

8. Ecuaciones de Schwinger-Dyson e Identidades de Ward

Sabemos ya cuantizar cualquier teoría de campos por cuantización canónica y por integral funcional, aunque en general solo somos capaces de hacer cálculos explícitos si la teoría es débilmente acoplada (\Leftrightarrow ec. aprox. lineal \Leftrightarrow integral aprox. gaussianas).

Como hemos dicho varias veces, el objetivo primario es siempre determinar todas las funciones de correlación, funciones de Green o correladores

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

operadores en el cuadro de Heisenberg

vacío interactuante

que contienen toda la información física de la teoría.

Sabemos que en teorías libres representan directamente la amplitud de propagación de partículas entre puntos del espaciotiempo, mientras que en teorías interactuantes su transformada de Fourier contiene (a través de LSZ) las amplitudes de dispersión.

Vale la pena además destacar que, en cualquier teoría, tienen también un significado físico inmediato. Recordemos que en el vacío

el campo No tiene un valor definido en cada punto: $\hat{\varphi}(x)|\Omega\rangle \notin |\Omega\rangle$.

Por lo general, su valor esperado es cero, $\langle \Omega | \hat{\varphi}(x) | \Omega \rangle = 0$,

lo cual muestra que tiene igual propensión a tomar valores positivos o negativos. Pero entonces, el hecho de que

$$\underbrace{\langle \Omega | \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) | \Omega \rangle}_{\neq 0} \neq \langle \Omega | \hat{\varphi}(x_1) | \Omega \rangle \langle \Omega | \hat{\varphi}(x_2) | \Omega \rangle = 0$$

= $\langle \Omega | T\{\hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2)\} | \Omega \rangle$ para $x_1 > x_2$, "función de Wightman"

nos indica que en el vacío, el comportamiento (el patrón de interacción) del campo en x_1 y en x_2 está correlacionado, es decir, $|\Omega\rangle$ es un estado entrelazado. Similarmente, el correlador de N puntos

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T\{\hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \dots \hat{\varphi}(x_N)\} | \Omega \rangle \neq 0$$

($\neq \sum_{p:(1, \dots, N) \rightarrow (j_1, \dots, j_N)} G_2(x_{j_1}, x_{j_2}) G_2(x_{j_3}, x_{j_4}) \dots G_2(x_{j_{N-1}}, x_{j_N})$ si hay interacciones)

expresa correlaciones/entrelazamiento multipartita en el estado $|\Omega\rangle$.

De hecho, el llamado teorema de Reeh-Schlieder afirma que el patrón de entrelazamiento en $|\Omega\rangle$ es tal que, actuando sobre él solo con operadores locales restringidos a una región acotada cualquiera, podemos obtener una aproximación arbitrariamente buena de cualquier

estado en el espacio de Hilbert completo \mathcal{H} . Por ejemplo, actuando sobre el vacío solo dentro de este salón, ¡podemos, a la EPR, crear el sol!

En años recientes se ha descubierto que es muy útil entender a una teoría de campos desde el punto de vista del entrelazamiento. Pej., la cantidad de entrelazamiento presente en un estado pone una cota a la magnitud de todos los correladores [Wolff et al., 0704.3906].

Al día de hoy, esta sigue siendo un área de investigación muy activa

[ver pej. Calabrese y Cardy quant-ph/0505193, 0905.4013;

Corini y Huerta 0905.2562; Nishida, Ryu y Takayanagi 0905.0932].

Regresando a nuestro objetivo de determinar los correladores, normalmente somos capaces de hacer cálculos explícitos solo en el régimen de acoplamiento débil. Pero en este capítulo del curso

veremos que existen familias infinitas de restricciones no

perturbativas sobre los correladores de cualquier teoría, asociadas a las ecuaciones de movimiento (\Rightarrow "ecuaciones de Schwinger-Dyson") y/o a la existencia de simetrías (\Rightarrow "identidades de Ward").

La ruta más sencilla para deducir estas restricciones nos la da la cuantización por integral de trayectoria.

A nivel clásico, vimos que el teorema de Noether asocia a cada simetría continua una corriente que se conserva como consecuencia de la ecuación de movimiento para el campo. En cuantización canónica, el operador de campo $\hat{\varphi}(x)$ obedece esta misma ecuación, y tenemos por lo tanto la misma ley de conservación (salvo posibles violaciones de la simetría debidas a efectos cuánticos —las llamadas 'anomalías').

En el formalismo de la integral funcional, el campo $\varphi(x)$ es, como en el caso clásico, una función ordinaria, pero, al ser nuestra variable de integración, no está restringido a satisfacer la ecuación de movimiento.

¿En qué sentido entonces se satisface esta ecuación (y las posibles leyes de conservación asociadas a ella)?

Sabemos que, clásicamente, la ecuación de movimiento proviene de pedir que la acción $S[\varphi]$ sea invariante

bajo una variación arbitraria

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x).$$

Si consideramos esto como un cambio de variables en la integral de trayectoria, tenemos

$$\int D\varphi e^{iS[\varphi]} \stackrel{\text{renombrar}}{=} \int D\varphi' e^{iS[\varphi']} \quad \text{porque } \varphi \text{ es solo una variable de integración}$$

$$\stackrel{\text{cambio de variables}}{\rightarrow} \underbrace{D\varphi} \equiv S[\varphi] + \int d^4x' \delta\varphi(x') \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x')},$$

es decir,

$$\int D\varphi e^{iS[\varphi]} = \int D\varphi e^{iS[\varphi]} \left\{ 1 + i \int d^4x' \delta\varphi(x') \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x')} + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \right\}$$

o lo que es lo mismo,

$$0 = i \int d^4x' \delta\varphi(x') \int D\varphi e^{iS[\varphi]} \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x')}.$$

Dado que la variación $\delta\varphi(x)$ es arbitraria, concluimos que el valor esperado

$$\left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \right\rangle \equiv \int D\varphi e^{iS[\varphi]} \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = 0, \quad \text{p. 545}$$

es decir, la ecuación de movimiento

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \right) = 0$$

se satisface en promedio .

Por ejemplo, para el campo de Klein-Gordon tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\partial^2 + m^2) \varphi(x) \rangle = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} (\partial^2 + m^2) \varphi(x) \\ &= (\partial^2 + m^2) \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \varphi(x) . \end{aligned}$$

$\uparrow \partial_x^2$

En el lenguaje canónico, esto (dividido entre $Z[0] = \langle 1 \rangle$) dice simplemente que la función de correlación de 1 punto satisface

$$(\partial^2 + m^2) \langle \Omega | \hat{\varphi}(x) | \Omega \rangle = 0 ,$$

como era de esperarse .

Podemos notar que nuestro anterior procedimiento en esencia se reduce a la observación de que la integral funcional de una derivada funcional total es cero, y por tanto

$$\begin{aligned}
 0 &= \int \mathcal{D}\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left(e^{iS[\varphi]} \right) \\
 &= \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} i \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \\
 &= i \left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

el posible término de superficie en $\mathbb{T} \int_x^{\infty} \mathcal{D}\varphi_x$ se anula porque $e^{iS[\varphi]} \xrightarrow{\varphi \rightarrow \pm\infty} 0$ (evidente en versión euclidiana e^{-S_E})

Usando esta misma idea, podemos rápidamente deducir que

$$\begin{aligned}
 0 &= \int \mathcal{D}\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left\{ e^{iS[\varphi]} \varphi(x') \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \left[i \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \varphi(x') + \delta^{(4)}(x-x') \right],
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{1}{\langle 1 \rangle} \left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \varphi(x') \right\rangle = i \delta^{(4)}(x-x').$$

En el ejemplo de Klein-Gordon, esto dice que

$$\frac{1}{\langle 1 \rangle} \left\langle -(\partial_x^2 + m^2) \varphi(x) \varphi(x') \right\rangle = i \delta^{(4)}(x-x')$$

$$\underbrace{- (\partial_x^2 + m^2) \langle \varphi(x) \varphi(x') \rangle}_{\text{}}$$

$$(c) \partial_x^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

que en el formalismo canónico corresponde a

$$\underbrace{-(\partial_x^2 + m^2)}_{\Delta_x} \underbrace{\langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \} | \Omega \rangle}_{\Delta^{-1}(x, x')} = i \delta^{(4)}(x-x') \quad \checkmark$$

↑ proviene de $\Delta_x \theta(t-t')$

Utilizando exactamente el mismo procedimiento en el caso con N inserciones de φ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left\{ e^{iS[\varphi]} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \left\{ i \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \right. \\ &\quad \left. + \delta^{(4)}(x-x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_N) + \dots + \varphi(x_1) \dots \delta^{(4)}(x-x_N) \right\} \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$\left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \right\rangle = \sum_{n=1}^N \left\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{n-1}) i \delta^{(4)}(x-x_n) \varphi(x_{n+1}) \dots \varphi(x_N) \right\rangle.$$

Vemos entonces que, tanto en la integral funcional como en el formalismo canónico, la ecuación de movimiento

es válida dentro de las funciones de correlación, excepto por los 'términos de contacto' que figuran en el lado derecho de la igualdad, es decir, términos con deltas de Dirac localizadas en puntos específicos del espaciotiempo. Desde el punto de vista canónico, las deltas de Dirac aparecen al actuar con Δ_x sobre las funciones escalón $\Theta(x^0 - x_n^0)$ que implementan el orden temporal en el correlador $\langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \} | \Omega \rangle$.

Las ecuaciones que recién dedujimos se conocen como ecuaciones de Schwinger-Dyson. Para una teoría arbitraria, constituyen un conjunto infinito de igualdades no perturbativas que relacionan entre sí las funciones de correlación.

Podemos resumir formalmente estas ecuaciones en términos de la funcional generatriz $Z[J]$, observando que

$$\begin{aligned}
0 &= \int \mathcal{D}\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left\{ e^{iS[\varphi] + \int d^4x J(x)\varphi(x)} \right\} \\
&= \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi] + \int d^4x J\varphi} \left\{ i \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} + J(x) \right\} \\
&= \left\{ i \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] + J(x) \right\} \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi] + \int d^4x J\varphi} .
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] Z[J] = i J(x) Z[J]} .$$

Desarrollando esta ecuación en potencias de $J(x)$ y emparejando los coeficientes, obtenemos de vuelta la serie infinita de ecuaciones de Schwinger-Dyson.

[Z: 22/02/23]

P.ej., para $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$,

tenemos

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} = \underbrace{-(\partial^2 + m^2)\varphi(x)}_{\equiv \Delta_x} - \frac{\lambda}{3!} \varphi^3(x) ,$$

y la ecuación de Schwinger-Dyson para $Z[J]$ dice que

$$= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{M!} \int d^4 y_1 \dots d^4 y_M J(y_1) \dots J(y_M) \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(y_1) \dots \hat{\varphi}(y_M) \} | \Omega \rangle$$

$$-(\partial_x^2 + m^2) \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J] - \frac{\lambda}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J(x)^3} Z[J] = i J(x) Z[J].$$

Se puede ver fácilmente que a $\mathcal{O}(J^N)$ (es decir, tomando $\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_N)} [\dots]_{J=0}$), esto coincide con la ec. de S-D original, p. 626

$$-(\partial_x^2 + m^2) \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle$$

$$- \frac{\lambda}{3!} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}^3(x) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^N \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots i \delta^{(4)}(x-x_n) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle.$$

$\frac{\delta S}{\delta \varphi}$ (with arrows pointing to the terms above)

L4: 11/02/19

Podemos reescribir esto integrando $\int d^4 x \Delta^{-1}(x,y)$:

$$i \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(y) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle$$

$$= \frac{\lambda}{3!} \int d^4 x \Delta^{-1}(x,y) \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}^3(x) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle$$

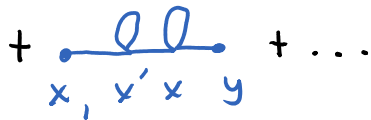
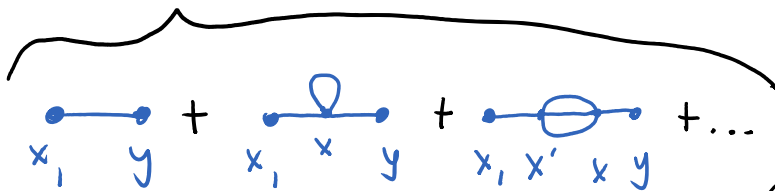
$$+ \sum_{n=1}^N \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots i \Delta^{-1}(x_n,y) \dots \hat{\varphi}(x_N) \} | \Omega \rangle.$$

Como ejemplo podemos tomar el caso $N=1$,

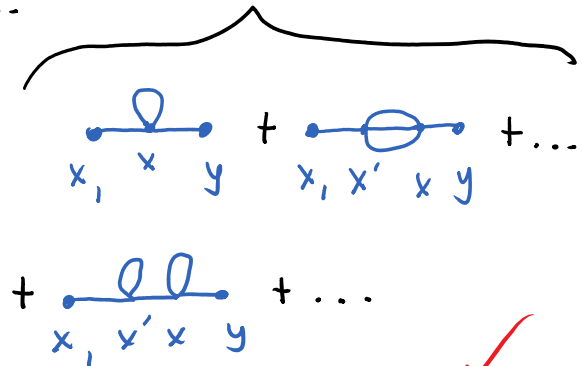
$$\langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(y) \hat{\varphi}(x_1) \} | \Omega \rangle = \Delta^{-1}(x_1, y)$$

$$-i \frac{\lambda}{3!} \int d^4x \Delta^{-1}(x, y) \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}^3(x) \hat{\varphi}(x_1) \} | \Omega \rangle,$$

que diagramáticamente dice que



p.414



Con este ejemplo vemos entonces que las ecuaciones de Schwinger-Dyson son relaciones entre las funciones de correlación que se reducen a identidades 'obvias' cuando las analizamos en términos de diagramas de Feynman, pero tienen la gran virtud de ser enunciados NO perturbativos.

Si lográramos resolver este conjunto infinito de ecuaciones diferenciales acopladas, habríamos resuelto la teoría, puesto que conoceríamos todos los correladores de manera exacta. Evidentemente, esto en general NO es fácil, y normalmente se recurre a truncamientos. Ver pej., Bashir et al., arXiv:1201.3366. 12:15/08/17 _____

Regresando a la discusión general, consideremos ahora el caso de una transformación infinitesimal

$$\varphi_\ell(x) \rightarrow \varphi'_\ell(x) = \varphi_\ell(x) + \underbrace{\delta\varphi_\ell(x)}_{\substack{\text{parámetro infinitesimal} \\ (\text{uno a la vez})}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{OJO: Variación} \\ \text{funcional / total} \\ (\text{ver p. 164}) \end{array}$$

$$\delta\varphi_\ell(x) = \omega \underbrace{\Phi_\ell(x)}_{\substack{\text{forma de} \\ \text{variación}}}$$

que es una simetría de nuestro sistema, es decir,

$$S[\varphi'] = S[\varphi].$$

La transformación

$$\varphi_\ell(x) \rightarrow \varphi'_\ell(x) = \varphi_\ell(x) + \underbrace{\omega(x) \Phi_\ell(x)}_{\delta\varphi_\ell(x)} \quad (\star)$$

induce entonces

$$S[\varphi] \rightarrow S[\varphi'] = S[\varphi] + \int d^4x \underbrace{J^\mu(x)} \partial_\mu \omega(x).$$

δS debe tener esta forma, porque $\delta S = 0$ cuando $\partial_\mu \omega = 0$.

$J^\mu(x)$ es la corriente de Noether asociada a la simetría en cuestión: si ahora usamos las ecuaciones de movimiento,

entonces $\delta S = 0$ bajo una variación arbitraria, así que

integrando por partes tenemos la ley de conservación

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Este es un atajo para demostrar el teorema de Noether

Para extraer las consecuencias de la simetría a

nivel cuántico, consideremos (\star) como un cambio de variables en la integral funcional con N inserciones:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \varphi_{l_1}(x_1) \cdots \varphi_{l_N}(x_N) &\stackrel{\text{renombrar}}{=} \int \mathcal{D}\varphi' e^{iS[\varphi']} \varphi'_{l_1}(x_1) \cdots \varphi'_{l_N}(x_N) \\ &= \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \left\{ \varphi_{l_1}(x_1) \cdots \varphi_{l_N}(x_N) + i \int d^4x \partial_\mu \omega(x) J^\mu(x) \varphi_{l_1}(x_1) \cdots \varphi_{l_N}(x_N) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \varphi_{l_1}(x_1) \cdots \underbrace{\delta\varphi(x_n)}_{\omega(x_n) \Phi_{l_n}(x_n)} \cdots \varphi_{l_N}(x_N) \right\} \\ &\quad \underbrace{\int d^4x \omega(x) \Phi_{l_n}(x) \delta^{(4)}(x-x_n)} \end{aligned}$$

Dado que $\omega(x)$ es arbitraria, esto implica que

$$\left\langle \partial_\mu J^\mu(x) \varphi_{l_1}(x_1) \cdots \varphi_{l_N}(x_N) \right\rangle = -i \sum_{n=1}^N \left\langle \varphi_{l_1}(x_1) \cdots \Phi_{l_n}(x_n) \delta^{(4)}(x-x_n) \cdots \varphi_{l_N}(x_N) \right\rangle$$

relaciones conocidas como identidades de Ward (-Takahashi).

Como hemos visto, estas ecuaciones son simplemente las ecuaciones de Schwinger-Dyson que expresan la conservación de la corriente de Noether $J^\mu(x)$.

Apliquemos este razonamiento en el caso de QED, llevando a cabo la transformación

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) \equiv e^{i\int \theta(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) \equiv e^{-i\int \theta(x)} \bar{\psi}(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{con } \theta(x) \\ \text{infinitesimal.} \end{array}$$

Esta transformación sería una simetría de la teoría si θ fuera constante (o si transformamos también el campo de norma, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x)$), pero no siendo así, tenemos

$$i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow i\bar{\psi}' \gamma^\mu \partial_\mu \psi' - \underbrace{\mp \bar{\psi}' \gamma^\mu \psi'}_{\equiv J^\mu(x)} \partial_\mu \theta(x)$$

corriente eléctrica esperada ✓

y por lo tanto $\mathcal{L}_{QED} \rightarrow \mathcal{L}_{QED} - J^\mu(x) \partial_\mu \theta(x)$.

Interpretando esto como un cambio de variables en la integral de trayectoria con inserciones $\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)$, vemos entonces que

$$\begin{aligned}
 & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu e^{iS_{QED}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \\
 & \quad \text{renombrar} \\
 & \quad \downarrow \\
 & = \int \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}A_\mu e^{iS_{QED}[\psi', \bar{\psi}', A_\mu]} \psi'(x_1) \bar{\psi}'(x_2) \\
 & \quad \text{cambio de variables} \\
 & \quad \downarrow \\
 & = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu e^{iS_{QED}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]} \left\{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \right. \\
 & \quad \left. + i \int d^4x \left[-J^\mu(x) \partial_\mu \theta(x) \right] \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) + i \int d^4x \theta(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \right\} \\
 & \quad \left. + \theta(x) \partial_\mu J^\mu(x) \right\} \\
 & \quad \left. + i \int d^4x \theta(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \right\} \\
 & \quad \left. - \left[\delta^{(4)}(x-x_1) - \delta^{(4)}(x-x_2) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

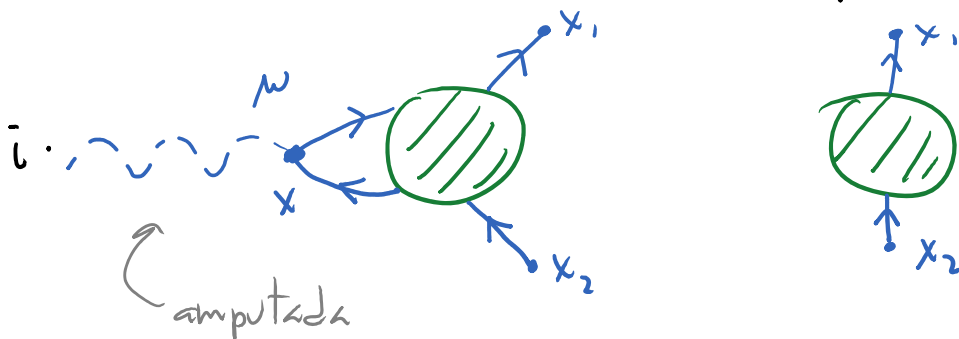
Como $\theta(x)$ es arbitrario, esto implica que

$$\begin{aligned}
 \langle \partial_\mu J^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle &= - \int d^4x \delta^{(4)}(x-x_1) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \\
 &+ \int d^4x \delta^{(4)}(x-x_2) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle,
 \end{aligned}$$

o, en lenguaje canónico (dividiendo entre $\langle 1 \rangle = Z[0]$),

$$\partial_\omega \langle \Omega | T \{ \hat{J}^\omega(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle = \mathcal{F} [-\delta^{(4)}(x-x_1) + \delta^{(4)}(x-x_2)]$$

$$\underbrace{\mathcal{F} \hat{\psi}(x) \delta^\omega \hat{\psi}(x)}_{\text{cf. } -i\mathcal{F} \hat{\psi} \delta^\omega \hat{\psi} \hat{A}_\omega \Rightarrow \text{wavy line} = -i\mathcal{F} \delta^\omega} \cdot \langle \Omega | T \{ \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle$$



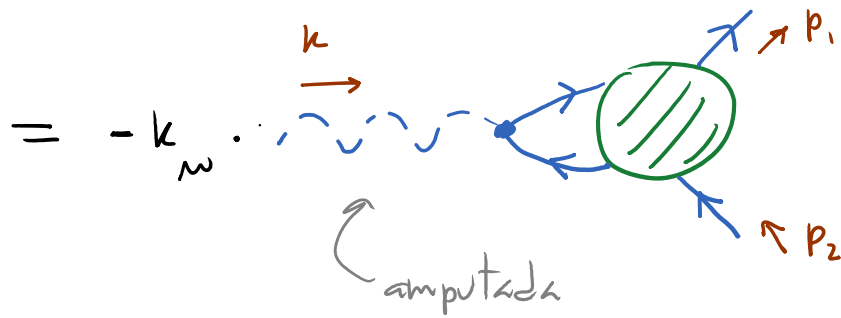
Tomando la transformada de Fourier

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} \int d^4x_1 e^{ip_1 \cdot x_1} \int d^4x_2 e^{-ip_2 \cdot x_2}$$

obtenemos una relación entre funciones de correlación en espacio de momentos. Demostrando

$$\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{-ik \cdot x + ip_1 \cdot x_1 - ip_2 \cdot x_2} \partial_\omega \langle \Omega | T \{ \hat{J}^\omega(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle$$

$$\equiv -k_\omega (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - k) i\mathcal{M}^\omega(p_1, p_2)$$



y

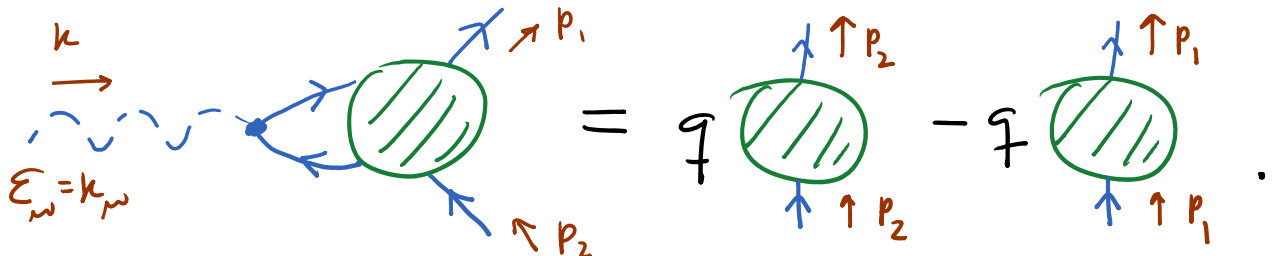
$$\int d^4x_1 d^4x_2 e^{-ik \cdot x + ip_1 \cdot x_1 - ip_2 \cdot x_2} \delta^{(4)}(x-x_1) \langle \Omega | T \{ \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle$$

$$= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i(k-p_1) \cdot x_1 - ip_2 \cdot x_2} G_2(x_1, x_2) \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - k) \tilde{G}_2(p_2)$$

tenemos (satisfaciendo $p_1 = p_2 + k$)

$$-k_\mu iM^\mu(p_1, p_2) = -g \tilde{G}_2(p_2) + g \tilde{G}_2(p_1)$$

o, diagramáticamente,

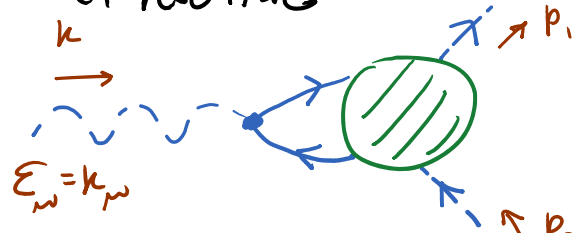


Esta es la relación que demostró Takahashi y se conoce por tanto como identidad de Ward-Takahashi.

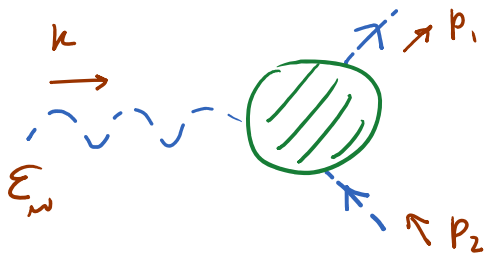
(se puede generalizar al caso con $2N$ fermiones y n fotones extra, partiendo de $\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}A e^{iS_{\text{QED}}} \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \dots \Psi(x_{2N-1}) \bar{\Psi}(x_{2N}) A(y_1) \dots A(y_n)$.)

En el lab izq., el propagador (libre) del fotón ha sido ya amputado, así que podemos obtener el elemento de matriz invariante iM (\leftrightarrow amplitud de dispersión) si amputamos también los propagadores fermiónicos ($\tilde{G}_2(p_1)$ y $\tilde{G}_2(p_2)$) y después vamos a la capa de masa. Pero en este caso, los diagramas del lab derecho no contribuyen, porque ninguno tiene un polo en $p_1^2 = m^2$ y otro en $p_2^2 = m^2$.

Tenemos entonces el resultado

$$iM(k, p_2 \rightarrow p_1) = \text{diagrama} = 0,$$


es decir, la amplitud de dispersión



se anula si el fotón está polarizado longitudinalmente,

$$\epsilon_\mu = k_\mu.$$

Esta es la identidad de Ward original, que había aparecido ya en pp. 498-99, presentada como consecuencia de invariancia de norma (que en efecto implica la conservación de $J^\mu(x)$).

9. Correcciones de Lazos y Renormalización

Al cuantizar una teoría libre, como Klein-Gordon,

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2,$$

tenemos una interpretación muy sencilla y directa de las excitaciones en términos de partículas, que nos permite en particular identificar el parámetro m^2 que aparece en \mathcal{L}_{KG} como la masa física de las partículas (\Leftrightarrow ubicación del polo en $\tilde{G}_2^{(0)}(p) = \tilde{K}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}$).

Pero sabemos que al agregar interacciones, p.ej. $-\frac{\lambda}{4!} \varphi^4$, la situación se complica: la noción de partícula cambia (ahora las partículas físicas se identifican en los estados asintóticos, y a través de la fórmula de reducción LSZ corresponden a polos en los correladores - ver pp. 427-448). En cuanto incorporamos diagramas con lazos (\equiv "correcciones radiativas"), m^2 No tiene ya por qué coincidir con la masa física de las partículas, medible experimentalmente.

Es decir, para determinar la masa física en el caso libre fue necesario hacer una uenta, que hace falta repetir entonces al agregar interacciones. Lo mismo es cierto para los otros parámetros en el Lagrangiano.

P.ej., $-i\lambda = iM(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4)$ solo al orden más bajo en la expansión perturbativa. Conviene entonces adaptar notación que enfatiza nuestra ignorancia inicial, reescribiendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_0 \partial^\mu \varphi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \varphi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 \varphi_0^4$$

↖
↑
↑
}

campo desnudo
masa desnuda
constante de acoplamiento desnuda
variable y parámetros abstractos, que definen la teoría

A partir de esto, obtenemos los reglas de Feynman habituales. P.ej., en espacio de momentos,

$$\text{---} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \quad \times = -i\lambda_0$$

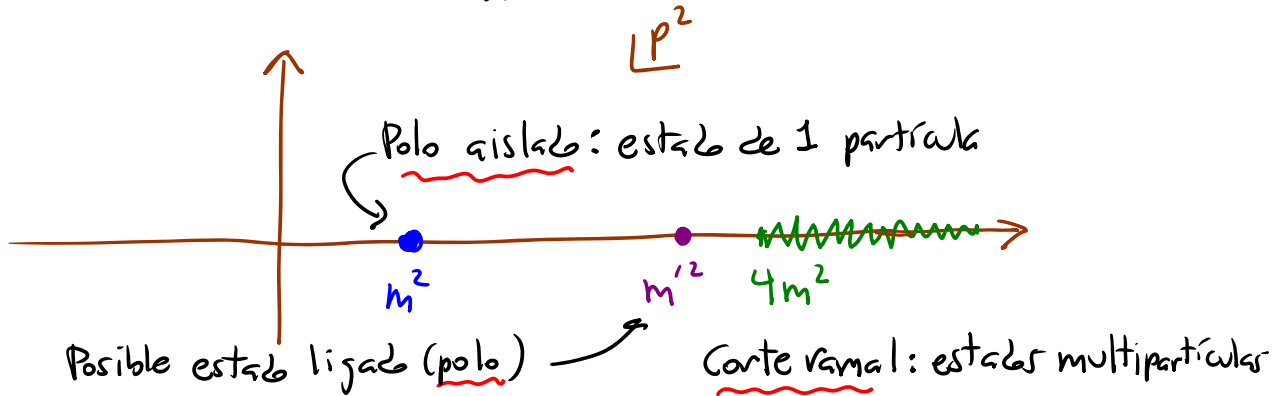
Recordemos ahora (de la p. 432 del curso anterior) el resultado no perturbativo de Källén-Lehmann para la función de 2 puntos,

función de correlación desnuda

$$\tilde{G}_2(p^2) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_0(x) \hat{\varphi}_0(0) \} | \Omega \rangle$$

$$= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \underbrace{\int_{\sim 4m^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}}_{\equiv \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \delta(M^2 - m_{\epsilon}^2) |\langle \epsilon_0 | \hat{\varphi}_0(0) | \Omega \rangle|^2}$$

densidad espectral: probabilidad de que $\hat{\varphi}_0(0)$ cree estado con "masa" M^2



Aquí m^2 es la masa física, o "renormalizada", de la partícula, y

$$Z \equiv |\langle \vec{p} | \hat{\varphi}_0(0) | \Omega \rangle|^2 = |\langle 0 | \hat{\varphi}_0(0) | \Omega \rangle|^2 < 1$$

es la constante de renormalización del campo.
 "de la función de onda"