

$$\tilde{\varphi}(p) \equiv \sum_n \varphi(x_n) e^{ip \cdot x_n}$$

\uparrow $n \Delta x$

es periódica con periodo $\frac{2\pi}{\Delta x}$ implica que la transformada de Fourier inversa está cuantizada,

$$\varphi(x) = \left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)^4 \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} d^4 p \tilde{\varphi}(p) e^{-ip \cdot x}$$

mas es familiar esta conexión dicha al revés: si x es periódica, \mathbb{R} p es discreta. $p_n = \frac{n}{R}$

En este sentido, entonces, imponer un corte de fuerza bruta en los momentos es similar a regularizar por retícula. Pero en el segundo caso hay un efecto adicional: al ser la acción no ya una integral $\int d^4 x$ sino una suma \sum_{x_n} , el propagador en espacio de momentos se modifica, y las expresiones que aparecen en cálculos perturbativos se complican.

Por esta razón, usaremos por ahora un corte de fuerza bruta. (Aunque, por otro lado, la regularización por retícula permite en ciertos teorías, como QCD, calcular la integral funcional numéricamente, para

obtener resultados No perturbativos.)

Existen por supuesto muchas maneras distintas de regularizar; mencionaremos al menos otras 2 más adelante. Conceptualmente, se puede considerar cada método de regularización como una propuesta diferente para la física a distancias muy pequeñas — pues no tenemos por qué creer ciegamente que el espaciotiempo es un continuo perfecto. Como veremos, bajo condiciones apropiadas, las predicciones experimentales que obtendremos serán independientes de los detalles de esta propuesta.

Volvamos a nuestra integral $\int d^4k \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$, queramos entonces imponer una restricción del tipo

$$0 \leq |k^\mu| \leq \Lambda \quad \forall \mu.$$

Pero notamos que esta condición no es invariante de Lorentz (define un marco preferencial). Parecería mejor entonces acotar la norma de k^μ ,

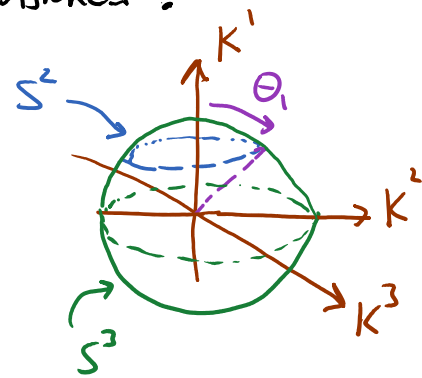
Tenemos entonces

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{d^4 K}{K^2 + m^2} = -i\lambda \frac{1}{2} \int_{K^2 \leq \Lambda^2} \frac{i d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{i}{-K^2 - m^2} = -\frac{i\lambda}{2(2\pi)^4} \int_{K^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 K}{K^2 + m^2}.$$

En vista de que el integrando y la región de integración dependen solo de la distancia radial en el espacio de momentos euclideo 4-dimensional, conviene cambiar a coordenadas esféricas en 4 dimensiones:

$$\begin{pmatrix} K^1 \\ K^2 \\ K^3 \\ K^4 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{pmatrix}$$

↑ coord. radial



$$\text{con } 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_3 < 2\pi$$

coord. angulares
sobre S^3

↑ ángulo polar

↑ ángulo azimutal

$$\Rightarrow d^4 K = K^3 dK \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3,$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv d\Omega_3} \quad \text{elemento de volumen sobre } S^3$$

LF: 20/02/19

con lo cual

$$\int_{K^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 K}{K^2 + m^2} = \int d\Omega_3 \int_0^\Lambda \frac{K^3 dK}{K^2 + m^2}$$

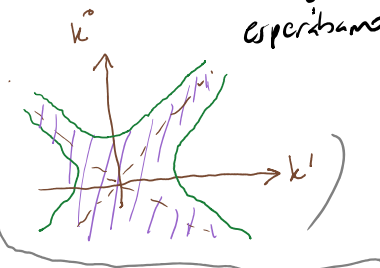
$$\int_0^{2\pi} d\theta_3 \int_0^\pi d\theta_2 \sin\theta_2 \int_0^\pi d\theta_1 \sin^2\theta_1 \left[\frac{K^2}{2} - \frac{m^2}{2} \ln(K^2 + m^2) \right]_0^\Lambda$$

$$= 2\pi^2 \equiv \Omega_3 \quad \frac{\Lambda^2}{2} - \frac{m^2}{2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\Lambda^2)$$

volumen de S^3 unidad

como esperamos

(A posteriori, integral lorentziana en $|k^i| < \Lambda^2$ también es finita:



A un lazo, concluimos entonces que

$$-i\Delta m^2(p^2) = -\frac{i\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \right] + i(\delta Z p^2 - \delta m^2).$$

Imponiendo nuestras condiciones de renormalización (1'),

podemos ahora deducir que, a este orden, $\left\{ \begin{array}{l} \Delta m^2(m^2) = 0 \\ \Delta m^2'(m^2) = 0 \end{array} \right.$

$$\delta Z = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

propiedad específicas de teoría φ^4

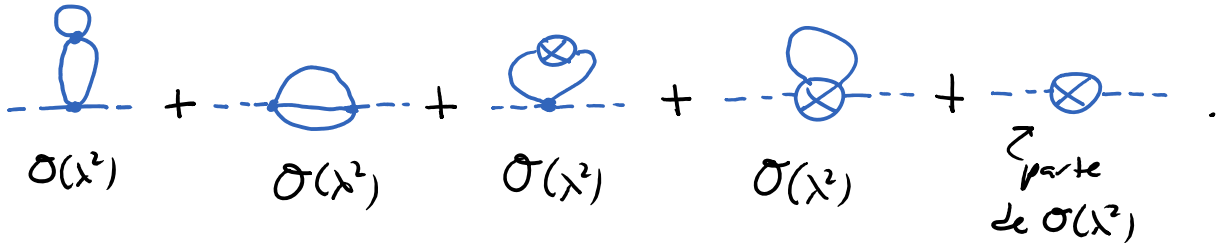
$$\delta m^2 = -\frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

a partir de lo cual obtenemos la autoenergía

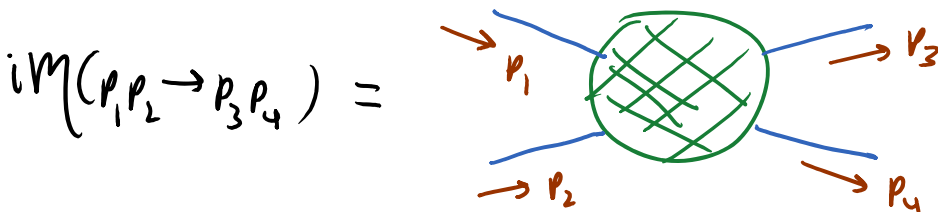
$$-i\Delta m^2(p^2) = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2), \text{ que es } \underline{\text{finita}} \text{ (}\delta m^2 \text{ canceló divergencia).}$$

OJO: "solo porque algo es infinito, no significa que sea cero".

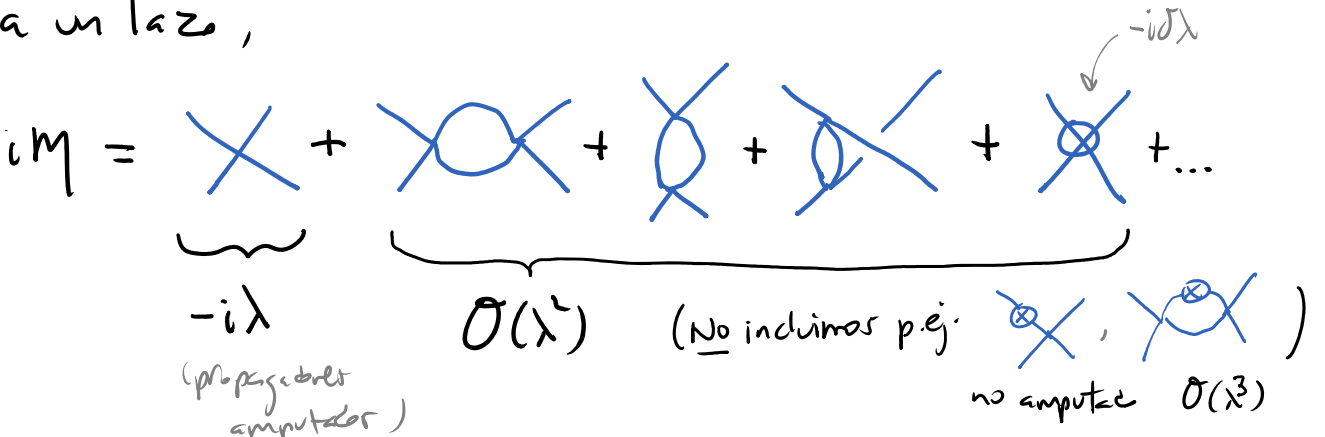
Las primeras contribuciones no nulas a $\Delta m^2(p^2)$ y δZ provienen del cálculo al siguiente orden,



Evidentemente, consideremos ahora la amplitud de dispersión que figura en nuestra otra condición de renormalización,



a un lazo,



Tenemos entonces que hacer varias integrales, empezando por

$$= (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda^4}{\lambda^4}\right),$$

que es logarítmicamente divergente en el UV.

Para procesar esta integral, conviene combinar los 2 factores del denominador en una sola expresión cuadrática, a través de la introducción de un "parámetro de Feynman" x .

$$\text{Usando } \int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)},$$

es fácil ver que

$$\int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)A + xB]^2} = \frac{1}{AB}$$

(y más en general,

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n}$$

[ver p.ej. Peskin p. 190]),

que podemos usar para reescribir (omitendo coeficiente $\frac{\lambda^2}{2}$)

$$I(s) \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \overset{A}{\leftarrow} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \overset{B}{\leftarrow}$$

↑ variable de Mandelstam $s \equiv p^2 = (p_1 + p_2)^2 = E_{cm}^2$

en la forma

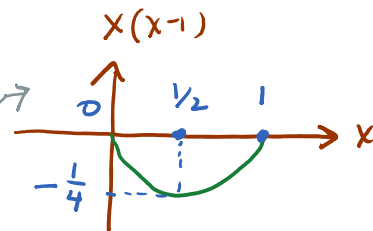
$$(1-x)A + xB = (1-x)[k^2 - m^2 + i\epsilon] + x \underbrace{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]}_{p^2 + 2p \cdot k + k^2}$$

$$I(s) = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\underbrace{[k^2 + 2xk \cdot p + xp^2 - m^2 + i\epsilon]}_{(k+xp)^2 + (x-x^2)p^2}}^2$$

$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \mu^2 + i\epsilon]^2}$$

con $l \equiv k + xp$

$$\mu^2 \equiv m^2 + \underbrace{(x^2 - x)p^2}_{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$



Llevando a cabo la rotación de Wick $l^0 = iL^4$, $\vec{l} = \vec{L}$,

$$I(s) = \int_0^1 dx \int \frac{i d^4 L}{(2\pi)^4} \frac{1}{[L^2 + \mu^2]^2}$$

Notar que $\mu^2 > 0 \quad \forall \quad 0 \leq x \leq 1$ si $s \equiv p^2 < 4m^2$, que No es la región física para el proceso de dispersión ($s = E_{cm}^2 \geq 4m^2$); pero sí es la región euclídea, donde llevamos a cabo la integral: $p^2 = -P^2$.
Pasando a coordenadas esféricas e imprimiendo

nuestro corte de fuerza bruta Λ ,

$$I(s) = \int_0^1 dx \ i \frac{(2\pi^2)^{\Omega_3}}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda \frac{L^3 dL}{(L^2 + \mu^2)^2}$$

nota que $L \leq \Lambda$
 No es exactamente
 lo mismo que
 $K = |L-xP| \leq \Lambda$,
 aunque esperamos
 que para $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\left[\frac{\mu^2}{2(L^2 + \mu^2)} + \frac{1}{2} \ln(L^2 + \mu^2) \right]_0^\Lambda$$

es decir,

$$I(s) = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} + 1\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \mu^2} \right]$$

$\uparrow m^2 + (x^2 - x)p^2$

11:08/03/22

La primera integral involucrada es (omitiedo coeficiente $\pm \frac{i}{16\pi^2}$)

$$I_1(s) \equiv \int_0^1 dx \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + (x^2 - x)p^2} + 1\right)$$

$$= \left[\frac{(-4m^2 + p^2) \tan^{-1}\left(\frac{p(2x-1)}{\sqrt{4m^2 - p^2}}\right)}{p\sqrt{4m^2 - p^2}} + \frac{\sqrt{4\Lambda^2 + 4m^2 - p^2}}{p} \tan^{-1}\left(\frac{p(2x-1)}{\sqrt{4\Lambda^2 + 4m^2 - p^2}}\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m^2 + (x^2 - x)p^2}{\Lambda^2 + m^2 + (x^2 - x)p^2}\right) + x \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2 + p^2(x^2 - x)}\right) \right]_0^1$$

$\checkmark p \equiv \sqrt{p^2}$

o lo que es lo mismo,

$$I_1(s) = \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \frac{2}{p} \sqrt{4m^2 - p^2} \tan^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}}\right) + \frac{2}{p} \sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2} \tan^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}}\right),$$

← divergente
← finito
← finito (→ 2)

donde vemos en el primer término la divergencia logarítmica (para $\Lambda \rightarrow \infty$) que esperábamos (a partir de $\int \frac{d^4k}{k^4}$).

La segunda integral es

$$I_2(s) \equiv \int_0^1 dx \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2 + (x^2 - x)p^2} = \left[\frac{2\Lambda^2 \tan^{-1}\left(\frac{p(2x-1)}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}}\right)}{p \sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{4\Lambda^2 \tan^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}}\right)}{p \sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}}.$$

$$\uparrow \text{finito: } I_2(s) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{4\Lambda^2 \left(\frac{p}{2\Lambda}\right)}{p 2\Lambda} = 1$$

Juntamos ambos resultados tenemos

$$I(s) = \frac{i}{16\pi^2} \left[I_1(s) - I_2(s) \right]$$

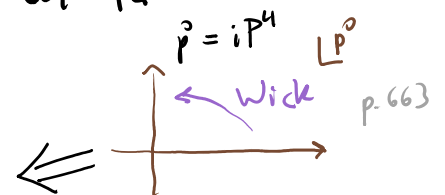
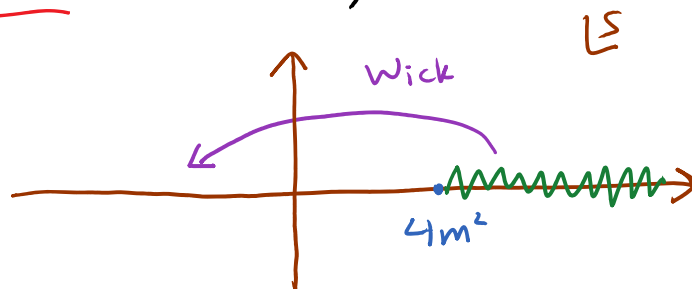
$$I(s) = \frac{i}{16\pi^2} \left[\ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{2}{p} \sqrt{4m^2 - p^2} \tan^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{4\Lambda^2 + 2(4m^2 - p^2)}{p\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}} \tan^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}} \right) \right].$$

Podemos notar aquí que, debido al segundo término en $I(s)$, la amplitud de dispersión

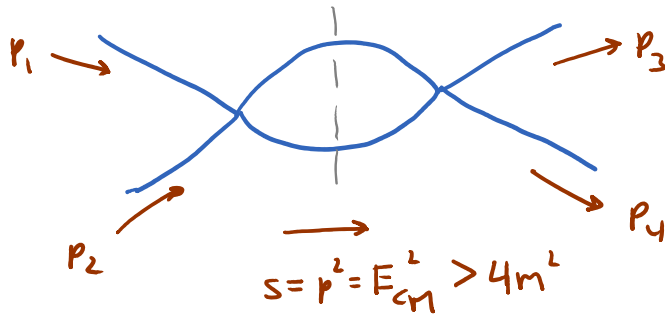
$$i\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) \equiv i\mathcal{M}(s, t, u) \quad \left(\begin{array}{l} \text{con} \\ s+t+u=4m^2 \end{array} \right) \\ = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} I(s) + \dots,$$

considerada como función de $s \equiv p^2 = (p_1 + p_2)^2 \in \mathbb{C}$,

tiene un corche ramal sobre el eje real en la región física $s > 4m^2$,



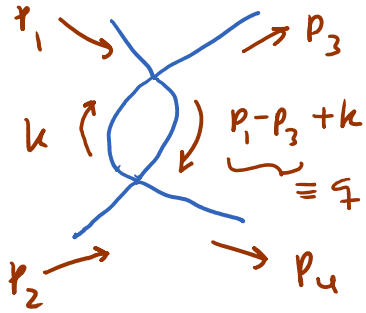
que se origina del estado intermedio de 2 partículas
cuando éstas van a la capa de masa (haciendo
 contacto en nuestra discusión del teorema óptico
 generalizado en las pp. 469-70):



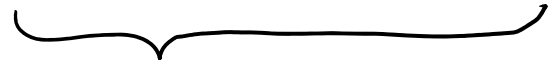
La amplitud de dispersión física se obtiene a partir
 del resultado euclideo por rotación de Wick inversa,
 haciendo una continuación analítica a la región que
 está por arriba del corte rama, es decir,

$$\text{tomando } \sqrt{4m^2 - p^2} = +i\sqrt{p^2 - 4m^2} .$$

Es fácil ver que los diagramas restantes con un lazo
 involucran exactamente las mismas integrales:



$$= (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(\xi+k)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

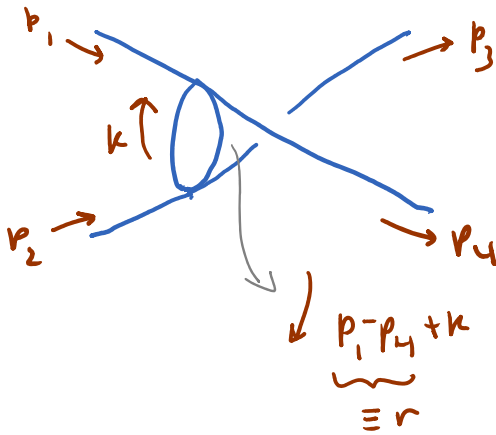


$-I(t)$

↻ variable de Mandelstam

$$t \equiv \xi^2 = (p_1 - p_3)^2$$

y de manera similar,



$$= (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} [-I(u)]$$

↻ variable de Mandelstam

$$u \equiv r^2 \equiv (p_1 - p_4)^2$$

Para imponer nuestra condición de renormalización (2),

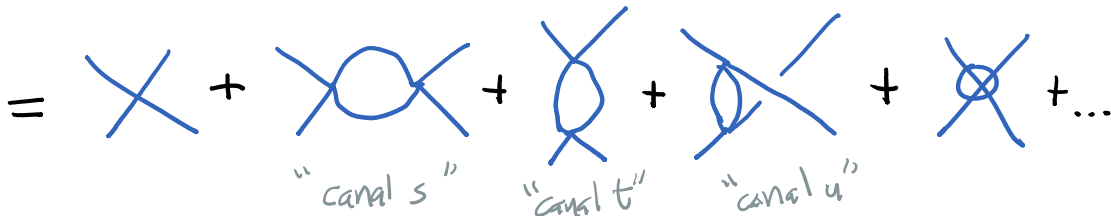
evaluamos

$$u = 4m^2 - s - t \text{ siempre}$$

(no es independiente)

$$i\mathcal{M}(s=4m^2, t=0) = -i\lambda$$

$$i\mathcal{M}(s=4m^2, t=0, u=0)$$



$$i\eta(s=4m^2, t=0, u=0) \\ = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \left[\mathcal{I}(4m^2) + \mathcal{I}(0) + \mathcal{I}(0) \right] - i\delta\lambda + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

e igualamos a $-i\lambda$. De aquí podemos deducir que

$$\delta\lambda = -\frac{i\lambda^2}{2} \left[\mathcal{I}(4m^2) + 2\mathcal{I}(0) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[\left\{ \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \frac{\Lambda}{m} \tan^{-1}\left(\frac{m}{\Lambda}\right) \right\} \right. \\ \left. + 2 \left\{ \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} \right\} \right] + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

Para $\Lambda \gg m$, esto se simplifica a

$$\delta\lambda = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[2 \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) + 1 + 2 \left\{ 2 \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - 1 \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[6 \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - 1 + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

Simplificando de la misma manera

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{i}{16\pi^2} \left[\ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \frac{2}{p} \sqrt{4m^2 - p^2} \tan^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\Lambda^2 + 2(4m^2 - p^2)}{p\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}} \tan^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{4(\Lambda^2 + m^2) - p^2}}\right) \right] \\
&= \frac{i}{16\pi^2} \left[2\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) - \frac{2}{\sqrt{s}} \sqrt{4m^2 - s} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4m^2 - s}}\right) \right. \\
&\quad \left. + 1 + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \right].
\end{aligned}$$

Juntando nuestros resultados, podemos obtener una expresión final para la amplitud de dispersión $2 \rightarrow 2$ en los momentos arbitrarios:

$$i\mathcal{M}(s,t) = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} [I(s) + I(t) + I(u)] - i\delta\lambda + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}(s,t) = & -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\cancel{6 \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)} + 3 \right] \leftarrow \text{de } I(s)+I(t)+I(u) \\
 & - \frac{2}{\sqrt{s}} \sqrt{4m^2-s} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4m^2-s}}\right) \leftarrow \text{de } I(s) \\
 & - \frac{2}{\sqrt{t}} \sqrt{4m^2-t} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{4m^2-t}}\right) \leftarrow \text{de } I(t) \\
 & - \frac{2}{\sqrt{u}} \sqrt{4m^2-u} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{4m^2-u}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \leftarrow \text{de } I(u)
 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow e^{-i\delta}$

$$- \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\cancel{6 \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)} - 1 + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

es decir,

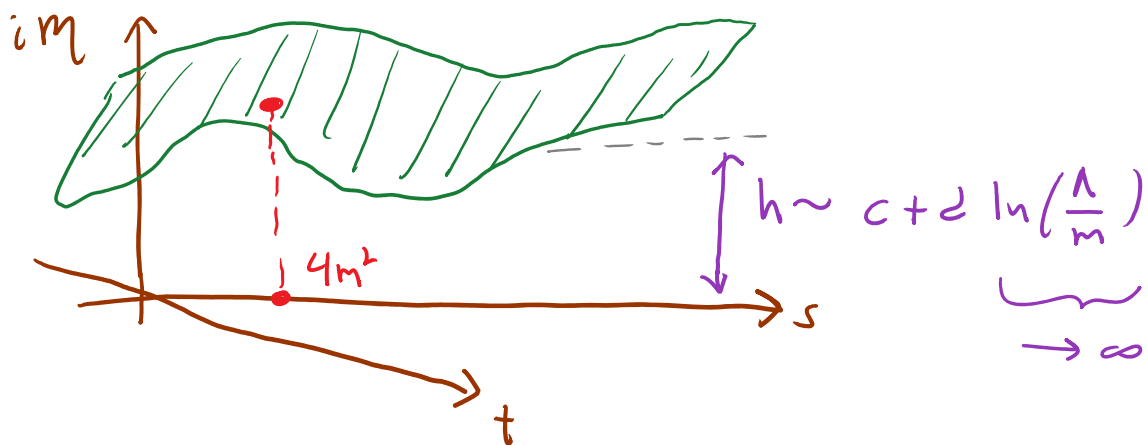
$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}(s,t) = & -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \left[\sqrt{\frac{4m^2}{s}-1} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{s}-1}}\right) \right. \\
 & \left. + \sqrt{\frac{4m^2}{t}-1} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{t}-1}}\right) + \sqrt{\frac{4m^2}{u}-1} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{u}-1}}\right) - 2 \right].
 \end{aligned}$$

[5: 24/08/17]

Esta expresión puede reescribirse en la región física $s > 4m^2$ usando la identidad $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$.

Lo más importante de este resultado es que es finito aún cuando $\Lambda \rightarrow \infty$: nuestra definición de λ (\leftrightarrow condición de renormalización (2)) obligó a $i\mathcal{M}(s,t)$ a ser finita para $s=4m^2, t=0$, y esto garantiza que sea finita $\forall s, t$.

Esquemáticamente, tenemos



y al pedir $i\mathcal{M} = -i\lambda$ en un punto, obligamos a $d=0$, con lo cual $i\mathcal{M}$ debe ser independiente de Λ en todos lados.

Podemos notar también que nuestros resultados

$$\tilde{\Gamma}_4(p_1, p_2, -p_3) \equiv \text{Diagram} = iM_{2 \rightarrow 2}(s, t),$$

sirven para determinar δZ , δm^2 y $\delta \lambda$ (y por tanto Z , m^2 y λ) en términos de m^2 , λ y Λ .

Y vimos también que, al menos a un lazo, el resultado sirve para hacer que $\tilde{\Gamma}_2$ y $\tilde{\Gamma}_4$ sean finitas. Las divergencias UV fueron absorbidas en δZ , δm^2 y $\delta \lambda$ automáticamente, no a mano.

Surgen entonces naturalmente 2 preguntas:

- i) Dado que a un lazo No tenemos ya más parámetros disponibles para renormalizar (que puedan por tanto absorber nuevas divergencias), ¿qué sucede cuando calculamos a un lazo $\tilde{G}_{N>4}$?

ii) ¿Qué sucede con todas las funciones de correlación a 2 lazos y más allá?

12:13/3/23

Antes de proceder, conviene notar que, en el análisis de posibles divergencias UV en cualquier teoría, basta concentrarse en las funciones de correlación $IP1$, $\tilde{\Gamma}_N$, porque las funciones de correlación genéricas \tilde{G}_N siempre se pueden escribir como combinaciones de $\tilde{\Gamma}_N$.

conectadas por propagadores aislados, que son justamente los sitios donde uno puede cortar el diagrama $IP1$ para desconectarlo. P.ej.,

