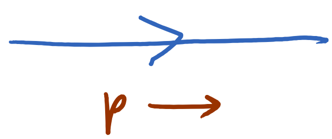
$$-\frac{1}{4}\delta Z_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \overset{\text{partes}}{=\!=} \frac{1}{2}\delta Z_3 A_\mu \left(\eta^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu\right) A_\nu ,$$

podemos leer las reglas de Feynman en espacio de momentos

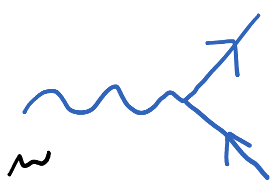
Feynman: $\xi = 1$
Landau: $\xi = 0$



$$= -\frac{i}{p^2+i\epsilon}\left(\eta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)$$

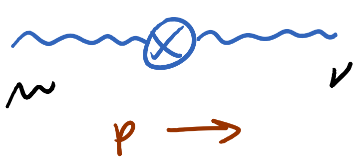


$$= \frac{i}{\not p - m + i\epsilon} = \frac{i(\not p + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



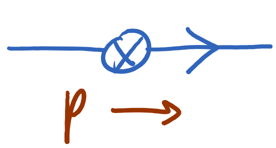
$$= -ie\gamma^\mu$$

de $\frac{1}{2}\delta Z_3 A_\mu\left(\eta^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu$



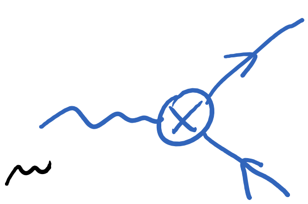
$$= -i\,\delta Z_3\left(\eta^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu\right)$$

de $\delta Z_2 \bar\Psi i\not\partial \Psi - \delta m \bar\Psi \Psi$



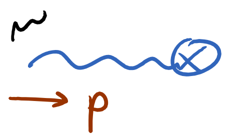
$$= i\left(\delta Z_2 \not p - \delta m\right)$$

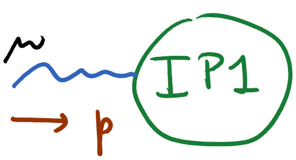
de $-\delta Z_1 \bar\Psi e \not A \Psi$



$$= -ie\,\delta Z_1 \gamma^\mu$$

Ahora, dado que el término $-\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2$ NO es invariante de norma (¡justamente por eso lo agregamos!), debemos volver a cuestionarnos si podríamos requerir contratérminos asociados a los términos que en nuestro recuento inicial (p. 732) descartamos por invariancia de norma:

- $\alpha_1\, \partial\cdot A \Rightarrow$  $= -\alpha_1 p_\mu$

Este contratérmino solo sería necesario si encontramos una divergencia UV en , pero por conservación de momento ($\leftrightarrow$ invariancia bajo translaciones) debemos tener $p=0$, ¡así que  sería de hecho inútil!

Más nos vale entonces que no exista tal divergencia. Felizmente, las amplitudes con un número impar de fotones (y sin fermiones) se anulan por invariancia bajo conjugación de carga.