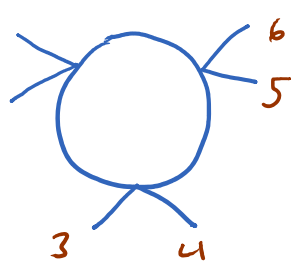


Y un punto importante es que, al armar \tilde{G}_N a partir de funciones propias $\tilde{\Gamma}_N$, no pueden aparecer nuevas divergencias UV, porque no estamos agregando ningún lazo = No hay integrales $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ adicionales.

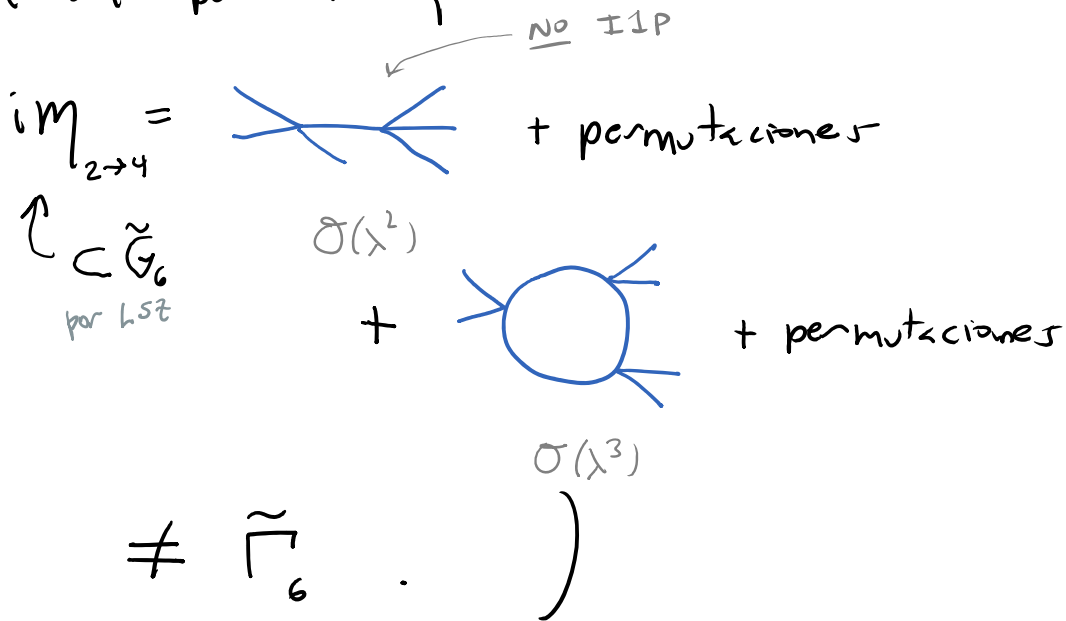
Ahora, para responder la pregunta i), notemos primero que la simetría de la teoría φ^4 bajo $\varphi \rightarrow -\varphi$ implica que si N es impar, $\tilde{G}_N \propto \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_1 \dots \hat{\varphi}_N \} | \Omega \rangle = (-1)^N \tilde{G}_N = 0 \Rightarrow \tilde{\Gamma}_N = 0$.

(Estamos asumiendo aquí que no hay "rompimiento espontáneo de simetría", es decir, que el vacío preserva la invariancia bajo $\varphi \rightarrow -\varphi$ y por lo tanto tenemos en particular $\langle \Omega | \hat{\varphi}(x) | \Omega \rangle = 0$.)

El primer caso $N > 4$ a considerar es entonces

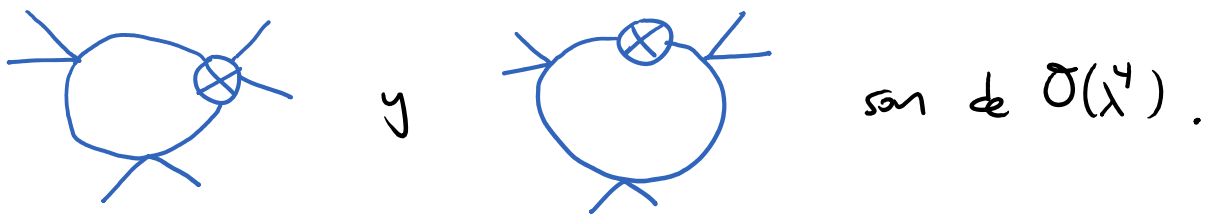
$$\tilde{\Gamma}_6(p_1, \dots, p_5) = \underbrace{\text{diagrama}}_{\mathcal{O}(\lambda^3)} + \text{permutaciones de las patas externas} + \mathcal{O}(\lambda^4)$$


(Notar por cierto que

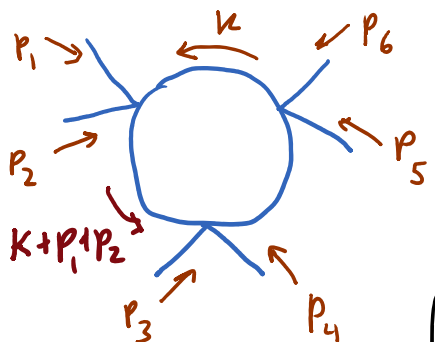


Es preocupante que aquí tenemos diagramas de 1 lazo que no están acompañados por diagramas

con contraterminos para cancelar posibles divergencias UV, porque no existe , y p.ej. ← proviene de ϕ^6



Pero podemos notar que, de hecho,



$$= (-i\lambda)^3 \frac{1}{3}$$

$$\cdot \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p_1+p_2)^2 - m^2} \frac{i}{(k+p_1+p_2+p_3+p_4)^2 - m^2}$$

$$\sim \int \frac{d^4 k}{k^6} \sim \Lambda^{-2}$$

¡es finito sin necesidad de emplear contra términos!

Más en general, un diagrama con L lazos e I líneas internas (\leftrightarrow propagadores) puede ser proporcional a

$$\int d^4 k_1 \dots d^4 k_L \underbrace{\frac{i}{k_1^2} \dots \frac{i}{k_1^2} \dots \frac{i}{k_L^2} \dots \frac{i}{k_L^2}}_I \sim \Lambda^{4L-2I}$$

por la región de la integral múltiple donde todos los $k_n \propto \Lambda \rightarrow \infty$ al mismo tiempo.

Llamamos por lo tanto a

$$D \equiv 4L - 2I$$

el grado de divergencia superficial (o primitivo) del diagrama. Si $D \geq 0$, esperaríamos que el diagrama tenga una divergencia UV $\propto \Lambda^D$ ($D=0$ corresponde a una posible divergencia logarítmica). Para $L=1$, como en el ejemplo que hicimos en $\tilde{\Gamma}_6$, hay una sola variable de integración k_1 , así que D determina por completo si el diagrama es finito o no. Para $L \geq 2$, $k_n \propto \Lambda \rightarrow \infty \forall n$ No es la única región de posible divergencia, así que la situación es un poco más complicada, como veremos más adelante.

Notemos ahora que (ver p. 421 del curso anterior)


$$L = I - V + 1$$

↖ # de vértices (↔ deltas de Dirac)

↗ # de integrales sobre momentos

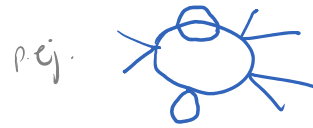
↖ # de partículas virtuales

↖ deltas de Dirac que implementa conservación del momento total (condición sobre patas externas)

(pej., , , )

$L = 3 - 2 + 1 = 2$ ✓ $L = 1 - 1 + 1 = 1$ ✓ $L = 4 - 3 + 1 = 2$ ✓

y por otro lado, en φ^4



$$4V = E + 2I,$$

↖ # de potes externos (que en $\tilde{\Gamma}_N$ estabamos llamando N)

porque los vértices en esta teoría son de 4 potes, y terminan en un vértice simple extremos de cada línea interna, pero solo un extremo de cada línea externa. Así que podemos reexpresar

$$\begin{aligned} D &= 4L - 2I \\ &= 4(\overbrace{I - V + 1}^{\leftarrow}) - 2I = \underbrace{2I - 4V + 4}_{4V - E} \\ &= \cancel{4V} - E - \cancel{4V} + 4 \end{aligned}$$

Es decir, el grado de divergencia superficial de un diagrama,

$$D = 4 - E$$

↙ en esta teoría es independiente de L (o de $V = L + \frac{E}{2} - 1$).

Concluimos entonces que, en la teoría φ^4 en 3+1 dim, $D \geq 0$ solo si $E \leq 4$, y por lo tanto solo los diagramas

que figuran en $\tilde{\Gamma}_2$ y $\tilde{\Gamma}_4$ son superficialmente (o primitivamente) divergentes.

En particular, a 1 lazo todos los diagramas con $E > 4$ resultan ser finitos, así que con nuestros resultados para $\tilde{\Gamma}_2$ y $\tilde{\Gamma}_4$ hemos logrado que, a este orden, todos las funciones de correlación (IIP o no), y por tanto todos las amplitudes, sean ya finitas. Esto responde la pregunta i) (de la p. 679).

Ahora consideremos la pregunta ii): ¿qué pasa al calcular más allá de 1 lazo?

Conviene desglosar

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{---} \otimes \text{---} \\ \uparrow \\ p \end{array} \equiv \underbrace{\text{---} \otimes_1 \text{---}}_{i(\delta z_1 p^2 - \delta m_1^2)} + \underbrace{\text{---} \otimes_2 \text{---}}_{i(\delta z_2 p^2 - \delta m_2^2)} + \dots \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ \sigma(\lambda) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \sigma(\lambda^2) \end{array}
 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagrama con un bucle} \equiv \underbrace{\text{Diagrama con un bucle}_1}_{-i\delta\lambda_1} + \underbrace{\text{Diagrama con un bucle}_2}_{-i\delta\lambda_2} + \dots \\
 \begin{array}{c}
 \uparrow \sigma(\lambda^2) \quad \uparrow \sigma(\lambda^3) \\
 \text{subíndices hacen referencia} \\
 \text{al orden en la expansión en} \\
 \text{lazos en el que estos} \\
 \text{vértices contribuyen}
 \end{array}
 \end{array}$$

Notar que $[\delta z] = [\delta \lambda] = M^0$, $[\delta m^2] = M^2$ y

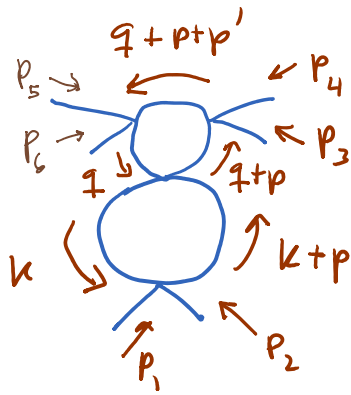
$\delta z \equiv z - 1$, $\delta m^2 \equiv z m_0^2 - m^2$, $\delta \lambda \equiv z \lambda_0^2 - \lambda$ son constantes.

Las condiciones de renormalización (1') y (2), aplicadas a 2 lazos, debieran determinar

~~Diagrama con un bucle~~₂ y ~~Diagrama con un bucle~~₂; la pregunta crucial es si el resultado nuevamente implica la cancelación de todas las divergencias a este orden.

Una novedad importante es que, en cálculos de 2 lazos en adelante, incluso un diagrama superficialmente convergente ($D < 0$) puede de hecho incluir una divergencia UV.

Pej., en $\tilde{\Gamma}_6$ a 2 lazos encontramos el diagrama



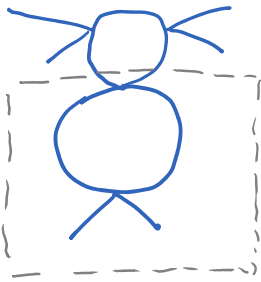
$$\propto \lambda^4 \int d^4 k d^4 q \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+p)^2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q+p)^2} \frac{1}{(q+p+p')^2}$$

$$p \equiv p_1 + p_2, \quad p' \equiv p_3 + p_4$$

Su grado de divergencia superficial es $D = 4 - E = -2$, así que la región de la integral donde $k \sim \Lambda$ y al mismo tiempo $q \sim \Lambda$ da lugar a un comportamiento $\propto \Lambda^{-2}$, y es por tanto convergente.

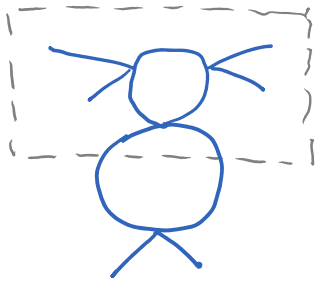
Sin embargo, la región donde $k \sim \Lambda$ con q fijo da lugar a un comportamiento $\Lambda^{4-2 \cdot 2} = \Lambda^0$, es decir, una divergencia logarítmica!

Pero la razón es clara: el diagrama de 6 patas que estamos considerando incluye un subdiagrama de 1 lazo con $E = 4$,



, que como habíamos visto antes tiene $D=4-E=0$, y de lugar por tanto a una divergencia logarítmica. El mantener q fijo mientras $k \sim \Lambda \rightarrow \infty$ equivale

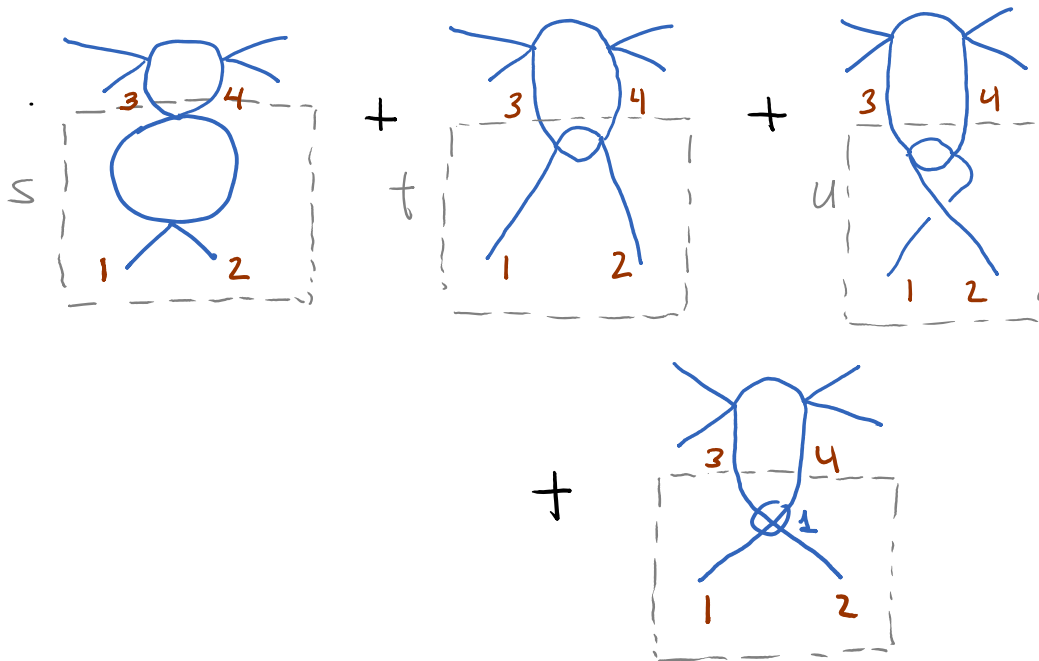
a tratar a las 2 líneas internas cortadas por el recuadro rayado como si fueran partes externas, así que nos deja justamente en el comportamiento UV del subdiagrama. Similarmemente, si consideramos



$q \sim \Lambda \rightarrow \infty$ en k fijo, tenemos el mismo comportamiento UV que en el subdiagrama indicado a la izquierda, el cual apareció en $\tilde{\Gamma}_6$ a 1 lazo, y es por tanto convergente.

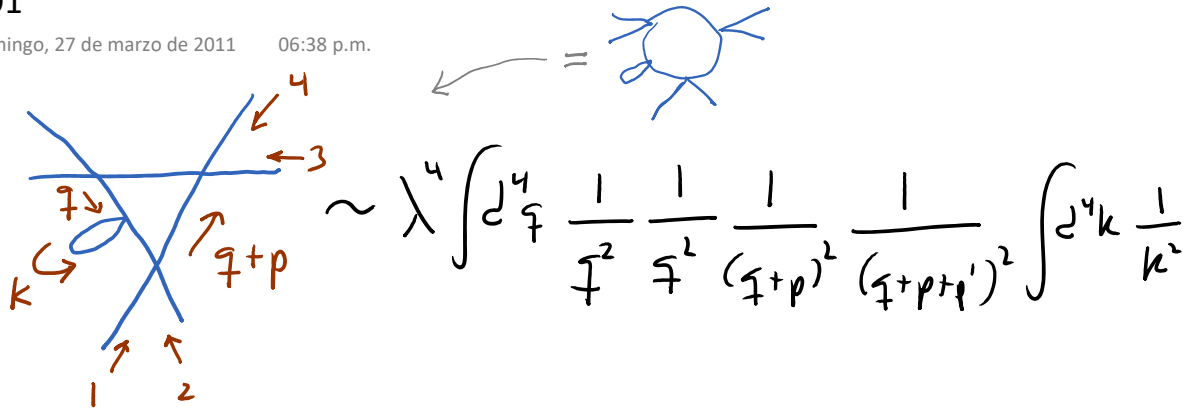
Recordando (de las pp. 666-673) que el subdiagrama en divergencia logarítmica era apenas uno de 3 diagramas divergentes en $\tilde{\Gamma}_4$ a 1 lazo (el asociado a la variable de Mandelstam s , si lo leemos

verticalmente), sospecharíamos que la suma de diagramas



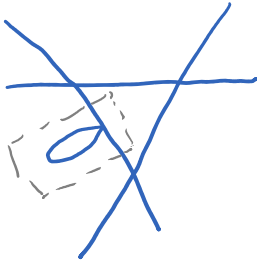
que contribuyen todos a $\tilde{\Gamma}_6$ a $\mathcal{O}(\lambda^4)$, es finita. Y esto resulta ser cierto: las regiones $k \sim \eta \sim \Lambda \rightarrow \infty$ y $\eta \sim \Lambda$ con k fijo ya eran finitas en los diagramas s, t y u por separado, y la combinación de estos 3 con el que involucra a $\delta\lambda_1$ habíamos visto ya anteriormente (pp. 675-677) que es finita en la región restante $k \sim \Lambda \rightarrow \infty$ con η fija.

Otro ejemplo de 'subdivergencias' es



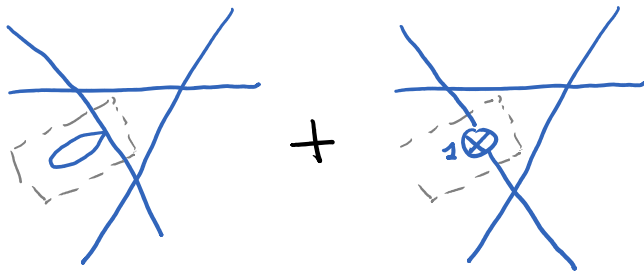
$$\sim \lambda^4 \int d^4 q \frac{1}{q^2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q+p)^2} \frac{1}{(q+p+q')^2} \int d^4 k \frac{1}{k^2}$$

que, a pesar de tener nuevamente $D=4-6=-2$ (y ser por tanto finito cuando $q \sim k \sim \Lambda \rightarrow \infty$), contiene una divergencia cuadrática que proviene de la región donde $k \sim \Lambda \rightarrow \infty$ con q fijo. Esta subdivergencia está



evidentemente asociada a subdiagramas indicados a la izquierda (que encontramos en $\tilde{\Gamma}_2$ a 1

1a2a), y por tanto desaparece al sumar

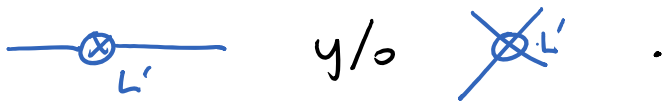


(que figuran ambos en $\tilde{\Gamma}_6$ a $O(\lambda^4)$).

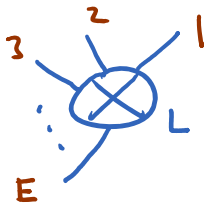
Esta es una idea general. Se puede mostrar que

un diagrama es (absolutamente) convergente si su grado de divergencia superficial, así como el de todos sus posibles subdiagramas, es negativo. Este es el llamado teorema de Weinberg.

Las posibles divergencias en $\tilde{\Gamma}_{E>4}$ a $L \geq 2$ lazos siempre se originan de subdiagramas con 2 ó 4 patas externas y $L' < L$ lazos, por lo que es natural esperar que estas divergencias desaparezcan al incluir los otros términos ya conocidos



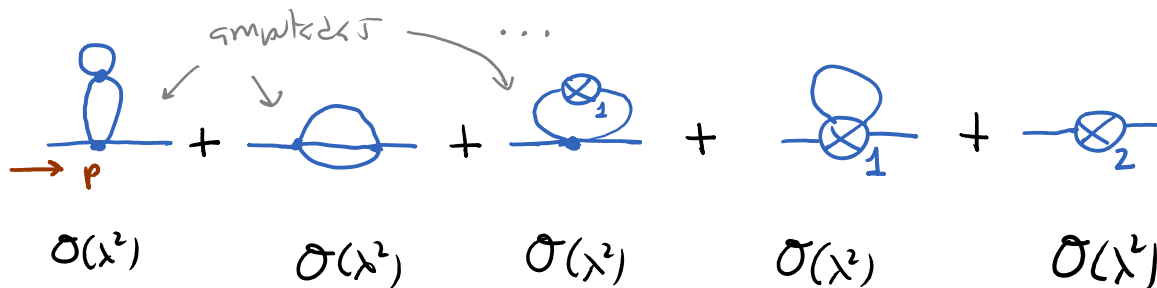
El que las divergencias en $E > 4$ aparezcan solo en subdiagramas correspondientes a $\tilde{\Gamma}_2$ o $\tilde{\Gamma}_4$ es crucial para que puedan eliminarse, puesto que de existir divergencias genuinamente nuevas en $\tilde{\Gamma}_{E>4}$ a L lazos, su cancelación hubiera requerido nuevos contra términos en E patas,



, que no están presentes en L .

El paso importante sigue siendo entonces renormalizar los correladores propios primitivamente divergentes $\tilde{\Gamma}_2$ y $\tilde{\Gamma}_4$. P.ej., a 2 lazos,

$\tilde{\Gamma}_2(p) = -i \Delta m^2(p^2)$ consiste de



Después nuevamente imponer las condiciones de renormalización (1'), determinando con ello el nuevo ingrediente

$$\text{Diagram with two loops and a tadpole} = i(\delta z_2 p^2 - \delta m_2^2)$$

y después comprobar que el resultado es justamente lo que se necesita para eliminar todas las posibles divergencias de $\tilde{\Gamma}_2(p)$ a este orden.

L9: 27/02/19 (-10 min) L6: 27/08/17

Es importante notar que esto no es trivial:

con $\text{---}\otimes_2\text{---} = i(\delta z_2 p^2 - \delta m_2^2)$ podremos eliminar solamente divergencias del tipo (por análisis dimensional)

$$\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) p^2, \Lambda^2, m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right),$$

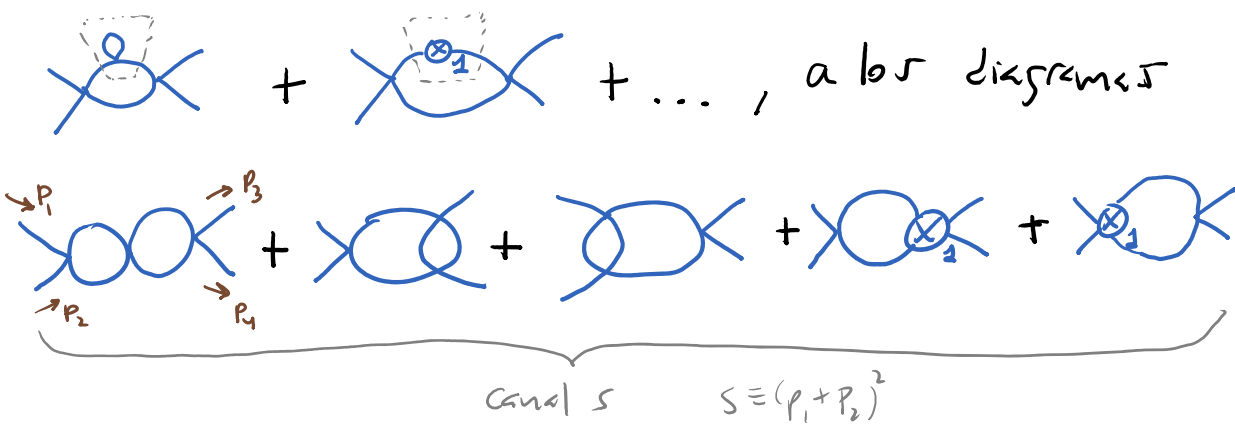
corrección a Λ^2 de orden $\frac{m^2}{\Lambda^2}$

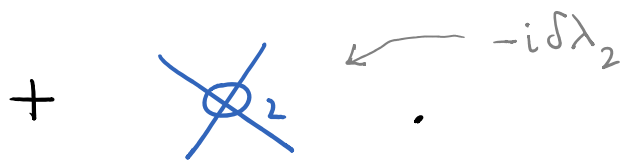
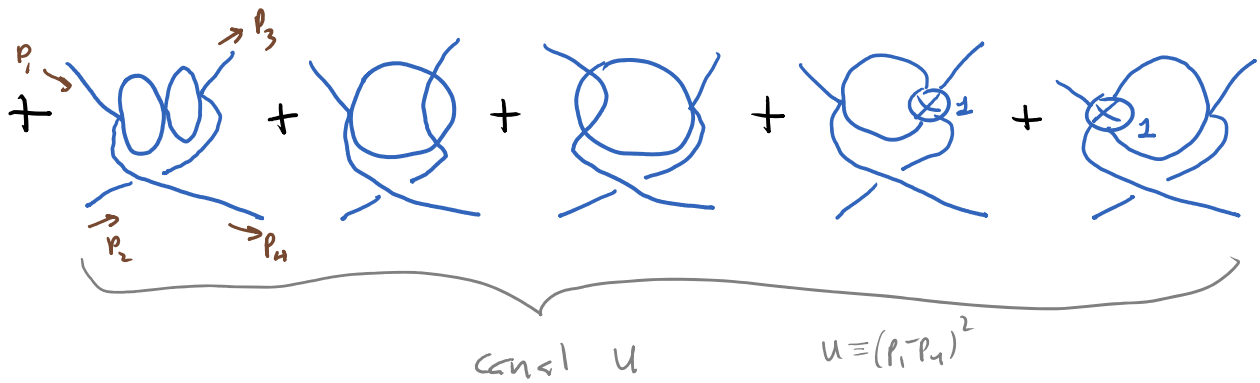
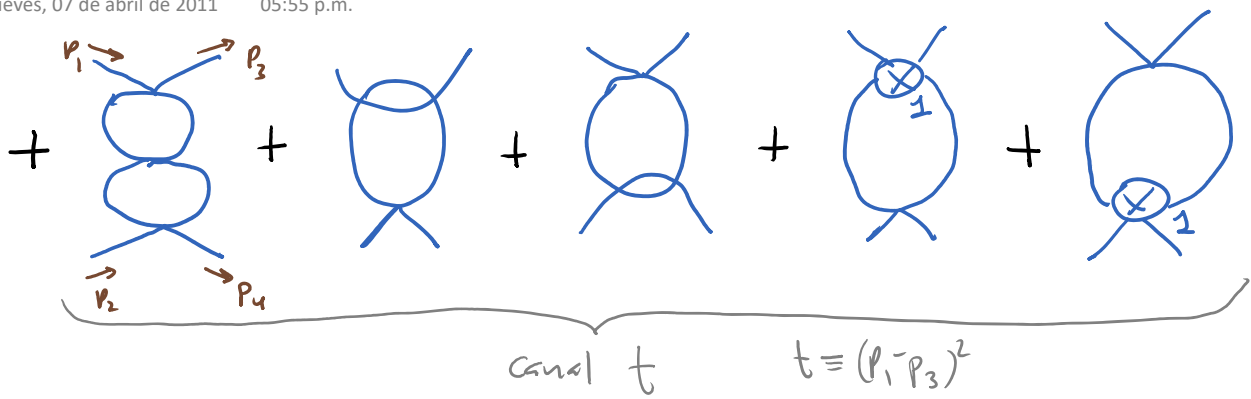
que llamamos "divergencias locales", porque corresponden a deltas de Dirac en espacio de posiciones, tal como los contraterminos contenidos en nuestro $\mathcal{L} \sim (\partial_\mu \phi)^2 - \phi^2 - \phi^4$ local. Pero No, p.ej.:

$$\Lambda^2 \ln\left(\frac{p^2}{m^2}\right),$$

que es una divergencia No local ¡y claramente no podría venir de ningún contratermino local en \mathcal{L} !

De manera similar, en $\tilde{\Gamma}_4$ a 2 lazos tenemos, además de correcciones al primer lazo como





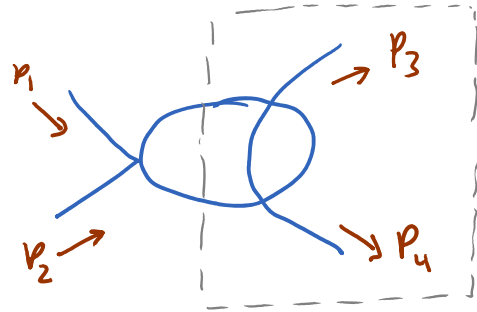
Este último controtérmino solo nos permitirá cancelar divergencias independientes de p_1, p_2, p_3, p_4 (es decir, de s, t, u)!

Por aún, podemos ver que los diagramas individuales si contienen divergencias UV con la dependencia de p no deseada. P.ej.,

$$\sim \lambda^3 \int d^4k d^4q \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+p)^2} \frac{1}{(k+p_3+q)^2} \frac{1}{q^2}$$

$$p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

incluye en particular la región de integración $q \sim \Lambda$ con k fijo, que corresponde al subdiagrama



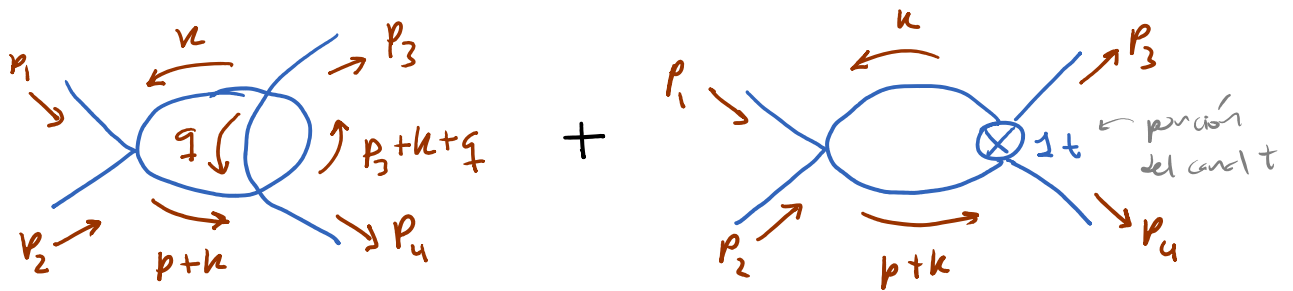
que se muestra a la derecha, y que ya calculamos en las pp. 666-671: sabemos que da lugar a una subdivergencia $\sim \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)$.

Combinando con la integral sobre $k \sim p$, obtenemos entonces el comportamiento $\sim \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \ln\left(\frac{p^2}{m^2}\right)$, que es una de las famosas divergencias no locales.

Pero la clave es que este resultado para el diagrama en cuestión solo fue posible por la existencia de la subdivergencia indicada, que

ya habíamos encontrado en nuestros cálculos a 1 lazo, y sabemos que se canceló con ~~1~~.

Esperaríamos entonces que la combinación



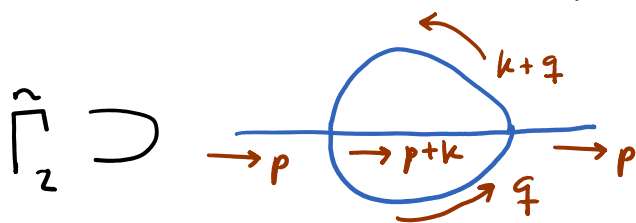
No contenga ya la subdivergencia para $\eta \sim \Lambda$ con k fijo, que daba lugar a la dependencia problemática $\sim \ln \Lambda \ln p^2$.

Si en verdad resulta ser el caso que los contra-
términos obtenidos hasta L lazos logren cancelar
todos las subdivergencias en diagramas con $L+1$
lazos, de manera que solo quede por eliminar la
posible divergencia superficial de cada diagrama,
entonces podremos convencernos de que solo tendremos
la dependencia de p permitida.

$\llcorner 13: 15/03/22$

Para ver esto, recordemos primero que los diagramas que contribuyen a $\tilde{\Gamma}_2$ y $\tilde{\Gamma}_4$ a $L+1$ lazos tienen $D=4-2=2$ y $D=4-4=0$, respectivamente.

La clave ahora es notar que, si diferenciamos el diagrama en cuestión con respecto a alguno de los momentos externos p_n^μ , entonces hacemos que su grado de divergencia superficial decrezca por 1, así que después de diferenciar $D+1$ veces, el resultado será finito. P.ej.,



$$(D=4-2=2)$$

$$\propto \lambda^2 \int d^4 k d^4 q \frac{1}{q^2 - m^2} \frac{1}{(k+q)^2 - m^2} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2} \sim \Lambda^{8-6},$$

tomando $k \sim \Lambda, q \sim \Lambda$

así que

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[\text{diagram} \right] \sim \lambda^2 \int d^4 k d^4 q \frac{1}{q^2} \frac{1}{(k+q)^2} \frac{(p+k)_\mu}{[(p+k)^2 - m^2]^2} \sim \Lambda^{9-8}$$

tiene $D=1$,

$$\frac{\partial}{\partial p^\nu} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[\text{Diagrama} \right] \sim \lambda^2 \int d^4 k \int d^4 q \frac{1}{q^2} \frac{1}{(k+q)^2}$$

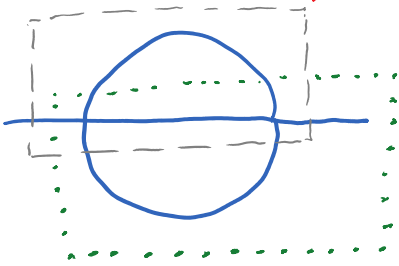
$$\frac{-4(p+k)_\mu (p+k)_\nu + \eta_{\mu\nu} [(p+k)^2 - m^2]}{[(p+k)^2 - m^2]^3} \sim \Lambda^{10-10}$$

tiene $D=0$, y similarmente

$$\frac{\partial}{\partial p^\lambda} \frac{\partial}{\partial p^\nu} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[\text{Diagrama} \right] \text{ tiene } D=-1.$$

Esta última expresión será entonces absolutamente convergente si ya anteriormente se han eliminado sus subdivergencias utilizando los contratérminos calculados a 1 lazo. Se puede verificar que dicha cancelación de subdivergencias efectivamente ocurre, aún cuando resulta menos obvia para este diagrama que para los ejemplos anteriores, debido a la

existencia de "divergencias traslapantes":



[ver p.ej. Collins, Weinberg].

El anterior procedimiento de diferenciación implica entonces que en

$$\left[\text{Diagrama con un bucle} + \text{diagramas con contra términos}_1 \right] \text{ que cancelan } \underline{\text{subdivergencias}}$$

el coeficiente de cualquier término divergente es a lo más una expresión cuadrática en p^μ . Por invariancia de Lorentz, debe ser del tipo $a p^2 + b$,

← NO sería cierto si regularización viola Lorentz

¡justo como necesitábamos para que pueda cancelarse

$$\text{con } \textcircled{\otimes}_2 = i(\delta_{\mu\nu} p^2 - \delta m^2) !$$

De manera similar, cualquier diagrama en $\tilde{\Gamma}_4$ (con sus subdivergencias ya canceladas) tiene $D=0$ y por tanto se vuelve finito al diferenciar 1 vez